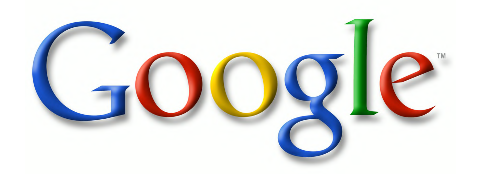
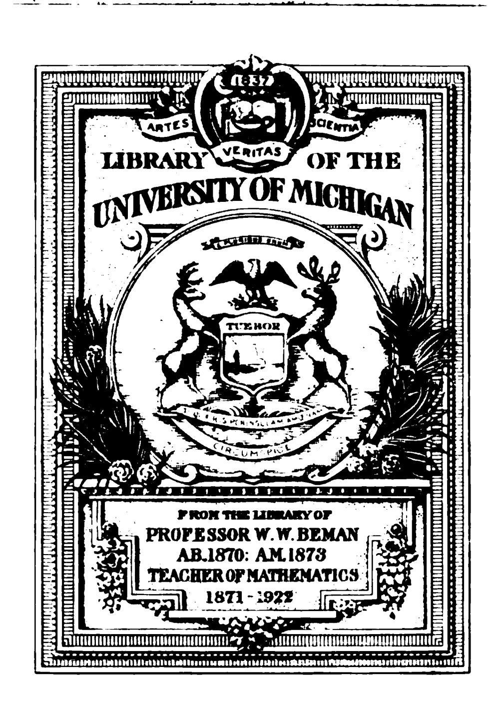
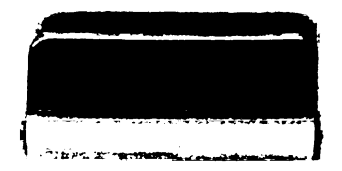





1837
ARTES
VERITAS
SCIENTIA
LIBRARY OF THE
UNIVERSITY OF MICHIGAN
TUEBOR
FROM THE LIBRARY OF
PROFESSOR W. W. BEMAN
A.B. 1870: A.M. 1873
TEACHER OF MATHEMATICS
1871 - 1922





SAMMLUNG

VON

FORMELN

DER REINEN UND ANGEWANDTEN

MATHEMATIK.

SAMMLUNG

VON

FORMELN

DER REINEN UND ANGEWANDTEN

MATHEMATIK

VON

DR. W. LÁSKA.

MIT DREI TAFELN.

BRAUNSCHWEIG,

DRUCK UND VERLAG VON FRIEDRICH VIEWEG UND SOHN.

1888 – 1894.

VORWORT.

Das Bedürfniss einer möglichst umfangreichen Formelnsammlung, welches der Verfasser bei seinen praktischen Arbeiten empfand, war die Veranlassung zu der Zusammenstellung des vorliegenden Werkes. Es wurden alle irgendwie nur praktisch verwendbaren Formeln aufgenommen, von den rein theoretischen nur so viel, als nothwendig erschien. Dass diese Sammlung nicht erschöpfend sein kann, braucht wohl nicht speciell gesagt zu werden. Auch war es mir nicht möglich, eine jede aufgenommene Formel bezüglich ihrer Werthigkeit zu prüfen. Es wird wohl kein Mathematiker an eine Formelnsammlung diejenige Forderung der Genauigkeit stellen, wie an stereotypirte Logarithmentafeln. Doch ist schon Vorsorge dafür getroffen, dass die etwaige zweite Auflage diesem Ideale möglichst nahe komme. Das wird aber nur durch die vereinigte Arbeit Mehrerer geschehen können.

Was die Anordnung und Zusammenstellung der Formeln betrifft, so wurden zunächst die wichtigsten vorangestellt, auf welche die minder wichtigen je nach dem Grade der Formverwandtschaft folgen. Durch diese Anordnung, in welche man sich bald hineinlebt, sowie durch die Register dürfte die Auffindung irgend einer Formel so leicht sein, als es überhaupt in einer so ausführlichen Formelnsammlung angeht. Ganz besondere Sorgfalt wurde der speciellen astronomischen Abtheilung gewidmet, die durch mehrere, eigens für dieses Werk berechnete Tafeln bereichert ist. Die Correctheit der Tafeln dürfte wenig zu wünschen übrig lassen.

Durch ihre Fülle des Materials ersetzt die vorliegende Formelnsammlung nicht nur ein Uebungsbuch für das Studium der höheren Mathematik, sondern sie eignet sich auch dadurch, dass sie das Wichtigste an die Spitze stellt, vorzüglich zur Repetition. Von diesem Standpunkte ausgehend, wurden vorzugsweise jene Partien bearbeitet, welche die mathematische Physik umfassen. Denn für die technischen Anwendungen derselben haben wir zahlreiche Formelnsammlungen in speciellen Ingenieur-Kalendern und Taschenbüchern.

Obschon ich vollkommen überzeugt bin, dass ich nur ein Menschenwerk geliefert habe, so hoffe ich dennoch, dass diese Sammlung sich viele Freunde erwerben wird.

Prag, im Juli 1894.

Der Verfasser.

INHALT.

I. Algebraische Analysis.

Anhang.

Einige numerische Tafeln.

Differentialrechnung.

Integral-Tafeln. A. Unbestimmte Integrale.

[1]) Eine vollständige Sammlung aller bisher integrirten Differentialgleichungen nach der Art, wie Bierens de Haan die Integrale behandelt, bereite ich vor.

Trigonometrie.

Analytische Geometrie der Ebene.

Analytische Geometrie des Raumes.

III. Angewandte Mathematik.

Tafeln.

§. 1.

Cyklometrische Functionen.

NB. Die folgenden Gleichungen sind wegen ihrer Vieldeutigkeit vorsichtig zu gebrauchen.

1) $$arc\sin x = 2\,arc\sin\sqrt{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{2}\,arc\sin 2x\sqrt{1-x^2}$$
$$= arc\cos\sqrt{1-x^2} = \frac{\pi}{2} - arc\cos x = arc\,tgn\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$
$$= 2\;arc\,tgn\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x} = \frac{1}{2}\,arc\,tgn\frac{2x\sqrt{1-x^2}}{1-2x^2}$$
$$= arc\sec\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = arc\,cosec\frac{1}{x}.$$

2) $$arc\cos x = 2\,arc\cos\sqrt{\frac{1+x}{2}} = \frac{1}{2}\,arc\cos(2x^2-1) = arc\sin\sqrt{1-x^2}$$
$$= \frac{\pi}{2} - arc\sin x = arc\,tgn\sqrt{\frac{1-x^2}{x^2}} = 2\,arc\,tgn\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$$
$$= \frac{1}{2}\,arc\,tgn\frac{2x\sqrt{1-x^2}}{2x^2-1} = arc\sec\frac{1}{x} = arc\,cosec\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

3) $$arc\,tgn\,x = 2\,arc\,tgn\frac{-1+\sqrt{1+x^2}}{x} = \frac{1}{2}\,arc\,tgn\frac{2x}{1-x^2}$$
$$= arc\sin\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = 2\,arc\sin\sqrt{\frac{-1+\sqrt{1+x^2}}{2\sqrt{1+x^2}}}$$
$$= \frac{1}{2}\,arc\sin\frac{2x}{1+x^2} = arc\cos\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$
$$= 2\,arc\cos\sqrt{\frac{1+\sqrt{1+x^2}}{2\sqrt{1+x^2}}} = \frac{1}{2}\,arc\cos\frac{1-x^2}{1+x^2}$$
$$= \frac{\pi}{2} - arc\cot x = arc\cot\frac{1}{x} = arc\sec\sqrt{1+x^2}$$
$$= arc\,cosec\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}.$$

4) $$arc\sin x \pm arc\sin y = arc\sin\left\{x\sqrt{1-y^2} \pm y\sqrt{1-x^2}\right\}$$

5) $arc\cos x \pm arc\cos y = arc\cos\{xy \mp \sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}\}$

6) $arc\,tgn\, x \pm arc\,tgn\, y = arc\,tgn\left\{\frac{x \pm y}{1 \mp xy}\right\}$

7) $arc\sin x \pm arc\cos y = arc\sin\{xy \pm \sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}\}$
$= arc\cos\{y\sqrt{1-x^2} \mp x\sqrt{1-y^2}\}$

8) $arc\,tgn\, x \pm arc\cot y = arc\,tgn\,\frac{x \pm y}{1 \mp xy} = arc\cot\frac{y \mp x}{xy \pm 1}$

9) In Bezug auf die Vieldeutigkeit merke man:
$arc\sin x = n\pi + (-1)^n |arc\sin x|$
$arc\cos x = 2n\pi \pm |arc\cos x|$
$arc\,tgn\, x = n\pi + |artgn\, x|$
$arc\,cotgn\, x = n\pi + |arc\,cotgn\, x|$

10) $arc\sin(-x) = -arc\sin x$
$arc\cos(-x) = \pi - arc\cos x$
$arc\,tgn(-x) = -arc\,tgn\, x$
$arc\,cotg(-x) = -arc\,cotgn\, x$

Zusatz zu §. 1.

Bezüglich der Vieldeutigkeit der cyklometrischen Functionen mögen folgende Andeutungen genügen: Sei u der Bogen des ersten Quadranten, x sein Sinus, so gelten folgende Gleichungen:

$\sin u = x \qquad u = arc\sin x$

$\cos u = \sqrt{1-x^2} \qquad u = arc\cos\sqrt{1-x^2}$

$tgn\, u = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \qquad u = arc\,tgn\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$

etc.

Allgemein sind die Wurzeln der Gleichung

$$\sin w = x$$

in der Formel

$$w = \frac{\pi}{2} \mp \left(\frac{\pi}{2} - arc\sin x\right) \pm 2\varkappa\pi$$

$$\varkappa = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

weil die Bögen

$$\frac{\pi}{2} \mp \left(\frac{\pi}{2} - u\right) \pm 2\varkappa\pi$$

alle denselben Sinus haben. Aus demselben Grunde haben wir allgemein

$$arc\sin x + arc\sin y = \frac{\pi}{2} \mp \left\{\frac{\pi}{2} - arc\sin\left(x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}\right)\right\} \pm 2\varkappa\pi$$

zu schreiben, weil der Bogen möglicherweise über den Quadranten hinausgehen kann. Sei

$$\sin u = x \quad \text{also} \quad u = arc\sin x$$
$$\sin v = y \qquad\qquad v = arc\sin y,$$

so wird im letzteren Falle $\cos(u+v)$ negativ. Nun ist

$$\cos(u+v) = \sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2} - xy = \frac{1-(x^2+y^2)}{\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}+xy}$$

wir haben demnach

$$arc\sin x + arc\sin y = arc\sin\left\{x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{1-x^2}\right\},$$

wenn

$$x^2+y^2<1$$

$$arc\sin x + arc\sin y = \pi - arc\sin\left\{x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{1-x^2}\right\},$$

wenn

$$x^2+y^2>1.$$

Auf gleiche Weise findet man

$$arc\,tgn\,x + arc\,tgn\,y = arc\,tgn\frac{x+y}{1-xy} \quad xy<1$$

$$arc\,tgn\,x + arc\,tgn\,y = \pi - arc\,tgn\frac{x+y}{1-xy} \quad xy>1.$$

Ueberhaupt hat man bei jedem Problem alle Umstände sorgfältig in Betracht zu ziehen und zu beachten, dass die im §. 1 aufgestellten Werthe nur für die Winkel im ersten Quadranten gelten. Wie die Formeln zu gebrauchen sind, mögen folgende zwei Beispiele zeigen.

I. Man beweise, dass

$$arc\sin\sqrt{\frac{1-x}{2}} + \frac{1}{2}arc\sin x = \frac{\pi}{2}.$$

Setze

$$arc\sin\sqrt{\frac{1-x}{2}} = p,\quad \frac{1}{2}arc\sin x = q,$$

so wird

$$p+q=\frac{\pi}{2}$$

und zugleich

$$1 = \sin 2p + 2\sin^2 q;$$

diese Gleichungen müssen zugleich bestehen, wenn die obige Relation gültig sein soll. Wir haben:

$$p = \frac{\pi}{2} - q,$$

und damit

$$1 = \sin(\pi - 2q) + 2\sin^2 q$$
$$1 = \cos 2q + 2\sin^2 q,$$

d. h.

$$\cos 2q = 1 - 2\sin^2 q,$$

dies ist aber eine bekannte Relation.

II. Man bestimme x aus

$$\operatorname{arc\,tgn} \frac{1}{x-1} - \operatorname{arc\,tgn} \frac{1}{x+1} = \frac{\pi}{12}.$$

Sei

$$\operatorname{arc\,tgn} \frac{1}{x-1} = \alpha, \quad \operatorname{arc\,tgn} \frac{1}{x+1} = \beta,$$

so wird

$$\operatorname{tgn}(\alpha - \beta) = \frac{2}{x^2},$$

also

$$\alpha - \beta = \operatorname{arc\,tgn} \frac{2}{x^2} = \frac{\pi}{12}$$

oder

$$\frac{2}{x^2} = \operatorname{tgn} \frac{\pi}{12} = 2 - \sqrt{3},$$

woraus

$$x = \pm(1 + \sqrt{3})$$

folgt.

§. 2.

Näherungswerthe.

1) Bis auf die 3ten Potenzen von α ist:

$$\alpha = \sin\alpha \sqrt[3]{\sec\alpha}$$
$$\frac{\sin\alpha}{\alpha} = \sqrt[3]{\cos\alpha} = \cos\frac{\alpha}{\sqrt{3}}$$
$$\operatorname{tgn}\alpha = 3\alpha - 2\sin\alpha$$
$$\frac{\operatorname{tgn}\alpha}{\alpha} = 3 - 2\sqrt[3]{\cos\alpha}$$

2) $\cos\frac{\pi}{2}\alpha = 1 - \dfrac{\alpha^2}{\alpha + (1-\alpha)\sqrt{\frac{2-\alpha}{3}}}$ Maximalfehler $\pm 0{,}0002$ (Com. Rend. 1880, p. 305)

3) $\log(1+x) = x\dfrac{6+x}{6+4x} - \varrho\dfrac{x^4}{1-x} \qquad 0 < \varrho < \frac{1}{4}$

4) $e^x = \dfrac{6+2x}{6-4x+x^2}\cdot\dfrac{1}{1-\varrho x^4} \qquad 0 < \varrho < \frac{1}{24}$

5) $(1+x)^n = \dfrac{6+(4+2n)x-\varrho x^4}{6+4(1-n)x-n(1-n)x^2} \qquad 0 < \varrho < \frac{1}{4}$

6) $\sin x = x\dfrac{60-7x^2}{60+3x^2} + \varrho x^7 \qquad 0 < \varrho < \frac{1}{4200}$

7) $\cos x = \dfrac{12-5x^2}{12+x^2} + \varrho x^6 \qquad 0 < \varrho < \frac{1}{480}$

8) $\operatorname{arctgn} x = x\dfrac{15+4x^2}{15+9x^2} - \varrho x^7 \qquad 0 < \varrho < \frac{1}{43}$

9) $\arcsin x = x\dfrac{60-17x^2}{60-27x^2} + \varrho\dfrac{x^7}{1-x^2} \qquad 0 < \varrho < \frac{1}{40}$

10) $\log(n+x) = \log n + \dfrac{x}{n} - \dfrac{x^2}{2(n+\theta x)^2} \qquad 0 < \theta < 1$

11) Ist $\varphi < 2^0\,15$, so kann man setzen:

$$\log\sin\varphi = \log\varphi'' + a - \tfrac{1}{3}c\log\cos\varphi$$
$$\log\operatorname{tgn}\varphi = \log\varphi'' + a + \tfrac{2}{3}c\log\cos\varphi$$
$$\log\operatorname{cotgn}\varphi = -\log\varphi'' + b - \tfrac{2}{3}c\log\cos\varphi$$

$a = \log 1'' = 4{,}6855749$
$b = c\,a \quad = 5{,}3144251$

Hier sind die Log. die gewöhnlichen.

§. 3.

Grenzwerthe.

Sei $\lim\delta = 0$, $\lim\omega = \infty$, a eine reelle Zahl, φ eine beliebige Function, so wird:

1) $\lim(u\,v) = \lim u \lim v$

2) $\lim\left(\dfrac{u}{v}\right) = \dfrac{\lim u}{\lim v}$

3) $\lim u^v = (\lim u)^{\lim v}$

4) $\lim\dfrac{(1\pm\delta)^m - 1}{\delta} = \pm m$

5) $lim \frac{a^\delta - 1}{\delta} = log\, a$

6) $lim\, (1+\delta)^{\frac{1}{\delta}} = lim \left(\frac{1+\delta}{1-\delta}\right)^{\frac{1}{2\delta}} = e$

7) $lim \frac{sin\, a\delta}{\delta} = lim \frac{tgn\, a\delta}{\delta} = lim \frac{arc\, sin\, a\delta}{\delta} = lim \frac{arc\, tgn\, a\delta}{\delta} = a$

8) $lim \frac{log(1 + a\delta)}{\delta} = a$

9) $lim\, \delta\, log\, \delta = 0$

10) $lim \frac{\omega}{\sqrt[\omega]{\omega!}} = e$

11) $lim \left\{\omega\left(a^{\frac{1}{\omega}} - 1\right)\right\} = log\, a$

12) $lim \frac{\varphi(\omega)}{\omega} = lim\, \{\varphi(\omega+1) - \varphi(\omega)\}$

13) $lim \frac{\varphi(\omega+1)}{\varphi(\omega)} = lim\, [\varphi(\omega)]^{\frac{1}{\omega}}$

14) $lim\, \omega\left\{\left(\sqrt[\omega]{a}-1\right) - \frac{1}{2}\left(\sqrt[\omega]{a}-1\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\sqrt[\omega]{a}-1\right)^3 + \cdots\right\} = log\, a$

15) $lim \frac{a^x + (a+b)^x + \cdots [a+(\omega-1)b]^x}{\omega^{x+1}} = \begin{cases} \frac{b^x}{x+1} & x > +1 \\ \infty & x \leqq 1 \end{cases}$

16) $lim\, \delta\, \{\varphi(a) + \varphi(a+\delta) + \cdots\ \varphi(b-\delta)\} = \int_a^b \varphi(x)\, dx$

17) $lim \frac{1}{\omega}\{\sqrt{\omega - 1} + \sqrt{\omega - 2^2} + \sqrt{\omega - 3^2} + \cdots\} = \frac{\pi}{4}$

Zusatz zu §. 3.

Ein Beispiel über die Auswerthung der Grenzwerthe: $lim\, \delta = 0$.

$$lim \left\{\frac{\pi}{4\delta} - \frac{\pi}{2\delta(e^{\pi\delta}+1)}\right\} = lim \frac{\pi}{4\delta}\left\{1 - \frac{2}{e^{\pi\delta}+1}\right\}$$

$$= lim \frac{\pi}{4\delta}\left\{\frac{e^{\pi\delta}-1}{e^{\pi\delta}+1}\right\} = lim \frac{\pi^2}{4} \cdot \frac{e^{\pi\delta}-1}{\pi\delta} \cdot \frac{1}{e^{\pi\delta}+1} = \frac{\pi^2}{8}.$$

Seien α und β zwei beliebige positive Grössen und $\beta < \alpha$. Setzt man

$$\alpha_1 = \tfrac{1}{2}(\alpha + \beta) \qquad \beta_1 = \sqrt{\alpha\beta}$$

$$\alpha_x = \tfrac{1}{2}(\alpha_{x-1} + \beta_{x-1}) \qquad \beta_x = \sqrt{\alpha_{x-1}\beta_{x-1}}$$

Sei ferner

$$\frac{\alpha_{x+1} - \beta_{x+1}}{\alpha_x - \beta_x} = \tfrac{1}{2}\varepsilon_x,$$

so wird

$$\alpha_n - \beta_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n (\alpha - \beta)\,\varepsilon_0\,\varepsilon_1 \ldots \varepsilon_{n-1}$$

und

$$\lim(\alpha_n - \beta_n) = 0,$$

d. h. die Grössen α_n und β_n convergiren gegen denselben Werth. das sogenannte arithmetisch geometrische Mittel von α und β welches man mit $M(\alpha\beta)$ zu bezeichnen pflegt.

Vergl. Gauss, Gesamm. Werke II.

§. 4.

Die Mittelwerthe.

1) Sei $\delta = \dfrac{b-a}{n}$,

so ist

$$\mathfrak{M} f(x) \Big/_a^b = \lim \frac{f(a) + f(a+\delta) \cdots + f(a + \overline{n-1}\,\delta)}{n}$$

2) $\mathfrak{M}\, x^p = \dfrac{x^p}{p+1}$ $\quad p$ positiv und ganz.

3) $\mathfrak{M}\, a^x = \dfrac{a^x - 1}{x \log a}$

4) $\mathfrak{M} \sin x = \dfrac{1 - \cos x}{x} \qquad \mathfrak{M} \sin^2 x = \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{4}\cdot\dfrac{1 - \cos 2x}{x}.$

5) $\mathfrak{M} \cos x = \dfrac{\sin x}{x} \qquad \mathfrak{M} \cos^2 x = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4}\dfrac{\sin 2x}{x}.$

6) $\mathfrak{M}\left(\dfrac{1}{1+x}\right) = \dfrac{\log(1+x)}{x}$

7) $\mathfrak{M}\left(\dfrac{1}{1+x^2}\right) = \dfrac{1}{x}\, \mathrm{arctagn}\, x$

8) $\mathfrak{M}\left(\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right) = \dfrac{1}{x} \arcsin x$

9) $(\alpha - \beta)\mathfrak{M}[f(x)] = \int_{\beta}^{\alpha} f(x)\,dx$ α und β können variabel sein.

Theilt man die Fläche U in n Rechtecke $\Delta x . \Delta y$, so ist $U = n \Delta x \Delta y$

$$U \mathfrak{M} f(xy) = \int\int f(xy)\,dx\,dy$$

Die Integrationsgrenzen sind durch die Begrenzung des für x und y gegebenen Spielraumes bestimmt.

Vergleiche: Schlömilch, Handbuch der algebr. Analysis und Uebungsbuch zum Studium der höheren Analysis, S. 260.

§. 5.

Functionen complexer Variabelen.

NB. Die in [ ] stehenden Ausdrücke sind mehrdeutig.

1) $[a^x] = a^x [1^x] = e^{x[lg\,a]}$ $\left.\begin{matrix} m \\ n \\ k \end{matrix}\right\}$ eine beliebige + ganze Zahl.

2) $1^x = e^{x . 2n\pi i}$ $\qquad i = \sqrt{-1} \quad \sqrt{\pm i} = \frac{1 \pm i}{\sqrt{2}}$

3) $1^{xi} = e^{-2n\pi x}$

4) $i^i = e^{-\left(2n+\frac{1}{2}\right)\pi} \qquad i^{-i} = e^{\left(2n+\frac{1}{2}\right)\pi}$

5) $e^{\pm in\varphi} = (\cos n\varphi \pm i \sin n\varphi) = (\cos\varphi \pm i \sin\varphi)^n$

6) $\sqrt[n]{\cos\alpha \pm i \sin\alpha} = \cos\frac{1}{n}(\alpha + k\pi) \pm i \sin\frac{1}{n}(\alpha + k\pi)$.

$$\sqrt[n]{1} = \cos\frac{k\pi}{n} + i \sin\frac{k\pi}{n}.$$

$$\sqrt[n]{-1} = \cos\frac{2k+1}{n}\pi + i \sin\frac{2k+1}{n}\pi$$

$$\sqrt[n]{\pm i} = \cos\frac{4k+1}{2n}\pi \pm i \sin\frac{4k+1}{2n}\pi.$$

$\sqrt{1} = +1, -1 \qquad \sqrt{-1} = +i \; -i$

$\sqrt[3]{1} = +1, \; -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} i\sqrt{3}, \; -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} i\sqrt{3}$

$\sqrt[3]{-1} = -1, \; \frac{1}{2} + \frac{1}{2} i\sqrt{3}, \; \frac{1}{2} - \frac{1}{2} i\sqrt{3}$

$$\sqrt[4]{1} = +1,\ -1,\ +i,\ -i,$$

$$\sqrt[4]{-1} = \sqrt{\tfrac{1}{2}} + i\sqrt{\tfrac{1}{2}},\ \sqrt{\tfrac{1}{2}} - i\sqrt{\tfrac{1}{2}},\ -\sqrt{\tfrac{1}{2}} + i\sqrt{\tfrac{1}{2}},\ -\sqrt{\tfrac{1}{2}} - i\sqrt{\tfrac{1}{2}},$$

$$\sqrt[5]{1} = +1,\quad \frac{-1 + \sqrt{5} + i\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}{4},\quad \frac{-1 + \sqrt{5} - i\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}{4},$$

$$\frac{-1 - \sqrt{5} + i\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}{4},\quad \frac{-1 - \sqrt{5} - i\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}{4},$$

$$\sqrt[5]{-1} = -1,\quad \frac{1 + \sqrt{5} + i\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}{4},\quad \frac{1 + \sqrt{5} - i\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}{4},$$

$$\frac{1 - \sqrt{5} + i\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}{4},\quad \frac{1 - \sqrt{5} - i\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}{4}.$$

Die Gleichung

$$x^{2n} - 2x^n \cos\varphi + 1 = 0$$

hat die Wurzeln

$$x = \cos\frac{2k\pi + \varphi}{n} \pm i \sin\frac{2k\pi + \varphi}{n}.$$

7) $\log 1^x = 2(nx + m)\pi i$

8) $1^x . 1^y = \cos 2(mx + ny)\pi + i \sin 2(mx + ny)\pi$

9) $\pi = 2\,\frac{\log i}{i} = \frac{2}{i} \log \frac{1 + i}{1 - i}$

10) $\sin\varphi = \frac{1}{2i}\{e^{\varphi i} - e^{-\varphi i}\} \quad \cos\varphi = \frac{1}{2}\{e^{\varphi i} + e^{-\varphi i}\}$

$$\operatorname{tgn}\varphi = \frac{1}{i}\,\frac{e^{2\varphi i} - 1}{e^{2\varphi i} + 1}$$

11) $\arcsin x = \frac{\pi}{2} + \frac{1}{i}\log\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right)$ Vergl. §. 1, 9.

$$\left\{ x^2 > 1 = -\frac{\pi}{2} - \frac{1}{i}\log\left(\sqrt{x^2 - 1} - x\right) \right.$$

$$arc\cos x = -\frac{1}{i}\log\left(x+\sqrt{x^2-1}\right) = \pi + \frac{1}{i}\log\left(\sqrt{x^2-1}-x\right)$$

$$arc\,tgn\,x = \frac{i}{2}\log\frac{1-ix}{1+ix} = \frac{i}{2}\log\frac{i+x}{i-x} = \frac{1}{2i}\log\frac{1+ix}{1-ix}$$

12) $$\varphi = \frac{1}{i}\log(\cos\varphi + i\sin\varphi) = \frac{i}{2}\log\frac{1-i\,tgn\,\varphi}{1+i\,tgn\,\varphi}$$

13) $$\log\frac{1+mi}{1+ni} = \frac{1}{2}\log\frac{1+m^2}{1+n^2} + i\,\{arc\,tgn\,m - arc\,tgn\,n\}$$

14) $$arc\sin x i = -\frac{1}{i}\log\left(\sqrt{1+x^2}+x\right)$$

$$= \frac{1}{i}\log\left(\sqrt{1+x^2}-x\right) \qquad x^2 < 1$$

15) $$arc\cos x i = \frac{\pi}{2} + \frac{1}{i}\log\left(\sqrt{1+x^2}+x\right)$$

$$= \frac{\pi}{2} - \frac{1}{i}\log\left(\sqrt{1+x^2}-x\right) \qquad x^2 < 1$$

16) $$arc\,tgn\,x i = -\frac{1}{2i}\log\frac{1+x}{1-x} = \frac{1}{2i}\log\frac{1-x}{1+x} \qquad x^2 < 1$$

$$= \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2i}\log\frac{x+1}{x-1} = \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2i}\log\frac{-x-1}{+x+1} \qquad x^2 > 1$$

$$arc\,cotgn\,x i = \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2i}\log\frac{1+x}{1-x} = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2i}\log\frac{1-x}{1+x} \qquad x^2 < 1$$

$$= \frac{1}{2i}\log\frac{x+1}{x-1} = -\frac{1}{2i}\log\frac{x-1}{x+1} \qquad x^2 > 1$$

17) $$arc\cot(x i) = \frac{\pi}{2} - \frac{i}{4}\log\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^2 \qquad x^2 < 1$$

$$= -\frac{i}{4}\log\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^2 \qquad x^2 > 1$$

18) $$e^{x+iy} = e^x\cos y + i e^x \sin y$$

19) $$a^{x+iy} = a^x\cos(y\log a) + i a^x \sin(y\log a)$$

20) $$\log(x+iy) = \log\sqrt{x^2+y^2} + i\,arc\,tgn\,\frac{y}{x}\begin{cases}\pm 2in\pi & x+\\ \pm(2n+1)i\pi & x-\end{cases}$$

21) $$\sin(x+iy) = \frac{e^y+e^{-y}}{2}\sin x + i\,\frac{e^y-e^{-y}}{2}\cos x$$

22) $$\cos(x+iy) = \frac{e^y+e^{-y}}{2}\cos x - i\,\frac{e^y-e^{-y}}{2}\sin x$$

23) $$tgn(x+iy) = \frac{2\sin 2x + i\,(e^{2y}-e^{-2y})}{e^{2y}+e^{-2y}+2\cos 2x}$$

24) $ctgn(x+iy) = \frac{2\sin 2x - i(e^{2y} - e^{-2y})}{e^{2y} + e^{-2y} - 2\cos 2x}$

25) $sec(x+iy) = 2\,\frac{(e^{y} + e^{-y})\cos x + i(e^{y} - e^{-y})\sin x}{e^{2y} + e^{-2y} + 2\cos 2x}$

26) $cosec(x+iy) = 2\,\frac{(e^{y} + e^{-y})\sin x - i(e^{y} - e^{-y})\cos x}{e^{2y} + e^{-2y} - 2\cos 2x}$

27) Sei

$$2S = \sqrt{(1+x)^2 + y^2} + \sqrt{(1-x)^2 + y^2}$$
$$2T = \sqrt{(1+x)^2 + y^2} - \sqrt{(1-x)^2 + y^2}$$
$$R = S + \sqrt{S^2 - 1},$$

so wird:

$$arc\sin(x+iy) = arc\sin T + i\log R$$
$$arc\cos(x+iy) = arc\cos T - i\log R.$$ Vergl. §. 1, 9.

28) Sei

$$-P = \frac{2x}{x^2+y^2-1} \qquad Q = \frac{x^2+(1+y)^2}{x^2+(1-y)^2},$$

so wird:

$$arc\,tgn(x+iy) = \frac{1}{2}\,arc\,tgn\,P + \frac{i}{4}\log Q \qquad x^2+y^2<1$$
$$= \frac{1}{2}\{\pi - arc\,tgn(-P)\} + \frac{i}{4}\log Q \quad x^2+y^2>1$$
$$arc\,ctgn(x+iy) = \frac{1}{2}\left\{\pi - arc\,ctgn\left(+\frac{1}{P}\right)\right\} - \frac{i}{4}\log Q \quad x^2+y^2<1$$
$$= \frac{1}{2}\,arc\,ctgn - \frac{1}{P} - \frac{i}{4}\log Q \qquad x^2+y^2>1$$

Zusatz zu §. 5.

War bei den cyklometrischen Functionen eine grosse Vorsicht nöthig, so ist hier die allergrösste am Platze. Es dürfte sich bei einem jeden Problem die Untersuchung auf dem Wege der Funkentheorie empfehlen, wozu sich in der Functionentheorie das Nöthige findet.

Wohin der unvorsichtige Gebrauch führen kann, zeigt folgendes Beispiel.

Es ist

$$e^{2n\pi i} = 1, \quad e^{1+2n\pi i} = e,$$

folglich auch

$$e^{(1+2n\pi i)^2} = e^{1-4n^2\pi^2+4n\pi i} = \left[e^{(1+2n\pi i)}\right]^{(1+2n\pi i)} = e^{1+2n\pi i} = e.$$

Wir haben also

$$e^{1-4n^2\pi^2+4n\pi i} = e.$$

Da nun $e^{1+4n\pi i}$ ebenfalls gleich e ist, so würde daraus das absurde Resultat

$$e^{-4n^2\pi^2} = 1$$

folgen, welches für jedes ganze n gelten müsste.

Beispiel: $\frac{arc\cos x}{\sqrt{1-x^2}}$ wird für $x > 1$ scheinbar imaginär, welches ist der reelle Werth? Wir haben

$$\frac{arc\cos x}{i\sqrt{x^2-1}} = \frac{1}{2}\left\{-\frac{1}{i}\log\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)\right\}\frac{1}{\sqrt{x^2-1}},$$

also:

$$\frac{arc\cos x}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\log\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)}{\sqrt{x^2-1}}, \text{ wenn } x > 1.$$

Insbesondere ist das über die cyklometrischen Functionen Gesagte hier zu beherzigen.

§. 6.

Hyperbolische Functionen.

1) $\sin hyp\,\varphi = \frac{1}{i}\sin\varphi i \qquad \cos hyp\,\varphi = \cos\varphi i$

2) $arc\sin hyp\,\varphi = \log\left(\varphi+\sqrt{\varphi^2+1}\right) = \int\frac{d\varphi}{\sqrt{1+\varphi^2}}$

3) $arc\cos hyp\,\varphi = \log\left(\varphi+\sqrt{\varphi^2-1}\right) = \int\frac{d\varphi}{\sqrt{\varphi^2-1}}$

4) $arc\,tgn\,hyp\,\varphi = \frac{1}{2}\log\frac{1+\varphi}{1-\varphi} = \int\frac{d\varphi}{1-\varphi^2}$

5) $arc\sec hyp\,\varphi = \log\left(\frac{1}{\varphi}+\sqrt{\frac{1}{\varphi^2}-1}\right) = -\int\frac{d\varphi}{\varphi\sqrt{1-\varphi^2}}$

6) $arc\,cosec\,hyp\,\varphi = \log\left(\frac{1}{\varphi}+\sqrt{\frac{1}{\varphi^2}+1}\right) = -\int\frac{d\varphi}{\varphi\sqrt{\varphi^2+1}}$

7) $e^{\pm\varphi} = \cos hyp\,\varphi \pm \sin hyp\,\varphi$

8) $\sin hyp\,\varphi = \frac{1}{2}\left(e^{\varphi}+e^{-\varphi}\right) \qquad \cos hyp\,\varphi = \frac{1}{2}\left(e^{\varphi}-e^{-\varphi}\right).$

Vergleiche: Gudermann, Crelle's Journal, Bd. 6, 7, 8, 9. Günther, Lehre von den Hyperbelfunctionen.

§. 7.

Die Facultäten.

1) Wir bezeichnen mit

$$a^{n|d} = a(a+d)(a+2d) + \cdots \quad (a + \overline{n-1}\,d)$$

die **Facultät** mit der Basis a, dem Exponenten n und dem Augment d.

Ist $a = 1$, so wird

$$1^{n|1} = 1 \,.\, 2 \,.\, 3 \ldots (n-1)$$

eine **Factorielle** genannt.

2) $a^{n|-d} = a(a-d)(a-2d) \ldots \quad (a - \overline{n-1}\,d)$.

3) $a^{n|0} = a^n \qquad a^{-n|0} = \frac{1}{a^n} \qquad a^{0|d} = 1.$

4) $a^{-n|d} = \frac{1}{(a-d)^{n|-d}} = \frac{1}{(a-d)(a-2d)\ldots(a-nd)}$

5) $a^{\frac{m}{n}|d} = a^{\frac{p}{n}|d}\left(a + \frac{p}{n}d\right)^{\frac{m-p}{n}|d}$

6) $\sqrt[m|d]{a^{n|d}} = a^{\frac{n}{m}|d}$

7) $a^{\frac{p}{q}+n|d} = a^{\frac{p}{q}|d}\left(a + \frac{p}{q}d\right)\cdots\left(a + \frac{p}{q}d + \overline{n-1}\,d\right)$

8) $a^{-\frac{p}{q}+n|d} = \frac{a^{n|d}}{\left(a + nd - \frac{p}{q}d\right)^{\frac{p}{q}|d}}$

9) $a^{\frac{p}{q}-n|d} = \frac{(a-nd)^{\frac{p}{q}|d}}{(a-d)^{n|d}}$

10) $a^{-\frac{p}{q}-n|d} = \frac{1}{\left(a - \frac{p}{q}d\right)^{\frac{p}{q}|d}\left(a - \frac{p}{q}d - nd\right)^{n|d}}$

Vergleiche: Oettinger, Crelle's Journ., Bd. 33, wo die Facultäten-Theorie sehr ausführlich vorgetragen ist, S. 1, 117, 226, 329. Weierstrass, Abhandlungen zur Functionentheorie.

11) Einige Facultäten:

$0! = 1$	$5! = 120$	$10! = 3628800$
$1! = 1$	$6! = 720$	$11! = 39916800$
$2! = 2$	$7! = 5040$	$12! = 479001600$
$3! = 6$	$8! = 40320$	$13! = 6227020800$
$4! = 24$	$9! = 362880$	$14! = 87178291200$.

§. 8.

Identitäten und Binomialcoefficienten.

A. Identitäten.

1) $(ac-bd)^2+(ad+bc)^2 = (ac+bd)^2+(ad-bc)^2$

2) $(a\alpha+b\beta)^2+(a\beta-b\alpha)^2 = (a^2+b^2)(\alpha^2+\beta^2)$

3) $(a\alpha+b\beta+c\gamma)^2+(a\beta-b\alpha)^2+(a\gamma-c\alpha)^2+(b\gamma-c\beta)^2$
$= (a^2+b^2+c^2)(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)$.

Sei

$$A = a\alpha+b\gamma+c\beta$$
$$B = a\beta+b\alpha+c\gamma$$
$$C = a\gamma+b\beta+c\alpha,$$

so wird:

4) $(a+b+c)(\alpha+\beta+\gamma) = A+B+C$

5) $[a^2+b^2+c^2-(ab+bc+ac)][\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-(\alpha\beta+\beta\gamma+\alpha\gamma)]$
$= A^2+B^2+C^2-[AB+AC+BC]$

6) $[a^3+b^3+c^3-3abc][\alpha^3+\beta^3+\gamma^3-3\alpha\beta\gamma]$
$= A^3+B^3+C^3-3ABC$

7) $(a+b)(b+c)(a+c) = (a+b+c)(ab+bc+ac)$

8) $(a+b)(b+c)(a+c) = \frac{1}{3}[(a+b+c)^3-(a^3+b^3+c^3)]$

9) $a^3(b^2-c^2)+b^3(c^2-a^2)+c^3(a^2-b^2)$
$= (a-b)(b-c)(a-c)\{ab+ac+bc\}$

10) $(b-a)(c-a)(c-b) = a^2(c-b)+b^2(a-c)+c^2(b-a)$

11) $(b-a)(c-a)(c-b) = a(b^2-c^2)+b(c^2-a^2)+c(a^2-b^2)$

12) $(a+b+c+d)^2+(a+b-c-d)^2+(a+c-b-d)^2$
$+(a+d-b-c)^2 =$

13) $(-a+b+c+d)^2+(a-b+c+d)^2+(a+b-c+d)^2$
$+(a+b+c-d)^2 = 4(a^2+b^2+c^2+d^2)$.

14) $(a+b+c)^3-(b+c-a)^3-(c+a-b)^3-(a+b-c)^3$
$= 24\,abc$

15) $4a^2b^2c^2-(b^2+c^2-a^2)(c^2+a^2-b^2)(a^2+b^2-c^2)$
$$= a^2(b^2+c^2-a^2)+b^2(c^2+a^2-b^2)+c^2(a^2+b^2-c^2).$$

16) $(a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c)$
$$= 2(a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2)-(a^4+b^4+c^4).$$

17) $(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2 = 2[(a-b)(a-c)$
$$+(b-a)(b-c)+(c-a)(c-b)].$$

B. Binomialcoefficienten.

1) $\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\cdots(n+1-k)}{1.2.3\ldots k}$

2) $\binom{n}{k}+\binom{n}{k+1}=\binom{n+1}{k+1}$

3) $1-\binom{n}{1}+\binom{n}{2}-\cdots(-1)^k\binom{n}{k}=(-1)^k\binom{n-1}{k}$

4) $\binom{n}{k}=0 \quad n<k$

5) $\binom{n}{k}=\binom{n}{n-k}$

6) $\binom{k}{k}+\binom{k+1}{k}\cdots+\binom{n}{k}=\binom{n+1}{k+1}$

7) $\binom{n}{k}+\binom{n}{k-1}\binom{r}{1}+\binom{n}{k-2}\binom{r}{2}+\cdots\binom{r}{k}=\binom{n+r}{k}$

8) $\binom{n+1}{k}=\binom{n}{k}+\binom{n-1}{k-1}+\binom{n-2}{k-2}+\cdots$

9) $\binom{m+1}{m-p}=\binom{m}{p}+\binom{m-1}{p}+\binom{m-2}{p}+\cdots$

10) $\binom{m+n}{k+n}=\binom{m}{k}+\binom{m}{k+1}+\binom{m+1}{k+2}+\cdots+\binom{m+n-1}{k+n}$

11) $\binom{m+n}{k}=\binom{m}{k}+\binom{m}{k-1}+\binom{m+1}{k-1}+\cdots\binom{m+n-1}{k-1}$

12) $\binom{m+n}{r}=\binom{n}{0}\binom{m}{r}+\binom{n}{1}\binom{m}{r-1}\cdots\binom{n}{n}\binom{m}{r-n}$

13) $2^n=1+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\cdots\binom{n}{n}$

14) $0=1-\binom{n}{1}+\binom{n}{2}-\cdots(-1)^n\binom{n}{n}$

15) $\binom{2n}{n}=1+\binom{n}{1}^2+\binom{n}{2}^2+\cdots+\binom{n}{n}^2$

NB. 16) $\binom{n}{0} = 1; \binom{n}{1} = n; \binom{-n}{p} = (-1)^p \binom{n+p-1}{p}$

$$\binom{n}{\infty} = 0 \text{ für } -1 < n < \infty$$

§. 9.

Combinationslehre.

1) Die Anzahl aller möglichen **Permutationen** von n verschiedenen Elementen ist gegeben durch

$$P(n) = n!$$

Sind darunter $r, s, t, \ldots$ gleiche, so ist

$$P(n) = \frac{n!}{r!\, s!\, t! \ldots}$$

2) Die Anzahl der **einfachen Combinationen** von n verschiedenen Elementen zur $r$ten Classe ist:

$$C_n^r = C(n, r) = \binom{n}{r} = \frac{n(n-1)\ldots(n+1-r)}{1.2\ldots r}$$

Eine einfache Combination enthält jedes Element nur einmal.

Die Anzahl der Combinationen, in welchen sich die Elemente wiederholen, ist für die $r$te Classe:

$$C'^r_n = C[n, r] = \binom{n-1+r}{r} = \frac{n(n+1)\ldots(n-1+r)}{1.2\ldots r}$$

3) Die Anzahl der **einfachen Variationen** von n Elementen zur $r$ten Classe beträgt

$$V(n, r) = r! \binom{n}{r} = n(n-1)(n-2)\ldots(n-1+r).$$

Die Anzahl der **Wiederholungsvariationen** von n Elementen zur $r$ten Classe ist

$$V[n, r] = n^r.$$

§. 10.

Zerlegung in Partialbrüche.

1) Sei

$$\frac{f(x)}{F(x)} = \frac{f(x)}{\Pi(x-\alpha_\varkappa)} = \sum \frac{A_\varkappa}{x-\alpha_\varkappa},$$

so wird

$$f(\alpha_\varkappa) = A_\varkappa \frac{\Pi(\alpha_\varkappa - \alpha_\lambda)}{\alpha_\lambda - \alpha_\lambda}$$

$$A_\varkappa = \frac{f(\alpha_\varkappa)}{F'(\alpha_\varkappa)} \qquad F'(x) = \frac{d\,F(x)}{d\,x}$$

2) Sei n gerade und $n > m$, ferner

$$a_\varkappa = \frac{2\varkappa + 1}{n}\pi \qquad b_\varkappa = \frac{2\varkappa}{n}\pi,$$

so wird:

$$\frac{x^m}{x^n+1} = \frac{2}{n}\sum_0^{\frac{n}{2}-1} \frac{\cos m\,a_\varkappa - x\cos(m+1)\,a_\varkappa}{x^2 - 2x\cos a_\varkappa + 1}$$

$$\frac{x^m}{x^n-1} = \frac{1}{n(x-1)} + (-1)^{n+1}\frac{1}{n(x+1)}$$

$$+ \frac{2}{n}\sum_1^{\frac{n}{2}-1} \frac{x\cos(m+1)\,b_\varkappa - \cos m\,b_\varkappa}{x^2 - 2x\cos b_\varkappa + 1}$$

3) Sei n ungerade und $n > m$,

$$\frac{x^m}{x^n+1} = (-1)^n\frac{1}{n(1+x)} + \frac{2}{n}\sum_1^{\frac{1}{2}(n-1)} \frac{\cos m\,a_\varkappa - x\cos(m+1)\,a_\varkappa}{x^2 - 2x\cos a_\varkappa + 1}$$

$$\frac{x^m}{x^n-1} = \frac{1}{n(x-1)} + \frac{2}{n}\sum_1^{\frac{1}{2}(n-1)} \frac{x\cos(m+1)\,a_\varkappa - \cos m\,a_\varkappa}{x^2 - 2x\cos a_\varkappa + 1}$$

§. 11.

Zerlegung in Factoren.

1) $$x^n - a^n = (x^2 - a^2)\left(x^2 - 2\,a\,x\cos\frac{2\pi}{n} + a^2\right)\cdots \left(x^2 - 2\,a\,x\cos\frac{n-2}{n}\pi + a^2\right)$$

2) $$x^n + a^n = \left(x^2 - 2\,a\,x\cos\frac{\pi}{n} + a^2\right)\cdots \left(x^2 - 2\,a\,x\cos\frac{n-1}{n}\pi + a^2\right)$$

wenn n eine gerade Zahl.

3) $$x^n - a^n = (x - a)\left(x^2 - 2\,a\,x\cos\frac{2\pi}{n} + a^2\right)\cdots \left(x^2 - 2\,a\,x\cos\frac{n-1}{n}\pi + a^2\right)$$

4) $$x^n + a^n = (x + a)\left(x^2 - 2\,a\,x\cos\frac{\pi}{n} + a^2\right)\cdots \left(x^2 - 2\,a\,x\cos\frac{n-2}{n}\pi + a^2\right)$$

wenn n eine ungerade Zahl.

§. 12.

Arithmetische Progressionen.

Gegeben	Gesucht	Formel
$a\ \delta\ n$	l	$l = a + (n - 1)\delta$
$a\ \delta\ s$		$l = -\frac{\delta}{2} \pm \sqrt{2\delta s + \left(a - \frac{\delta}{2}\right)^2}$
$a\ n\ s$		$l = \frac{2s}{n} - a$
$\delta\ n\ s$		$l = \frac{s}{n} + \frac{n-1}{2}\delta$
$a\ \delta\ n$	s	$s = \frac{n}{2}\{2a + (n - 1)\delta\}$
$a\ \delta\ l$		$s = \frac{a + l}{2} + \frac{l^2 - a^2}{2\delta}$
$a\ n\ l$		$s = \frac{n}{2}(a + l)$
$\delta\ n\ l$		$s = \frac{n}{2}(2l - (n - 1)\delta)$
$a\ n\ l$	δ	$\delta = \frac{l - a}{n - 1}$
$a\ n\ s$		$\delta = \frac{2s - 2an}{n(n-1)}$
$a\ l\ s$		$\delta = \frac{l^2 - a^2}{2s - l - a}$
$a\ l\ s$		$\delta = \frac{2nl - 2s}{n(n-1)}$
$a\ \delta\ l$	n	$n = 1 + \frac{l - a}{\delta}$
$a\ \delta\ s$		$n = \frac{\delta - 2a}{2\delta} \pm \sqrt{\frac{2s}{\delta} + \frac{(2a - \delta)^2}{4\delta^2}}$
$a\ l\ s$		$n = \frac{2s}{a + l}$
$\delta\ l\ s$		$n = \frac{2l + \delta}{2\delta} \pm \sqrt{\left(\frac{2l + \delta}{2\delta}\right)^2 - \frac{2s}{\delta}}$
$\delta\ n\ l$	a	$a = l - (n - 1)\delta$
$\delta\ n\ s$		$a = \frac{s}{n} - \frac{n-1}{2}\delta$
$\delta\ l\ s$		$a = \frac{\delta}{2} \pm \sqrt{\left(l + \frac{\delta}{2}\right)^2 - 2\delta s}$
$n\ l\ s$		$a = \frac{2s}{n} - l$
		$l = a + (n - 1)\delta$
		$s = (a + l)\frac{n}{2}$

§. 13.

Geometrische Progressionen.

Gegeben	Gesucht	Formel
a e n		$l = a e^{n-1}$
a e s		$l = \frac{a + (e - 1) s}{e}$
a n s	*l*	$l (s - l)^{n-1} - a (s - a)^{n-1} = 0$
e n s		$l = \frac{(e - 1) s e^{n-1}}{e^n - 1}$
a e n		$s = a \frac{e^n - 1}{e - 1}$
a e l		$s = \frac{l e - a}{e - 1}$
a n l	*s*	$s = \left(l^{\frac{n}{n-1}} - a^{\frac{n}{n-1}}\right) : \left(l^{\frac{1}{n-1}} - a^{\frac{1}{n-1}}\right)$
e n l		$s = \frac{l (e^n - 1)}{(e - 1) e^{n-1}}$
e n l		$a = \frac{l}{e^{n-1}}$
e n s	*a*	$a = \frac{(e - 1)}{(e^n - 1)} s$
e l s		$a = l e - (e - 1) s$
n l s		$a (s - a)^{n-1} - l (s - l)^{n-1} = 0$
a n l		$e = \sqrt[n-1]{\frac{l}{a}}$
a n s	*e*	$e^n - \frac{s}{a} e + \frac{s - a}{a} = 0$
a l s		$e = (s - a) : (s - l)$
a l s		$e^n - \frac{s}{s - l} e^{n-1} + \frac{l}{s - l} = 0$
a e l		$n = \frac{\log l - \log a}{\log e} + 1$
a e s	*n*	$n = \frac{\log \{a + (e - 1) s\} - \log a}{\log e}$
a l s		$n = \frac{\log l - \log a}{\log (s - a) - \log (s - l)} + 1$
e l s		$n = \frac{\log l - \log (l e - (e - 1) s)}{\log e}$
		$l = a e^{n-1}$
		$s = a \frac{e^n - 1}{e - 1}.$

§. 14.

Einige, insbesondere höhere Progressionen.

1) Die Reihe

$$1p,\quad 2(p+1)\quad 3(p+2)\cdots$$

hat zum allgemeinen Glied

$$a_n = n(p+n-1),$$

und zum Summenglied

$$s_n = \tfrac{1}{6}n(n+1)(3p+2n-2).$$

2) Die Reihe

$$pq,\quad (p-1)(q-1),\quad (p-2)(q-2)\ldots$$

hat zum allgemeinen Glied

$$a_n = (p-n+1)(q-n+1),$$

und zum Summenglied

$$s_n = \tfrac{1}{6}n\{6pq-(n-1)(3p+3q-2n+1)\}$$

3) Für eine Reihe

$$a_1\, a_2\, a_3\, a_4 \ldots$$

ist

$$\left.\begin{array}{lr} \Delta a_1\, \Delta a_2\, \Delta a_3 \ldots & \text{die erste} \\ \Delta^2 a_1\, \Delta^2 a_2 \ldots & \text{„ zweite} \\ \Delta^3 a_1 \ldots & \text{„ dritte} \end{array}\right\} \text{Differenzreihe.}$$

Das allgemeine Glied ist gegeben durch:

$$a_n = a_1 + \binom{n-1}{1}\Delta a_1 + \binom{n-1}{2}\Delta^2 a_1 + \cdots \binom{n-1}{n-1}\Delta^{n-1} a_1$$

$$a_n = a_p - \binom{p-n}{1}\Delta a_p + \binom{p-n+1}{2}\Delta^2 a_p - \cdots$$

$$(-1)^m \binom{p+m-n-1}{m}\Delta^m a_p,\ n > p.$$

Das Summenglied ist gegeben durch:

$$s_n = n a_1 + \binom{n}{2}\Delta a_1 + \binom{n}{3}\Delta^2 a_1 + \binom{n}{4}\Delta^3 a_1 + \cdots$$

Man beachte, dass

$$\Delta^2 a_1 = a_3 - 2a_2 + a_1$$

$$\Delta^3 a_1 = a_4 - 3a_3 + 3a_2 - a_1$$

allgemein

$$\Delta^r a_1 = a_{r+1} - \binom{r}{1} a_r + \binom{r}{2} a_{r-1} \cdots + (-1)^r \binom{r}{r} a_1$$

und für

$$r > m$$
$$\Delta^r a_m = 0,$$

wenn die Progression von $m$ter Ordnung ist, d. h. wenn sie nur m Differenzenreihen besitzt.

§. 15.

Figurirte Zahlen.

Sei

I $\quad 1,\ 1+\delta,\ 1+2\delta,\ 1+3\delta,\ 1+4\delta,\ 1+5\delta\ldots$

Bilden wir die Summenglieder

II $\quad 1,\ 2+\delta,\ 3+3\delta,\ 4+6\delta,\ 5+10\delta,\ 6+15\delta\ldots$

III $\quad 1,\ 3+\delta,\ 6+4\delta,\ 10+10\delta,\ 15+20\delta,\ 21+35\delta\ldots$

So werden

II Polygonal-, III Polyedral- } Zahlen genannt.

Sei in

1) II $\delta = 1$ (Triagonalzahlen) 1, 3, 6, 10, 15 ...

2) $\delta = 2$ (Tetragonalzahlen) 1, 4, 9, 16, 25 ...

3) III $\delta = 1$ (Dreiseitige Pyramidalzahlen) 1, 4, 10, 20, 35...

4) $\delta = 4$ (Vierseitige Pyramidalzahlen) 1, 5, 14, 30, 55...

So wird

Reihe	Allgemeines Glied	Summenglied
1)	$\frac{n(n+1)}{1.2}$	$\frac{n(n+1)(n+2)}{1.2.3}$
2)	n^2	$\frac{n(n+1)(2n+1)}{1.2.3}$
3)	$\frac{n(n+1)(n+2)}{1.2.3}$	$\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{1.2.3.4}$
4)	$\frac{n(n+1)(2n+1)}{1.2.3}$	$\frac{n(n+1)^2(n+2)}{3.4}$

Ferner ist

$$\mathrm{S}\, n\, e^{n-1} = \frac{n\, e^n}{e-1} - \frac{e^n - 1}{(e-1)^2}$$

$$\mathrm{S}\, [\alpha + (n-1)\delta]\, a\, e^{n-1} = a \left\{ e \frac{e^n - 1}{e-1} + \delta\, e\, \mathrm{S}\, (n-1)\, e^{n-2} \right\}$$

$$\mathrm{S}\, \frac{n(n+1)}{1.2} e^{n-1} = \frac{n(n+1)}{1.2} \cdot \frac{e^n}{e-1} - \frac{n\, e^n}{(e-1)^2} + \frac{e^n - 1}{(e-1)^3}.$$

Ueber Progressionen und figurirte Zahlen vergleiche: Neun Abhandlungen über ebenso wichtige als interessante Gegenstände aus der Algebra und niederen Analysis, von Lefebure de Fourcy etc., Stuttgart 1844.

§. 16.

Convergenz-Kriterien.

$$\sum u_n = u_1 + u_2 + u_3 + \cdots$$

ist convergent, wenn

$$\lim \frac{u_{x+1}}{u_x} = \lim (u_x)^{\frac{1}{x}} < 1 \qquad \lim x = \infty$$

1) wenn es

$$\sum 2^{x-1} u_{2x-1} \text{ ist (Cauchy)}$$

$$\sum n\, u_{(x^n)} \text{ (Schlömilch)}$$

2) wenn

$$\lim x^r u_x = 0 \quad r > 1$$

$$\lim x \left\{ 1 - \frac{u_{x+1}}{u_x} \right\} > 1 \text{ (Raabe).}$$

3) Ist

$$\frac{u_{x+1}}{u_x} = \frac{1}{1+\alpha},$$

so muss

$$\lim x \alpha > 1 \text{ (Stern)}$$

4) Ist $\frac{u_{x+1}}{u_x} = \frac{n^x + a\, n^{x-t} + \cdots}{n^x + A\, n^{x-t} + \cdots}$,

so muss

$$A - a > 1 \text{ (Gauss).}$$

Eine Reihe ist $\left\{\begin{matrix}\text{con}\\ \text{di}\end{matrix}\right\}$vergent, je nachdem das erste, nicht verschwindende Glied der Reihe

$$V_0 = lim \left\{1 - \frac{u_{x+1}}{u_x}\right\}$$

$$V_1 = lim \left\{x - \frac{u_{x+1}}{u_x}(x+1)\right\}$$

$$V_2 = lim \left\{x \log x - \frac{u_{x+1}}{u_x}(x+1)\log(x+1)\right\}$$

. . . .

$$V_p = lim \left\{\prod_0^p x \log^\lambda x - \frac{u_{x+1}}{u_x}\prod_0^p (x+1)\log^\lambda (x+1)\right\}$$

$\left\{\begin{matrix}\text{positiv}\\ \text{negativ}\end{matrix}\right\}$ ist.

Zusatz zu §. 16.

Die Theorie der Reihen ist in der neueren Zeit besonders ausgebildet worden. Da sie zugleich die Grundlage der neueren Functionentheorie ist, so werden wir das Wichtigste in der dritten Lieferung mittheilen. Folgende Bemerkungen mögen genügen.

Bleibt die Function $F(z)$ innerhalb der Radien r und R um den Punkt c synektisch, so wird

$$F(z) = \sum_{-\infty}^{+\infty}{}^{x} A_x (z-c)^x$$

$$A_x = \frac{1}{2\pi\varrho^x}\int_0^{2\pi} F(c + \varrho e^{\varphi i}) e^{-x\varphi i} d\varphi$$

für jedes ϱ, für welches

$$r < \varrho < R.$$

Verlegt man den Anfangspunkt nach c, so wird

$$F(z) = \sum_{-\infty}^{+\infty}{}^{x} A_x z^x$$

$$A_x = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} F(e^{\varphi i}) e^{-x\varphi i} d\varphi.$$

Ebenso für zwei Variable

$$F(z, z') = \sum_{-\infty}^{+\infty}{}^{\varkappa,\lambda} A_{\varkappa,\lambda}\, z^{\varkappa} z'^{\lambda}$$

$$A_{\varkappa,\lambda} = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} F(e^{i\varphi}, e^{i\varphi'})\, e^{-(\varkappa\varphi+\lambda\varphi')i}\, d\varphi\, d\varphi'.$$

Lassen sich die Integrationen nicht ausführen, so bedient man sich der mechanischen Quadraturen, deren Wesen im Folgenden besteht. Sei

$$z = e^{\varphi i}, \quad \varphi = \lambda\, \frac{2\pi}{\varkappa},$$

so wird z eine Wurzel von $\zeta^{\varkappa} = 1$ und wir erhalten

$$\frac{1}{\varkappa} \sum F(\zeta)\zeta^{-n} = A_n + A_{n+\varkappa} + A_{n+2\varkappa} + \cdots$$
$$+ A_{n-\varkappa} + A_{n-2\varkappa} + \cdots$$

oder

$$A_n = \frac{1}{\varkappa} \sum F(\zeta)\zeta^{-n} - \sigma$$

$$\sigma = \sum_{1}^{\infty}{}^{j} (A_{n-j\varkappa} + A_{n+j\varkappa}).$$

Man erhält also A_n, indem man das arithmetische Mittel von

$$F(e^{\varphi i})\, e^{-n\varphi i}$$

für

$$\varphi = 0,\quad 1\cdot\frac{2\pi}{\varkappa},\quad 2\cdot\frac{2\pi}{\varkappa}, \ldots \quad (\varkappa - 1)\cdot\frac{2\pi}{\varkappa}$$

für hinreichend grosses $\varkappa$ nimmt.

In Bezug auf die Gültigkeitsgrenzen merke man:

Sei $\quad f(x) \quad$ für $\quad x = x_0, x_1, x_2, \ldots x_{\varkappa}$

discontinuirlich, so gilt, wenn

$$\mathrm{mod}\, x_0 > \mathrm{mod}\, x_1 > \ldots > \mathrm{mod}\, x_{\varkappa}$$

angenommen wird, die Entwickelung

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1}\, x + \frac{f''(0)}{1.2}\, x^2 + \cdots$$

so lange, so lange

$$\mathrm{mod}\, x < \mathrm{mod}\, x_{\varkappa},$$

wobei x allgemein complex angenommen wurde.

Bleiben die Glieder der Reihe

$$U = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots$$

stets positiv, und ist

$$u_0 > u_1 > u_2 > \cdots$$

ferner

$$\int_0^\infty u_n \, d n$$

endlich, so convergirt die Reihe U.

Wir geben hier noch die Definitionen einiger Begriffe, die sich hier am besten anschliessen. (Weierstrass, Abhandlungen aus der Functionentheorie, S. 69. Vergleiche auch: Biermann, Theorie der analyt. Functionen.)

„Es seien unendlich viele rationale Functionen einer Veränderlichen x in bestimmter Aufeinanderfolge gegeben

$$f_0(x), f_1(x), f_2(x), \ldots$$

Die Gesammtheit derjenigen Werthe von x, für welche die Reihe

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} f_\nu(x)$$

einen endlichen Werth hat, nennt man den Convergenzbereich dieser Reihe.

Eine unendliche Reihe

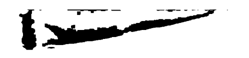
$$\sum_{\nu=0}^{\infty} f_\nu,$$

deren Glieder Functionen beliebig vieler Veränderlichen sind, convergirt in einem gegebenen Theile B ihres Convergenzbereiches gleichmässig, wenn sich nach Annahme einer beliebig kleinen positiven Grösse δ stets eine ganze Zahl m so bestimmen lässt, dass der absolute Betrag der Summe

$$\sum_{\nu=n}^{\infty} f_\nu$$

für jeden Werth von n, der $\geqq m$ ist und für jedes dem Bereiche B angehörige Werthsystem kleiner als δ ist.

Soll die Reihe in demselben Bereiche zugleich unbedingt convergent sein, d. h. bei jeder Anordnung ihrer Glieder denselben Werth haben, so muss es, wie man auch δ annehmen möge, stets möglich sein, aus der Reihe eine endliche Anzahl von Gliedern so auszusondern, dass die Summe von beliebig



vielen der übrigbleibenden für jedes der betrachteten Werthsysteme der Veränderlichen kleiner als δ ist.“

Ueber Reihen, die je nach der Anordnung der Glieder verschiedene Summen besitzen, vergl. Schlömilch, Uebungsbuch II, §. 23; Weierstrass 212, V, VI, VII.

§. 17.
Die allgemeinen Reihentheoreme.

1) (Taylor)

$$f(x+h)=f(x)+f'(x)\frac{h}{1!}+f''(x)\frac{h^2}{2!}+\cdots+f^{(n)}(x)\frac{h^n}{n!}+R_{n+1}$$

$$R_{n+1}=\frac{1}{n!}\int\limits_x^{x+h}(x+h-y)^n f^{(n)}(y)\,dy$$

$$=(n+1)(1-\theta)^n f^{(n+1)}(x+\theta h)\frac{h^{n+1}}{(n+1)!}\quad 0<\theta<1$$

$$=f^{(n+1)}(x+\theta h)\frac{h^{n+1}}{(n+1)!}$$

2) (Maclaurin)

$$f(x)=f(a)+f'(a)\frac{x-a}{1!}+f''(a)\frac{(x-a)^2}{2!}+\cdots$$
$$+f^{(n)}(a)\frac{(x-a)^n}{n!}+R_{n+1}$$

$$R_{n+1}=\frac{1}{n!}\int\limits_a^x(x-y)^n f^{(n)}(y)\,dy$$

$$=(n+1)(1-\theta)^n f^{(n+1)}\{a+\theta(x-a)\}\frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}$$

$$=f^{(n+1)}\{a+\theta(x-a)\}\frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}$$

3) Speciell für $a=0$

$$f(x)=f(0)+f'(0)\frac{x^1}{1!}+f''(0)\frac{x^2}{2!}+\cdots f^{(n)}(0)\frac{x^n}{n!}+R_{n+1}$$

$$R_{n+1}=\frac{1}{n!}\int\limits_0^x(x-y)^n f^{(n)}(y)\,dy$$

$$=f^{(n+1)}(\theta x)\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$$

4) $$f(x) = f(\alpha) + \left\{ f'(x) \frac{x-\alpha}{\varphi(x)} \right\}_{x=\alpha} \varphi(x) + \frac{1}{2!} \left\{ f'(x) \left[\frac{x-\alpha}{\varphi(x)} \right]^2 \right\}_{x=\alpha} \varphi(x)^2 + \cdots$$

Die Reihe von **Bürmann**: **Hindeburg's** Archiv II, S. 499 (1798).

5) Ist
$$x = a + \varphi(x),$$
so ist
$$x = a + \varphi(a) + \tfrac{1}{2} \left[\frac{\partial}{\partial x} \varphi(x)^2 \right]_{x=a} + \tfrac{1}{3!} \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} \varphi(x)^3 \right]_{x=a} + \cdots$$
Reihe von **Lagrange**.

§. 18.

Allgemeine Reihen.

1) $$e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots$$

2) $$a^x = 1 + \frac{x \log a}{1} + \frac{(x \log a)^2}{2!} + \cdots \frac{(x \log a)^n}{n!} + \cdots$$
x und a beliebig

3) $$\log(1+x) = x - \tfrac{1}{2} x^2 + \tfrac{1}{3} x^3 - \cdots (-1)^n \frac{x^n}{n} + \cdots \quad 1 \geqq x > -1$$

4) $$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots (-1)^n \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \cdots$$

5) $$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots (-1)^n \frac{x^{2n}}{2n!} + \cdots$$
x beliebig.

6) $$\operatorname{tgn} x = x + \frac{1}{3} x^3 + \frac{2}{15} x^5 + \frac{17}{315} x^7 + \frac{62}{2835} x^9 + \frac{1382}{155\,925} x^{11} + \cdots$$
$$2^{2n}(2^2 - 1) \frac{B_{2n-1}}{(2n)!} x^{2n-1} + \cdots \quad \pi > x > -\pi$$

7) $$\operatorname{cotgn} x = \frac{1}{x} - \frac{1}{3} x - \frac{1}{45} x^3 - \frac{2}{945} x^5 - \frac{1}{4725} x^7 - \frac{2}{93\,555} x^9 - \cdots$$
$$B_{2n-1} \frac{(2x)^{2n}}{(2n)!} - \cdots \quad \pi > x > -\pi$$

8) $$\sec x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{5x^4}{4!} + \frac{61}{6!} x^6 + \cdots + \frac{x^{2\varkappa}}{(2\varkappa)!} B_{2\varkappa} x^{2\varkappa} + \cdots \quad x < \frac{\pi}{2}$$



9) $$cosec\, x = \frac{1}{x} + \frac{x}{3!} + \frac{7x^3}{3.5!} + \frac{29x^5}{3.7!} + \cdots$$
$$+ \frac{2(2^{2\varkappa+1}-1)}{(2\varkappa+2)!} B_{2\varkappa+1} x^{2\varkappa+1} + \cdots \quad 0 < x < \pi$$

10) $$arc\sin x = x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{40}x^5 + \frac{5}{112}x^7 + \frac{35}{1152}x^9 + \frac{63}{2816}x^{11} + \cdots$$
$$\frac{1.3.5\ldots 2n-1}{2.4.6\ldots 2n} \cdot \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \cdots \quad x^2 < 1.$$

NB. $arc\sin x = \frac{\pi}{2} - arc\cos x.$

11) $$arctgn\, x = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \cdots (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \cdots x^2 \lesseqgtr 1$$
$$= \frac{\pi}{2} - \frac{1}{x} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{x^3} - \cdots (-1)^n \frac{1}{2n+1} \cdot \frac{1}{x^{2n+1}} \quad x^2 \geqq 1$$

NB. $arc\,tgn\, x = \frac{\pi}{2} - arc\,cotgn\, x.$

$arc\,tgn\, x = \frac{\pi}{2} - arc\,tgn\, \frac{1}{x}.$

12) Man beachte, dass, wenn
$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots$$
ist, und $f(x) = z$ gesetzt wird, so dass $x = \varphi(z)$ resultirt, dass dann
$$z = a_0 + a_1 \varphi(z) + a_2 \varphi(z)^2 + \cdots$$
wird. So folgt beispielsweise aus
$$arc\sin x = x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{40}x^5 + \cdots$$
$$z = (\sin z) + \frac{1}{6}(\sin z)^3 + \frac{3}{40}(\sin z)^5 + \cdots$$

Auf diese Weise ergeben sich die inversen Reihenentwickelungen.

§. 19.

Reihen mit Bernoulli's Zahlen.

1) $$B_{2n} - \frac{2n(2n-1)}{1.2} B_{2n-2} + \frac{2n(2n-1)(2n-2)(2n-3)}{1.2.3.4} B_{2n-4} + \cdots (-1)^n = 0.$$

2) $$\frac{2^{2n}(2^{2n}-1)}{2n} B_{2n-1} = (2n-1) B_{2n-2} - \frac{(2n-1)(2n-2)(2n-3)}{1.2.3} B_{2n-4} + \cdots (-1)^{n-1} = 0.$$

$$B_1 = \frac{1}{6},\ B_3 = \frac{1}{30},\ B_5 = \frac{1}{42},\ B_7 = \frac{1}{30},\ B_9 = \frac{5}{66},\ B_{11} = \frac{691}{2730},$$

$$B_2 = 1,\ B_4 = 5,\ B_6 = 61,\ B_8 = 1385,\ B_{10} = 50521, B_{12} = 2702765,$$

3) $$1 + \frac{1}{2^{2x}} + \frac{1}{3^{2x}} + \cdots = \frac{2^{2x-1}}{(2x)!} \pi^{2x} B_{2x-1}$$

4) $$1 + \frac{1}{3^{2n}} + \frac{1}{5^{2n}} + \cdots = \frac{\pi^{2n}}{2} \frac{2^{2n}-1}{(2n)!} B_{2n-1}$$

5) $$1 - \frac{1}{2^{2n}} + \frac{1}{3^{2n}} - \cdots = \frac{2^{2n}-1}{(2n)!} \pi^{2n} B_{2n-1}$$

6) $$1 - \frac{1}{3^{2n}} + \frac{1}{5^{2n}} - \cdots = \frac{\pi^{2n+1}}{(2n)!} \cdot \frac{B_{2n}}{2^{2n+2}}.$$

7) Sei

$$\sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{1}{n^x} = \varphi(x),$$

so wird

$$\varphi(2) = \frac{\pi^2}{6}\ \varphi(3) = \frac{\pi^3}{25,7946\ldots},\ \ \varphi(4) = \frac{\pi^4}{90},\ \ \varphi(5) = \frac{\pi^5}{295,1215\ldots}$$

$$\varphi(6) = \frac{\pi^6}{945}\ \ \varphi(7) = \frac{\pi^7}{2295,286\ldots}\ \ \varphi(8) = \frac{\pi^8}{9450}$$

8) $$S \frac{1}{x^m} = -\frac{1}{(m-1)x^{m-1}} + \frac{1}{2x^m} - \frac{mB_1}{2x^{m+1}} - \frac{m(m+1)(m+2)B_3}{2.3.4\,x^{m+3}} + \cdots + \varphi(m).$$



Vergleiche: Schlömilch, Comp. II, p. 211 et ssq. besonders für die Reihe:

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots\frac{1}{x}=0{,}5772156649\cdots+\log x+\frac{1}{2x}-\frac{B_1}{2x^2}+\frac{B_3}{4x^4}-\cdots$$

Viele hierher gehörige Summen und Reihen findet man bei Euler, Einleitung in die Analysis des Unendl. I. Bd. Deutsch von H. Maser, Grunert's Archiv I, III. Crelle, Journ. IV, 26.

§. 20.

Logarithmische und Exponential-Reihen.

1) $\log x=(x-1)-\frac{1}{2}(x-1)^2+\frac{1}{3}(x-1)^3-\cdots \quad 2\geqq x\geqq 0$

2) $\log x=\frac{x-1}{x}+\frac{1}{2}\left(\frac{x-1}{x}\right)^2+\frac{1}{3}\left(\frac{x-1}{x}\right)^3+\cdots \quad x>\frac{1}{2}$

3) $\log(x+h)=\log x+2\left\{\frac{h}{2x+h}+\frac{1}{3}\left(\frac{h}{2x+h}\right)^3+\cdots\frac{1}{2n+1}\left(\frac{h}{2x+h}\right)^{2n+1}+\cdots\right.$

$x>0$, wenn $h>0$; $x>h$, wenn $h<0$,

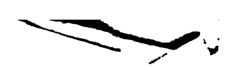
4) $\log\frac{1+x}{1-x}=2\left\{x+\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{5}x^5+\cdots\frac{1}{2n+1}x^{2n+1}+\cdots\right\}x^2<1$

5) $\log\frac{x+1}{x-1}=2\left\{\frac{1}{x}+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{x}\right)^3+\frac{1}{5}\left(\frac{1}{x}\right)^5+\cdots\frac{1}{2n+1}\left(\frac{1}{x}\right)^{2n+1}+\cdots\right\} \quad x^2>1$

6) $\log x=2\left\{\left(\frac{x-1}{x+1}\right)+\frac{1}{3}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^3+\frac{1}{5}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^5+\cdots\right\} \quad x>0$

7) $\log x=\frac{1}{2}\log(x+h)+\frac{1}{2}\log(x-h)$

$$+\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{h}{x}\right)^2+\frac{1}{2}\left(\frac{h}{x}\right)^4+\frac{1}{3}\left(\frac{h}{x}\right)^6+\cdots+\frac{1}{n}\left(\frac{h}{x}\right)^{2n}+\cdots\right\}x>h$$



8) $$\log x = \frac{1}{2}\log(x+h) + \frac{1}{2}\log(x-h) + \left\{\frac{h^2}{2x^2-h^2} + \frac{1}{3}\left(\frac{h^2}{2x^2-h^2}\right)^3 + \cdots + \frac{1}{2n+1}\left(\frac{h^2}{2x^2-h^2}\right)^{2n+1} + \cdots\right\} \quad x > h$$

9) $$\log(x+2) = 2\log(x+1) + \log(x-2) - 2\log(x-1) + 2\left\{\frac{2}{x^3-3x} + \frac{1}{3}\left(\frac{2}{x^3-3x}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{2}{x^3-3x}\right)^5 + \cdots\right. \quad x \text{ sehr gross.}$$

Reihe von Borda.

10) $$\log\sin x = \log x - \left\{2\cdot\frac{B_1}{2!}x^2 + \frac{1}{2}2^3\frac{B^3}{4!}x^4 + \cdots + \frac{1}{n}2^{2n-1}\frac{B_{2n-1}}{(2n)!}x^{2n} + \cdots\right.$$

$$= \log x - \left\{\frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{180}x^4 + \frac{1}{2835}x^6 + \frac{1}{37800}x^8 + \frac{1}{467775}x^{10} + \cdots \quad \pi > x > -\pi\right.$$

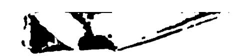
11) $$\log\cos x = -\left\{(2^2-1)2\frac{B_1}{2!}x^2 + \cdots + \frac{1}{n}(2^{2n}-1)2^{2n-1}\frac{B_{2n-1}}{(2n)!}x^{2n} + \cdots\right.$$

$$= -\left\{\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{12}x^4 + \frac{1}{45}x^6 + \frac{17}{2520}x^8 + \frac{31}{14175}x^{10} + \cdots \quad \frac{\pi}{2} > x > -\frac{\pi}{2}\right.$$

$$= -\frac{1}{2}\left\{\sin^2 x + \frac{1}{2}\sin^4 x + \frac{1}{3}\sin^6 x + \cdots + \frac{1}{n}\sin^{2n} x + \cdots \quad \frac{\pi}{2} > x > -\frac{\pi}{2}\right.$$

12) $$\log tgn\, x = \log x + \left\{(2-1)2^2\frac{B_1}{2!}x^2 + \cdots \frac{1}{n}(2^{2n-1}-1)2^{2n}\frac{B_{2n-1}}{(2n)!}x^{2n} + \cdots\right\}$$

$$= \log x + \frac{1}{3}x^2 + \frac{7}{90}x^4 + \frac{62}{2835}x^6 + \frac{127}{18900}x^8 + \frac{146}{66825}x^{10} + \cdots \quad \frac{\pi}{2} > x - \frac{\pi}{2}$$



13) $e^{e^x} = e\left(1 + x + \frac{2}{2!} x^2 + \frac{5}{3!} x^3 + \frac{15}{4!} x^4 + \cdots\right.$

14) $e^{\sin x} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} - \frac{3x^4}{4!} - \frac{8x^5}{5!} + \frac{3x^6}{6!} + \cdots$

15) $e^{\cos x} = e\left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{4x^4}{4!} - \frac{31x^6}{6!} + \cdots\right.$

16) $e^{tg\, x} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{3x^3}{3!} + \frac{9x^4}{4!} + \cdots$

17) $e^{arc\sin x} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{2x^3}{3!} + \frac{5x^4}{4!} + \cdots$

18) $e^{arctg\, x} = 1 + x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} - \frac{7x^4}{24} - \cdots$

19) $\log\frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x} = x + \frac{3}{2}x^2 + \frac{4.5}{2.3}x^3 + \frac{5.6.7}{2.3.6}x^4 + \cdots$

20) $\frac{\log(1+x)}{1+x} = \frac{1}{1}x - \left(1+\frac{1}{2}\right)x^2 + \left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)x^3 - \cdots$

21) $\log\frac{\sin x}{x} = -\frac{x^2}{6} - \frac{x^4}{180} - \frac{x^6}{2835} - \cdots$

22) $\frac{e^x + e^{-x}}{2}\cos x = 1 - \frac{2^2}{4!}x^4 + \frac{2^4}{8!}x^8 - \cdots$

23) $\frac{e^x - e^{-x}}{2}\sin x = 2^2\frac{x^2}{2!} - 2^4\frac{x^6}{6!} + 2^6\frac{x^{10}}{10!} - \cdots$

24) $\frac{x}{e^x-1} = 1 - \frac{x}{2} + \frac{1}{6}\frac{x^2}{2!} - \frac{1}{30}\frac{x^4}{4!} + \frac{1}{42}\frac{x^6}{6!} - \frac{1}{30}\frac{x^8}{8!} + \cdots$

§ 21.

Arcus Sinus-Reihen.

1) $[arc\sin x]^2 = x^2 + \frac{2}{3}\frac{x^4}{4} + \frac{2.4}{3.5}\frac{x^6}{3} + \frac{2.4.6}{3.5.7}\frac{x^8}{4} + \cdots$

2) $[arc\sin x]^3 = x^3 + \frac{3!}{5!}3^2\left(1+\frac{1}{3^2}\right)x^5$

$+ \frac{3!}{7!}3^2.5^2.\left(1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}\right)x^7 + \cdots$

3) $\sqrt{1-x^2}\,arc\sin x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{2}{3.5}x^5 - \frac{2.4}{3.5.7}x^7 + \cdots$

4) $\frac{arc\sin x}{\sqrt{1-x^2}} = x + \frac{2}{3}x^3 + \frac{2.4}{3.5}x^5 + \frac{2.4.6}{3.5.7}x^7 + \cdots$

Für 1) bis 4) $x^2 < 1$.

§. 22.

Sinus-Reihen.

1) $\sin\varphi + \sin 2\varphi + \cdots \sin n\varphi = \left\{\sin\frac{n\varphi}{2}\sin\frac{n+1}{2}\varphi\right\} : \sin\frac{\varphi}{2}$

2) $\sin\varphi + \sin 3\varphi + \cdots \sin(2n-1)\varphi = \sin^2 n\varphi : \sin\varphi$

3) $x^2 = \sin^2 x + \frac{2}{3}\cdot\frac{\sin^4 x}{2^4} + \frac{2.4}{3.5}\frac{\sin^6 x}{3^6} + \cdots$

4) $x\cos x = \sin x - \frac{1}{3}\sin^3 x - \frac{1.2}{3.5}\sin^5 x - \cdots \quad -\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{4}$

5) $\log(1+x) = \sin x - \frac{1}{2}\sin^2 x + \frac{1}{2}\sin^3 x - \frac{5}{12}\sin^4 x + \cdots$

6) $\frac{x}{tg\,x} = 1 - \frac{1}{3}\sin^2 x - \frac{2}{3.5}\sin^4 x - \frac{2.4}{3.5.7}\sin^6 x - \cdots$

7) $\frac{\pi}{2} - \frac{\varphi}{2} = \sin\varphi + \frac{1}{2}\sin 2\varphi + \frac{1}{3}\sin^3\varphi + \cdots \quad 0 < \varphi < 2\pi$

8) $\frac{\varphi}{2} = \sin\varphi - \frac{1}{2}\sin 2\varphi + \frac{1}{3}\sin 3\varphi - \cdots \quad -\pi < \varphi < \pi$

9) $\frac{\pi}{4} = \sin\varphi + \frac{1}{3}\sin 3\varphi + \frac{1}{5}\sin 5\varphi + \cdots \quad \pi > \varphi > 0$

10) $\frac{\pi}{4}\varphi = \sin\varphi - \frac{1}{3^2}\sin 3\varphi + \frac{1}{5^2}\sin 5\varphi - \cdots \quad \pi \geqq \varphi \geqq -\pi$

11) $\frac{\pi}{4}\cos\varphi = \frac{2}{1.3}\sin 2\varphi + \frac{4}{3.5}\sin 4\varphi$

$+ \frac{6}{5.7}\sin 6\varphi + \cdots \quad 0 < \varphi < \pi$

12) $\frac{\pi}{2}\frac{\sin a\varphi}{\sin a\pi} = \frac{\sin\varphi}{1^2 - a^2} - \frac{2\sin 2\varphi}{2^2 - a^2} + \cdots \quad -\pi < \varphi < \pi$

13) $\frac{\pi}{2}\frac{e^{a\varphi} - e^{-a\varphi}}{e^{a\pi} - e^{-a\pi}} = \frac{\sin\varphi}{1^2 + a^2} - \frac{2\sin 2\varphi}{2^2 + a^2} + \cdots \quad -\pi < \varphi < \pi$

14) $$\frac{x \sin \varphi}{1 - 2x \cos \varphi + x^2} = x \sin \varphi + x^2 \sin 2\varphi + x^3 \sin 3\varphi + \cdots \quad x^2 < 1$$

15) $$\operatorname{arctg} \frac{x \sin \varphi}{1 - x \cos \varphi} = x \sin \varphi + \frac{x^2}{2} \sin 2\varphi + \frac{x^3}{3} \sin 3\varphi + \cdots \quad x^2 < 1$$

16) $$\frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{2x \sin \varphi}{1 - x^2} = x \sin \varphi + \frac{x^3}{3} \sin 3\varphi + \frac{x^5}{5} \sin 5\varphi + \cdots \quad x^2 < 1$$

17) $$\sin^2 x + \sin^2 2x + \cdots \sin^2 nx = \frac{n}{2} - \frac{\cos(n+1)x \sin nx}{2 \sin x}.$$

Zusatz zu §. 22 ff.

Es ist vielleicht rathsam, auf einige divergente Reihen aufmerksam zu machen.

Setzt man in der für $x^2 < 1$ geltenden Entwickelung

$$\frac{1}{1 \mp x} = 1 \pm x + x^2 \pm x^3 + \cdots$$

$x = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$, so werden, so lange

$$\operatorname{mod} x < 1,$$

also so lange

$$r^2 < 1,$$

auch die daraus hervorgehenden Reihen

$$\frac{r \sin \varphi}{1 \mp 2r \cos \varphi + r^2} = r \sin \varphi \pm r^2 \sin 2\varphi + \cdots$$

$$\frac{1 \mp r \cos \varphi}{1 \mp 2r \cos \varphi + r^2} = 1 \pm r \cos \varphi + r^2 \cos 2\varphi \pm \cdots$$

gelten, nicht aber für $r = 1$, demnach sind die Reihen

$$1 \pm \cos \varphi + \cos 2\varphi \pm \cos 3\varphi + \cdots$$

und

$$\sin \varphi \pm \sin 2\varphi + \sin 3\varphi \pm \cdots$$

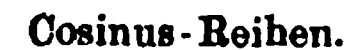
divergent.

Wie man andere, hier nicht vorkommende endliche Summen bilden kann, liegt an der Hand. So z. B. aus

$$2 \cos^2 x = 1 + \cos 2x$$

wird

$$2 \sum_1^n {}^{\varkappa} \cos^2 \varkappa x = n + \sum_1^n {}^{\varkappa} \cos 2 \varkappa x.$$



Nun ist aber §. 23, Formel 1), $\sum cos\, 2\varkappa x$ gegeben, also haben wir

$$2\sum cos^2 \varkappa x = n + \frac{cos\, n x\, sin\,(n+1)x}{sin\, x}.$$

§. 23.

Cosinus-Reihen.

1) $1 + cos\,\varphi + cos\,2\varphi + \cdots cos\, n\varphi = \left(cos\frac{n\varphi}{2}\, sin\frac{n+1}{2}\varphi\right) : sin\frac{\varphi}{2}$

2) $log\, cos\frac{\varphi}{2} = -log\, 2 + cos\,\varphi - \frac{1}{2}cos\,2\varphi$
$+ \frac{1}{3}cos\,3\varphi - \cdots \quad 0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$

3) $log\, sin\frac{\varphi}{2} = -log\, 2 - cos\,\varphi - \frac{1}{2}cos\,2\varphi$
$- \frac{1}{3}cos\,3\varphi - \cdots \quad 0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$

4) $\frac{\pi}{4}\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) = cos\,\varphi + \frac{1}{3^2}cos\,3\varphi + \frac{1}{5^2}cos\,5\varphi + \cdots \quad 0 \leqq \varphi \leqq \pi$

5) $\frac{\pi}{4}\, sin\,\varphi = \frac{1}{2} - \frac{cos\,2\varphi}{1.3} - \frac{cos\,4\varphi}{3.5} - \frac{cos\,6\varphi}{5.7} - \cdots \quad 0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$

6) $\frac{\pi}{2}\frac{e^{a\varphi} + e^{-a\varphi}}{e^{a\pi} - e^{-a\pi}} = \frac{1}{2a} - \frac{a\, cos\,\varphi}{1^2 + a^2} + \frac{a\, cos\,2\varphi}{2^2 + a^2} - \cdots \quad -\pi \leqq \varphi \leqq \pi$

7) $\frac{\pi}{2}\frac{cos\, a\varphi}{sin\, a\pi} = \frac{1}{2a} + \frac{a\, cos\,\varphi}{1^2 - a^2} - \frac{a\, cos\,2\varphi}{2^2 - a^2}$
$+ \frac{a\, cos\,3\varphi}{3^2 - a^2} - \cdots \quad -\pi \leqq \varphi \leqq \pi$

8) $\frac{1 - x\, cos\,\varphi}{1 - 2x\, cos\,\varphi + x^2} = 1 + x\, cos\,\varphi + x^2 cos\,2\varphi$
$+ x^3 cos\,3\varphi + \cdots \quad x^2 < 1$

9) $-log\sqrt{1 - 2x\, cos\,\varphi + x^2} = x\, cos\,\varphi + \frac{1}{2}x^2 cos\,2\varphi$
$+ \frac{1}{3}x^3 cos\,3\varphi + \cdots \quad x^2 < 1.$

§. 24.

Einige oft gebrauchte Reihen.

1) $tgn\, y = \frac{a \sin x}{1 - a \cos x} \qquad y = a \sin x + \frac{1}{2} a^2 \sin 2x + \frac{2}{3} a^3 \sin 3x + \cdots$

2) $tgn\, y = n\, tgn\, x \qquad y = x + \frac{n-1}{n+1} \sin 2x + \frac{1}{2}\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^2 \sin 4x + \cdots$

3) $\cos y = \cos x + b \qquad y = x - \frac{b}{\sin x} - \frac{1}{2} cotgn\, x \left(\frac{b}{\sin x}\right)^2 - \cdots$

4) $\sin y = \sin x + b \qquad y = x + \frac{b}{\cos x} + \frac{1}{2} tgn x \left(\frac{b}{\cos x}\right)^2 + \cdots$

5) $\frac{1}{x} - 2 \, cotg\, 2x = tgn\, x + \frac{1}{2} tgn \frac{x}{2} + \frac{1}{4} tgn \frac{x}{4} + \cdots$

Ueber Sinus und verwandte Reihen s. J. Fourier, Analyt. Theorie der Wärme, übersetzt von B. Weinstein, Berlin 1884. (Theorie und Literatur.)

Vergl. auch Schlömilch, Compendium II, Braunschweig 1879.



§. 25.

Binomial-Reihen.

1) $(a+b)^n = n!\left\{\frac{a^n}{n!}+\frac{a^{n-1}b}{(n-1)!\,1!}+\cdots\ \frac{a^{n-\varkappa}b^\varkappa}{(n-\varkappa)!\,\varkappa!}+\cdots\right\}$

2) $(a+b)^n = a^n+\binom{n}{1}a^{n-1}b+\cdots+\binom{n}{\varkappa}a^{n-\varkappa}b^\varkappa+\cdots\ +b^n$

3) $(1+x)^n = 1+\binom{n}{1}x+\binom{n}{2}x^2+\cdots+\binom{n}{\varkappa}x^\varkappa+\cdots\quad x^2<1$

4) $(1-x)^n = 1-\binom{n}{1}x+\binom{n}{2}x^2+\cdots(1-)^\varkappa\binom{n}{\varkappa}x^\varkappa\cdots\ x^2<1$

5) $(1+x)^{-n} = 1-\binom{n}{1}x+\binom{n+1}{2}x^2-\cdots$

$+(-1)^\varkappa\binom{n+\varkappa-1}{\varkappa}x^\varkappa+\cdots\quad x^2<1$

6) $(1-x)^{-n} = 1+\binom{n}{1}x+\binom{n+1}{2}x^2+\cdots$

$+\binom{n+\varkappa-1}{\varkappa}x^\varkappa+\cdots\quad x^2<1$

7) $(1+x)^{-n} = 1-\binom{n}{1}\frac{x}{1+x}+\binom{n}{2}\left(\frac{x}{1+x}\right)^2+\cdots$

$(-1)^\varkappa\binom{n}{\varkappa}\left(\frac{x}{1+x}\right)^\varkappa+\cdots\qquad x>-\frac{1}{2}$

8) $(1+x)^{\frac{n}{m}}=1+\frac{n}{m}x-\frac{n(m-n)}{1.2.m^2}x^2+\frac{n(m-n)(2m-n)}{1.2.3.m^3}x^3-\cdots$

$+(-1)^{\varkappa+1}\frac{n(m-n)\ldots[(\varkappa-1)m-n]}{1.2.3\ldots\varkappa.m^\varkappa}x^\varkappa+\cdots\quad x^2<1$

9) $(1-x)^{\frac{n}{m}}=1-\frac{n}{m}x-\frac{n(m-n)}{1.2.m^2}x^2-\frac{n(m-n)(2m-n)}{1.2.3.m^3}x^3-\cdots$

$-\frac{n(m-n)\ldots[(\varkappa-1)m-n]}{1.2.3\ldots\varkappa.m^\varkappa}x^\varkappa+\cdots\quad x^2<1$

$$10)\quad \sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1.1}{2.4}x^2 + \frac{1.1.3}{2.4.6}x^3 - \frac{1.1.3.5}{2.4.6.8}x^4 + \cdots$$
$$-(-1)^{\varkappa}\frac{1.1.3.5\ldots(2\varkappa-3)}{2.4.6\ldots(2\varkappa)}x^{\varkappa} + \cdots \quad x^2 < 1$$
$$= 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 - \frac{5}{128}x^4$$
$$+ \frac{7}{256}x^5 - \frac{21}{1024}x^6 + \cdots$$

$$11)\quad \frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{1.3}{2.4}x^2 - \frac{1.3.5}{2.4.6}x^3 + \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}x^4 - \cdots$$
$$+(-1)^{\varkappa}\frac{1.3.5\ldots(2\varkappa-1)}{2.4.6\ldots(2\varkappa)}x^{\varkappa}\ldots \quad x^2 < 1$$
$$= 1 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 - \frac{5}{16}x^3 + \frac{35}{128}x^4 - \frac{63}{256}x^5$$
$$+ \frac{231}{1024}x^6 - \cdots$$

$$12)\quad \sqrt[3]{1+x} = 1 + \frac{1}{3}x - \frac{1.2}{3.6}x^2 + \frac{1.2.5}{3.6.9}x^3 - \frac{1.2.5.8}{3.6.9.12}x^4 + \cdots$$
$$+(-1)^{\varkappa+1}\frac{1.2.5.8\ldots(3\varkappa-4)}{3.6.9.12\ldots(3\varkappa)}x^{\varkappa} + \cdots \quad x^2 < 1$$
$$= 1 + \frac{1}{3}x - \frac{1}{9}x^2 + \frac{5}{81}x^3 - \frac{10}{243}x^4 + \frac{22}{729}x^5$$
$$- \frac{154}{6561}x^6 + \cdots$$

$$13)\quad \frac{1}{\sqrt[3]{1+x}} = 1 - \frac{1}{3}x + \frac{1.4}{3.6}x^2 - \frac{1.4.7}{3.6.9}x^3 + \frac{1.4.7.10}{3.6.9.12}x^4 - \cdots$$
$$+(-1)^{\varkappa}\frac{1.4.7\ldots(3\varkappa-2)}{3.6.9\ldots3\varkappa}x^{\varkappa} + \cdots \quad x^2 < 1$$
$$= 1 - \frac{1}{3}x + \frac{2}{9}x^2 - \frac{14}{81}x^3 + \frac{35}{243}x^4 - \frac{91}{729}x^5$$
$$+ \frac{728}{6561}x^6 - \cdots$$

$$14)\quad \left\{\frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x}\right\}^n = 1 + nx + \frac{n(n+3)}{1.2}x^2$$
$$+ \frac{n(n+4)(n+5)}{1.2.3}x^3 + \cdots$$

15) $\left\{\frac{1+\sqrt{1-4x}}{2}\right\}^n = 1 - nx + \frac{n(n-3)}{1.2}x^2$
$$-\frac{n(n-4)(n-5)}{1.2.3}x^3 + \cdots$$

16) $(1+x)^{\frac{1}{x}} = e\left\{1 - \frac{1}{2}x + \frac{11}{24}x^2 - \frac{7}{16}x^3 + \frac{2447}{5760}x^4 - \cdots\right.$

17) $\sqrt{1+ax+bx^2+cx^3+dx^4} = 1 + \frac{a}{2}x + \frac{1}{2}\left(b - \frac{a^2}{4}\right)x^2$
$$+\frac{1}{2}\left(c - \frac{1}{2}ab + \frac{1}{8}a^3\right)x^3$$
$$+\frac{1}{2}\left(d - \frac{1}{2}ac - \frac{1}{4}b^2 + \frac{3}{8}ba^2 - \frac{5}{64}a^3\right)x^4 + \cdots$$

18) $\sqrt[4]{1+x} = 1 + \frac{1}{4}x - \frac{3}{32}x^2 + \frac{7}{128}x^3 - \cdots$
$$\sqrt[5]{1+x} = 1 + \frac{1}{5}x - \frac{2}{25}x^2 + \frac{6}{125}x^3 - \cdots$$
$$\sqrt[6]{1+x} = 1 + \frac{1}{6}x - \frac{5}{72}x^2 + \frac{55}{1296}x^3 - \cdots$$
$$\sqrt[7]{1+x} = 1 + \frac{1}{7}x - \frac{3}{49}x^2 + \frac{39}{1029}x^3 - \cdots$$
$$\sqrt[8]{1+x} = 1 + \frac{1}{8}x - \frac{7}{138}x^2 + \frac{35}{1104}x^3 - \cdots$$
$$\sqrt[9]{1+x} = 1 + \frac{1}{9}x - \frac{4}{81}x^2 + \frac{68}{2187}x^3 - \cdots$$
$$\sqrt[10]{1+x} = 1 + \frac{1}{10}x - \frac{9}{200}x^2 + \frac{171}{6000}x^3 - \cdots$$

§. 26.

Polynomial-Reihen.

1) $\frac{a+bx+cx^2+\cdots}{\alpha+\beta x+\gamma x^2+\cdots} = A + Bx + Cx^2 + \cdots$
$$A\alpha - a = 0$$
$$B\alpha + A\beta - b = 0$$
$$C\alpha + B\beta + A\gamma - c = 0$$
$$D\alpha + C\beta + B\gamma + A\delta - d = 0$$

2) $[a + bx + cx^2 + \cdots]^n = A + Bx + Cx^2 + \cdots$

$$A = a^n$$
$$aB = nbA$$
$$2aC = (n-1)bB + 2ncA$$
$$3aD = (n-2)bC + (2n-1)cB + 3ndA$$

3) $log(1 + ax + bx^2 + \cdots) = A + Bx + Cx^2 + \cdots$

$$A = a$$
$$B = -\tfrac{1}{2}Aa + b$$
$$C = -\tfrac{2}{3}Ba - \tfrac{1}{3}Ab + c$$
$$D = -\tfrac{3}{4}Ca - \tfrac{2}{4}Bb - \tfrac{1}{4}Ac + d$$

4) $e^{ax+bx^2+cx^3+\cdots} = A + Bx + Cx^2 \ldots$

$$A = a$$
$$B = b + \tfrac{1}{2}Aa$$
$$C = c + \tfrac{2}{3}Ab + \tfrac{1}{3}Ba$$
$$D = d + \tfrac{3}{4}Ac + \tfrac{2}{4}Bb + \tfrac{1}{4}Ca$$

5) $ay + by^2 + cy^3 + \cdots = Ax + Bx^2 + Cx^3 + \cdots$

$$y = \alpha x + \beta x^2 + \gamma x^3 + \cdots$$
$$A = a\alpha$$
$$B = a\beta + b\alpha^2$$
$$C = a\gamma + 2b\alpha\beta + c\alpha^3$$
$$D = a\delta + b\beta^2 + 2b\alpha\gamma + 3c\alpha^2\beta + d\alpha^4.$$

§. 27.

Recurrente Reihen.

Sei $m < n$ und

$$\frac{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots a_m x^m}{b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots b_n x^n} = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots$$

so wird für $x > m$

$$c_x = r_1 c_{x-1} + r_2 c_{x-2} + \cdots \quad r_x c_0 \qquad r_x = \frac{b_x}{b_0}$$

Die Coefficienten

$$r_1 r_2 \ldots r_x$$

werden nach Moivre die Relationsscala (*scala relationis*) genannt.

Es ist:

$$a_0 - b_0 c_0 = 0$$
$$a_1 - b_1 c_0 - b c_1 = 0$$
$$a_2 - b_2 c_0 - b_1 c_1 - b_0 c_2 = 0$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

allgemein

$$c_x = \frac{(-1)^x}{b_0^{x+1}} \begin{vmatrix} a_0 & b_0 & 0 & \ldots & \ldots & 0 \\ a_1 & b_1 & b_0 & 0 & \ldots & 0 \\ a_2 & b_2 & b_1 & b_0 & 0 \ldots & 0 \\ \vdots \\ a_x & b_x & b_{x-1} & \ldots & \ldots & b_1 \end{vmatrix}$$

§. 28.

Summirung einiger Reihen.

1) Sei

$$u_n = \{A_0 + A_1 n + \cdots \quad A_r n^r\} x^{n-1}$$

Man sucht die Summe S_n der ersten n Glieder. Man setze

$$S_n = \{\alpha_0 + \alpha_1 n + \cdots \quad \alpha_r n^r\} x^n - \alpha_0$$

und beachte, dass

$$S_n - S_{n-1} = \alpha_n x^{n-1}$$

so folgt:

$$(x-1)\alpha_0 + \alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 - \cdots = A_0$$
$$(x-1)\alpha_1 + 2\alpha_2 - 3\alpha_3 + 4\alpha_4 - \cdots = A_1$$
$$(x-1)\alpha_2 + 3\alpha_3 - 6\alpha_4 + 10\alpha_5 - \cdots = A_2$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$(x-1)\alpha_r = A_r$$

2) Sei $x^2 < 1$ und die Reihe

$$S = \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x^3 + \cdots$$

convergent, so ist:

$$S = \alpha_1 \frac{x}{1-x} + \Delta\alpha_1 \left(\frac{x}{1-x}\right)^2 + \Delta^2\alpha_1 \left(\frac{x}{1-x}\right)^3 + \cdots$$

Mit Hülfe dieses Theorems lassen sich viele Reihen summiren.

§. 29.

Diverse Reihentheoreme.

1) $$x+(1-x)\log(1-x)=\frac{1}{1.2}x^2+\frac{1}{2.3}x^3+\frac{1}{3.4}x^4+\cdots\quad x^2\leqq 1$$

2) $$\frac{3}{2}x^2-\frac{x}{2}-\frac{1-2x+x^2}{2}\log(1-x)=\frac{1}{1.2.3}x^3+\frac{1}{2.3.4}x^4+\frac{1}{3.4.5}x^5+\cdots$$

Klügel, Mathem. Wörterbuch IV, S. 580.

3) $$\frac{1.3\ldots 2n+1}{2.4\ldots 2n+2}\frac{\pi}{2}=\frac{1}{2n+3}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2n+5}+\frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{1}{2n+7}+\cdots=\int_0^1\frac{x^{2n+2}}{\sqrt{1-x^2}}dx$$

4) $$\frac{1.3\ldots 2n-1}{2.4\ldots 2n+2}\frac{\pi}{2}=\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2n+3}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2\frac{1}{2n+5}-\frac{1.3}{2.4}\left(\frac{1}{2}\right)^3\frac{1}{2n+7}+\cdots$$

Klügel, Hindeb. Archiv II, p. 60.

5) $$\frac{1.3\ldots 2n-1}{2.4\ldots 2n}\cdot 2^n=1^2+\frac{n^2}{1^2}+\frac{n^2(n-1)^2}{1^2.2^2}+\frac{n^2(n-1)^2(n-2)^2}{1^2.2^2.3^2}+\cdots$$

Satz von Lagrange: Euler, Acta Petrop., 1781.

6) $$\frac{1}{2a^2}\left\{a\pi\frac{e^{a\pi}+e^{-a\pi}}{e^{a\pi}-e^{-a\pi}}-1\right\}=\frac{1}{1+a^2}+\frac{1}{4+a^2}+\frac{1}{9+a^2}+\cdots$$

7) $$\frac{1}{2a}\left\{1-\frac{2a\pi}{e^{a\pi}-e^{-a\pi}}\right\}=\frac{1}{1+a^2}-\frac{1}{4+a^2}+\frac{1}{9+a^2}-\cdots$$

8) $$\frac{\pi}{2ab}-\frac{1}{2a^2}+\frac{\pi}{ab\left(e^{\frac{2a\pi}{b}}-1\right)}=\frac{1}{a^2+b^2}+\frac{1}{a^2+4b^2}+\frac{1}{a^2+9b^2}+\cdots$$

9) $$\frac{\pi \cos \frac{b-a}{2n}\pi}{n \sin \frac{b+a}{2n}\pi - n \sin \frac{b-a}{2n}\pi} = 1 + \frac{2b}{n^2-b^2} - \frac{2a}{4n^2-a^2} + \frac{2b}{9n^2-b^2} - \frac{2a}{16n^2-a^2} + \cdots$$

Euler, Com. Petrop., Tom. XII. Novi Comment, Tom. III.

10) Es ist:

$$\frac{x}{1-x} + \frac{x^2}{1-x^2} + \frac{x^3}{1-x^3} + \cdots = x\frac{1+x}{1-x} + x^4\frac{1+x^2}{1-x^2} + x^9\frac{1+x^3}{1-x^3} + \cdots$$

$$= \frac{\frac{x}{1-x} - \frac{2x^3}{(1-x)(1-x^2)} + \frac{3x^6}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)} - \frac{4x^{10}}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)} + \cdots}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)(1-x^5)}$$

Lambert'sche Reihe: die erste Transformation rührt von **Clausen** und **Scherk**, die letztere von **Eisenstein** her.

Sei

$$\frac{x}{1-x} + \frac{x^2}{1-x^2} + \frac{x^3}{1-x^3} + \cdots = A_1 x + A_2 x^2 + \cdots A_r x^r + \cdots$$

und

$$r = l^\lambda m^\mu n^\nu \ldots$$

wobei l, m, n Primzahlen sind, so wird:

$$A_r = (\lambda + 1)(\mu + 1)(\nu + 1)\ldots$$

Ueber diese Reihe: **Lambert**, Acta helv., III. Thl. Crelle, IX.

11) $$f(x) = \sum_0^\infty \binom{x}{a} \sum_0^a \varkappa (-1)^\varkappa \binom{a}{\varkappa} f(a-b)$$

Vergl. Mathem. Ann. Bd. 3, S. 311.

12) Sei

$$u_x = u_{x-1} + u_{x-2} \quad \text{also} \quad 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \ldots$$

so ist

$$S_n = u_{n+2} - 2$$

$$u_n^2 - u_{n-p}\, u_{n+p} = (-1)^{n+1-p}(u_{p-1})^2.$$

Sei

$$a = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \quad b = \frac{1-\sqrt{5}}{2},$$

so wird:

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\{a^{n+1} - b^{n+1}\}$$

$$u_n^2 - u_{n-1}u_{n+1} = (-1)^n$$

Reihe von Lamè. Vergl. Nouv. Corresp. Mathem. Tom. V, p. 199 und Tom. I, p. 74.

13) $$\pi = \frac{1}{6a^2} + \frac{1}{a^2} + 4a\left\{\frac{1}{1+a^2} + \frac{1}{4+a^2} + \cdots \frac{1}{a^2+a^2}\right\}$$

Wird $a = 3$, so folgt $\pi = 3,14\,15\,95\ldots$!

Euler, Corresp. mit Goldbach, S. 221. Catalan, Mem. de Liège 1887. Tom. 13.

$$\pi = \frac{4}{a} + 4a\left\{\frac{1}{1+a^2} + \frac{1}{4+a^2} + \cdots \frac{1}{a-1^2+a^2}\right\}$$

Journ. de Mathem. de Longchamps, Febr. 1881.

§. 30.

Gauss, hypergeometrische Reihe.

1) $$F = F(\alpha,\beta,\gamma,x) = 1 + \frac{\alpha}{1}\cdot\frac{\beta}{\gamma}x + \frac{\alpha(\alpha+1)}{1.2}\frac{\beta(\beta+1)}{\gamma(\gamma+1)}x^2 + \cdots$$

2) $$\frac{dF}{dx} = \frac{\alpha\beta}{\gamma}F(\alpha+1,\ \beta+1,\ \gamma+1,\ x)$$

3) $$(\gamma-\alpha+\beta)F + \alpha(1-x)F(\alpha+1,\beta,\gamma) = (\gamma-\beta)F(\alpha.\beta-1,\gamma)$$

4) $$(\gamma-\alpha+1)F + \alpha F(\alpha+1,\beta,\gamma) = (\gamma-1)F(\alpha,\beta,\gamma-1)$$

5) $$(\gamma-\beta-1)F + \beta F(\beta+1,\alpha,\gamma) = (\gamma-1)F(\alpha,\beta,\gamma-1)$$

6) $$(\beta-\alpha)F + \alpha F(\alpha+1,\beta,\gamma) = \beta F(\alpha,\beta+1,\gamma)$$

7) $$(\gamma-\alpha-\beta)F - (\gamma-\alpha)F(\alpha-1,\beta,\gamma) + \beta(1-x)F(\alpha,\beta+1,\gamma) = 0.$$

8) $$\gamma(1-x)F - \gamma F(\alpha-1,\beta,\gamma) + (\gamma-\beta)xF(\alpha,\beta,\gamma+1) = 0.$$

9) $$\gamma(\alpha-\gamma x+\beta x)F - \alpha\gamma(1-x)F(\alpha+1,\beta,\gamma) + (\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)xF(\alpha,\beta,\gamma+1) = 0.$$

10) $$F(\alpha,\beta+1,\gamma+1) - F(\alpha,\beta,\gamma) = \frac{\alpha(\gamma-\beta)}{\gamma(\gamma+1)}xF(\alpha+1,\beta+1,\gamma+1) = 0.$$

Sei

$$\Pi(\varkappa,z) = \frac{\varkappa!\,\varkappa^z}{(z+1)\ldots(z+\varkappa)}$$

11) $$F(\alpha,\beta,\gamma) = \frac{\Pi(\varkappa,\gamma-1)\,\Pi(\varkappa,\gamma-\alpha-\beta-1)}{\Pi(\varkappa,\gamma-\alpha-1)\,\Pi(\varkappa,\gamma-\beta-1)} F(\alpha,\beta,\gamma+\varkappa)$$

Die Function F ist für

$x < 1$ convergent,
$x > 1$ divergent,
$x = 1$ $\gamma > \alpha + \beta$ convergent,
$\gamma < \alpha + \beta$ divergent.

Ist

$$V^{-n} = \{a^2 + b^2 - 2ab\cos\varphi\}^{-n} = A_0 + 2A_1\cos\varphi + 2A_2\cos 2\varphi + \cdots$$

so ist

$$A_r = \binom{n}{r} a^{-2n-r} b^r F\left[n, n+r, r+1, \left(\frac{b}{a}\right)^2\right].$$

§. 31.

Einige öfters vorkommende numerische Reihen.

1) $$\frac{1}{\sqrt{2}} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1.3}{2.4} - \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8} + \cdots$$

2) $$\infty = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1.3}{2.4} + \frac{1.3.5}{2.4.6} + \cdots$$

3) $$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{2} - \frac{1.1}{2.4} + \frac{1.1.3}{2.4.6} - \frac{1.1.3.5}{2.4.6.8} + \cdots$$

4) $$1 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1.1}{2.4} + \frac{1.1.3}{2.4.6} + \frac{1.1.3.5}{2.4.6.8} + \cdots$$

5) $$\frac{1}{2}\sqrt{1-\sqrt{2}} = 1 - \frac{1.3}{2.4} + \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8} - \cdots$$

6) $$\sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}} = 1 + \frac{1.1}{2.4} - \frac{1.1.3.5}{2.4.6.8} + \frac{1.1.3.5.7.9}{2.4.6.8.10.12} + \cdots$$

7) $$\log 2 - \frac{1}{2} = \frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{3.4.5} + \frac{1}{5.6.7} + \cdots$$

8) $$\frac{1}{2} - \log 2 = \frac{1}{1.2.3} - \frac{1}{3.4.5} + \frac{1}{5.6.7} - \cdots$$

9) $$\frac{1}{4}\log 2 = \frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{5.6.7} + \frac{1}{9.10.11} + \cdots$$

NB. $\log 2 = 0{,}69\,314\,718$

10) $\frac{3}{4} - log\,2 = \frac{1}{2.3.4} + \frac{1}{4.5.6} + \frac{1}{6.7.8} + \cdots$

11) $\frac{\pi - 3}{4} = \frac{1}{2.3.4} - \frac{1}{4.5.6} + \frac{1}{6.7.8} - \cdots$

Wegen der letzten fünf Reihen vide Stern, Lehrbuch der allgemeinen Analysis, S. 447.

12) $1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots = e = 2{,}718281828459045\ldots$

13) $1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \cdots = \frac{1}{e} = 0{,}3678794412\ldots$

14) $1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{6!} + \cdots = cos\,1 = 0{,}5403023059\ldots$
$= cos\left(\frac{180}{\pi}\right)^0$

15) $1 - \frac{1}{3!} + \frac{1}{5!} - \frac{1}{7!} + \cdots = sin\,1 = 0{,}8414709848\ldots$
$= sin\left(\frac{180}{\pi}\right)^0$

16) $1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{6!} + \cdots = cos\,i = \frac{1}{2}\left(e + \frac{1}{e}\right)$
$= 1{,}5430806348\ldots$

17) $1 + \frac{1}{3!} + \frac{1}{5!} + \frac{1}{7!} + \cdots = \frac{1}{i}\,sin\,i = \frac{1}{2}\left(e - \frac{1}{e}\right)$
$= 1{,}1752011936\ldots$

§. 32.

Unendliche Producte.

1) Sei $log(1 + \alpha_x) = \alpha_x - \varrho\,\alpha_x^2$ ϱ ein Mittelwerth, so wird

$$\Pi(1 + \alpha_x) = e^{\Sigma\alpha x - \varrho\Sigma\alpha x^2}$$

Zur Beurtheilung der Convergenz, beziehungsweise der Divergenz dient folgende Tafel, in welcher A, B, C, wesentlich endliche Zahlen sind.

$\lim \Sigma a_x$	$\lim \Sigma a_x^2$	$\lim \Pi$	Π
$-\infty$	B	0	convergent
$-\infty$	∞	0	"
A	B	C	"
A	∞	0	"
$+\infty$	B	∞	divergent
$+\infty$	∞	$\frac{\infty}{\infty}$	unbestimmt

2) $$v_1 \frac{v_1 + v_2}{v_1} \cdot \frac{v_1 + v_2 + v_3}{v_1 + v_2} \cdots = v_1 + v_2 + v_3 + \cdots$$

3) $$v_1 v_2 v_3 \ldots = v_1 + v_1 (v_2 - 1) + v_1 v_2 (v_3 - 1) + \cdots$$

4) $$\frac{1}{(1 - v_1)(1 - v_2)\ldots} = 1 + \frac{v_1}{1 - v_1} + \frac{v_2}{(1 - v_1)(1 - v_2)} + \frac{v_3}{(1 - v_1)(1 - v_2)(1 - v_3)}$$

5) $$\frac{b_1}{b_1 - a_1} \cdot \frac{b_2}{b_2 - a_2} \cdots = 1 + \frac{a_1}{b_1 - a_1} + \frac{a_2 b_1}{(b_1 - a_1)(b_2 - a_2)} + \cdots$$

6) $$\frac{a_1 a_2 a_3 \ldots}{b_1 b_2 b_3 \ldots} = \frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2 - b_2}{b_2} \cdot \frac{a_1}{b_1} + \frac{a_3 - b_3}{b_3} \cdot \frac{a_1 a_2}{b_1 b_2} + \cdots$$

7) $$\sin x = x \left(1 - \frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{4\pi^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{9\pi^2}\right) \cdots$$

8) $$\cos x = \left(1 - \frac{x^2}{4\pi^2}\right)\left(1 - \frac{4x^2}{9\pi^2}\right)\left(1 - \frac{4x^2}{16\pi^2}\right) \cdots$$

9) $$tgn \frac{m\pi}{2n} = \frac{m}{n - m} \cdot \frac{2n - m}{n + m} \cdot \frac{2n + m}{3n - m} \cdot \frac{4n - m}{3n + m} \cdot \frac{4n + m}{5n - m} \cdots$$
$$= \frac{\pi}{2} \frac{n}{n - m} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2n - m}{n + m} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{2n + m}{3n - m} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{4n - m}{3n + m}$$

10) $$\sec \frac{m\pi}{2n} = \frac{n}{n - m} \cdot \frac{n}{n + m} \cdot \frac{3n}{3n - m} \cdot \frac{3n}{3n + m} \cdots$$
$$= \frac{2}{\pi} \frac{n}{n - m} \frac{2n}{n + m} \cdot \frac{2n}{3n - m} \cdot \frac{4n}{3n + m} \cdots$$

11) $$cosec\,\frac{m\pi}{2n} = \frac{n}{m}\cdot\frac{n}{2n-m}\cdot\frac{3n}{2n+m}\cdot\frac{3n}{4n-m}\cdot\frac{5n}{4n+m}$$

$$= \frac{2}{\pi}\,\frac{n}{m}\cdot\frac{2n}{2n-m}\cdot\frac{2n}{2n+m}\cdot\frac{4n}{4n-m}\cdot\frac{4n}{4n+m}\cdots$$

12) Es ist

$$\sqrt[r]{a} = lim P_0 P_1 \ldots \; P_n,$$

wenn

$$P_n = \frac{(na+1)r+1}{(na+1)r}\cdot\frac{(na+2)r+1}{(na+2)r}\cdots\frac{(n+1)ar+1}{(n+1)ar}$$

und der Fehler, wenn man die ersten $n+1$ Factoren behält, ist kleiner als:

$$P_0 P_2 \ldots \; P_n \frac{a-1}{(n+1)\,r+1}$$

Bulletins de l'Académie de Bruxelles 1849.

13) $(1+x)(1+x^2)(1+x^4)(1-x^8)\ldots = 1+x+x^2+x^3+x^4+\cdots$

14) $(1-x)\,(1-x^2)\,(1-x^3)\ldots = 1 - x - x^2 + x^5 + x^7 - x^{12} - x^{15} + x^{22} + x^{26}$

$$= \sum_0^\infty (-1)^m\, x^{\frac{3m^2\mp m}{2}}$$

Die dritte Potenz. dieser Reihe ist:

$$= \sum_0^\infty (-1)^n (2n+1)\, x^{\frac{n^2+n}{2}}$$

Vergl. Jacobi, Crelle's Journ. Bd. XXI. Nouv. Ann., T. IX.

15) $(1+x)(1+x^2)(1+x^3)(1+x^4)\cdots = 1+x+x^2+2x^3 + 2x^4+3x^5+4x^6+\cdots$

16) $$\frac{1}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)\ldots} = 1+x+2x^2+3x^3 + 5x^4+7x^5+\cdots$$

Jeder Coefficient in 15) und 16), zeigt an, auf wie vielerlei Arten der Exponent durch Addition aus der Zahlenreihe 1, 2, 3... sich bilden lasse, und zwar in 15), wenn keine Wiederholungen, in 16), wenn solche gestattet sind.

Vergl. Euler, Einleitung in die Analys. des Unendlichen, §. 15.

$$17)\quad \left(1+\frac{z}{1-z}\right)\left(1+\frac{rz}{1-rz}\right)\left(1+\frac{r^2z}{1-r^2z}\right)\cdots$$

$$= 1+\frac{z}{1-r}+\frac{z^2}{(1-r)(1-r^2)}+\frac{z^3}{(1-r)(1-r^2)(1-r^3)}+\cdots$$

$$18)\quad 1-\frac{1-q^n}{1-q}+\frac{(1-q^n)(1-q^{n-1})}{(1-q)(1-q^2)}$$

$$-\frac{(1-q^n)(1-q^{n-1})(1-q^{n-2})}{(1-q)(1-q^2)(1-q^3)}+\cdots$$

$$\text{ist} \quad = \begin{cases} 0 \\ (1-q)(1-q^3)(1-q^5)\ldots \end{cases}$$

je nachdem $n \begin{Bmatrix} \text{eine gerade} \\ \text{ungerade} \end{Bmatrix}$ Zahl ist.

Man beachte für 17) die Eigenschaft $f(r, rz) = f(r, z)(1-z)$, so lässt sich 18) leicht aus 17) ableiten.

$$19)\quad \frac{\pi}{2} = \frac{2.2.4.4.6.6.8\ldots}{1.3.3.5.5.7.7\ldots} \quad \text{(Wallis Formel)}$$

$$20)\quad e = \frac{2}{1}\left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{6.8}{5.7}\right)^{\frac{1}{4}}\left(\frac{10.12.14.16}{9.11.13.15}\right)^{\frac{1}{8}}\cdots$$

Catalan, Compt. Rend. 1877. Liouville's Journ. 1875.

Mehreres findet man in allen Lehrbüchern der Analysis, insbesondere in Euler's „Einleitung in die Analysis des Unendlichen". Weierstrass, Abhandlungen aus der Functionslehre, p. 206 (Convergenz).

Zusatz zu §. 32.

Herr Weierstrass giebt in seinen „Abhandlungen aus der Functionenlehre", S. 206, eine Anzahl von allgemeinen Theoremen, die wir hier reproduciren wollen.

I. Wenn die Glieder einer unendlichen Reihe

$$u_0,\ u_1,\ u_2\ \ldots$$

sämmtlich reell und kleiner als Eins sind und zugleich diese Reihe eine endliche Summe hat, so convergiren die Producte

$$P_n = (1-u_0)(1-u_1)(1-u_2)\ldots$$

$$Q_n = (1+u_0)(1+u_1)(1+u_2)\ldots$$

für $lim\, n = \infty$, beide gegen eine bestimmte, positive Grenze, und zwar das erste beständig abnehmend, das andere beständig zunehmend.

II. Wenn dagegen die obige Reihe keine bestimmte Summe hat, so wird für $lim\, n = \infty$, P_n beständig positiv bleibend und abnehmend, sich der Grenze Null nähern, während Q_n über jede Grenze hinaus wächst.

III. Wenn die Glieder der Reihe

$$u_0, u_1, u_2, \ldots$$

sämmtlich reell sind, und von einem bestimmten Gliede an beständig dasselbe Zeichen behalten und kleiner als Eins bleiben, so wird das Product

$$P_n = (1 + u_0)(1 + u_1)(1 + u_2) \ldots$$

für $lim = \infty$, gegen eine bestimmte Grenze {die, sobald keine der Grössen $u_0, u_1 \ldots = -1$ ist, nicht Null ist} convergiren, wofern die Reihe

$$u_0, u_1, u_2, \ldots$$

eine endliche Summe hat.

Wenn aber das Letztere nicht der Fall ist, so wird

$$P_n = \infty \text{ oder } P_n = 0,$$

je nachdem die Grössen

$$u_0, u_1, \ldots$$

von einer bestimmten Grösse an stets positiv oder stets negativ sind.

IV. Auch wenn die Glieder der unendlichen Reihe

$$u_0, u_1, u_2, \ldots$$

complexe Werthe haben und die Reihe unabhängig von der Anordnung ihrer Glieder eine endliche Summe hat, nähert sich das Product

$$P_n = (1 + u_0)(1 + u_1)(1 + u_2) \ldots$$

für $lim\, n = \infty$ einer bestimmten Grenze, die von Null verschieden ist, wofern nicht eine der Grössen $u_0, u_1, \ldots = -1$ ist.

§. 33.

Kettenbrüche.

Wir bezeichnen

1) $\cfrac{b_1}{a_1 + \cfrac{b_2}{a_2 + \cdots}}$ mit $\left[\frac{b_1}{a_1}\,\frac{b_2}{a_2}\cdots\right]$

2) $\cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cdots}}$ mit $[a_1\, a_2 \ldots]$

3) $\cfrac{1}{a_1 - \cfrac{1}{a_2 - \cdots}}$ mit $(a_1\, a_2 \cdots)$

4) So wird der Kettenbruch

$$\left[\frac{b_1}{a_1},\ \frac{b_2}{a_2}\cdots\right],$$

in welchem alle a und b positiv sind $\begin{cases}\text{convergiren}\\ \text{divergiren}\end{cases}$, je nachdem $\begin{cases}\text{wenigstens eine}\\ \text{keine}\end{cases}$ der beiden Reihen

$$\frac{a_1}{b_1} + \frac{b_2}{b_1 b_3}\, a_3 + \frac{b_2 b_4}{b_1 b_3 b_5}\, a_5 + \cdots$$

$$\frac{b_1}{b_2}\, a_2 + \frac{b_1 b_3}{b_2 b_4}\, a_4 + \frac{b_1 b_3 b_5}{b_2 b_4 b_6}\, a_6 + \cdots$$

divergirt. (Stern, Crelle 37.)

5) Der Kettenbruch

$$\left[\frac{b_1}{a_1}\ \frac{b_2}{a_2}\cdots\right],$$

in welchem alle a und b positiv sind, convergirt sicher, wenn

$$\lim \frac{a_n\, a_{n+1}}{b_{n+1}} > 0 \text{ für } \lim n = \infty$$

6) Der Kettenbruch

$$\left[\frac{b_1}{a_1},\ \frac{-b_2}{a_2},\ \frac{-b_3}{a_3},\ \cdots\right]$$

convergirt immer, wenn

$$\frac{b_1}{a_1}, \frac{b_2}{a_2}, \frac{b_3}{a_3}, \ldots$$

echte Brüche sind, deren Zähler und Nenner aus ganzen positiven Zahlen bestehen.

Bezüglich der Beweise siehe: Schlömilch, Handbuch der algebr. Analysis.

7) Seien

$$\frac{p_1}{q_1}, \frac{p_2}{q_2}, \ldots \frac{p_n}{q_n}$$

die Näherungsbrüche von

$$\frac{a}{b} = \left[\frac{b_1}{a_1}\ \frac{b_2}{a_2} \ldots\right],$$

so ist:

$$\frac{p_1}{q_1} = \frac{b_1}{a_1}, \quad \frac{p_2}{q_2} = \frac{a_2 b_1}{a_1 a_2 + b_2}, \quad \frac{p_3}{q_3} = \frac{a_3 a_2 b_1 + b_3 b_1}{a_3 (a_1 a_2 + b_2) + a_1 b_3},$$

8) allgemein

$$\frac{p_n}{q_n} = \frac{a_n p_{n-1} + b_n p_{n-2}}{a_n q_{n-1} + b_n q_{n-2}}$$

und auch

$$p_n = a_n p_{n-1} + b_n q_{n-2} \quad q_n = a_n q_{n-1} + b_n q_{n-2}$$

oder

$$p_n = b_1 \begin{vmatrix} a_2 - 1 & 0 & 0 \ldots 0 \\ b_3 & a_3 - 1 & 0 \ldots 0 \\ 0 & b_4 & a_4 - 1 \ldots 0 \\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot \\ 0\ \ldots & \ldots\ b_n & a_n \end{vmatrix} \qquad q_n = \begin{vmatrix} a_1 - 1 & 0 & 0 \ldots 0 \\ b_2 & a_2 - 1 & 0 \ldots 0 \\ 0 & b_3 & a_3 - 1 \ldots 0 \\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot \\ 0 & 0\ \ldots & b_n\ \ a_n \end{vmatrix}$$

9) Ist speciell

$$\frac{a}{b} = [a_1\, a_1\, a_1 \ldots],$$

so wird

$$\frac{p_n}{q_n} = \frac{a^{n-1} + \binom{n-2}{1} a^{n-3} + \binom{n-3}{2} a^{n-5} + \cdots}{a^n + \binom{n-1}{1} a^{n-2} + \binom{n-2}{2} a^{n-4} + \cdots}$$

10) Ist der Kettenbruch convergent, so ist

$$\alpha) \quad \frac{p_n}{q_n} \gtrless \frac{a}{b} \lessgtr \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}$$

$$\beta)\quad \pm\left(\frac{a}{b}-\frac{p_n}{q_n}\right)<\frac{1}{q_n^2}$$

$$\gamma)\quad \frac{p_n}{q_n}-\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}=\frac{\pm 1}{q_n q_{n+1}}$$

$$\delta)\quad p_n q_{n+1}-q_n p_{n+1}=\pm 1.$$

12) $(a_1 a_2 a_3 \ldots a_n) = (1\,1\,1\,a_1 \ldots 1\,1\,1\,a_n)$

13) Ist

$$x = (a_1 a_2 \ldots y),$$

so ist auch

$$y = (a_n a_{n-1} \ldots x)$$

und

$$A + Bx + Cy + Dxy = 0,$$

dabei ist:

$$\frac{A}{B} = -(a_1 a_2 \ldots a_{n-1}) \quad \frac{A}{C} = -(a_n \ldots a_2)$$

$$\frac{C}{D} = -(a_1 \ldots a_n) \quad \frac{B}{D} = -(a_n \ldots a_1)$$

$$\frac{A}{D} = (a_1 \ldots a_n)(a_n \ldots a_2) = (a_n \ldots a_1)(a_1 \ldots a_{n-1})$$

Vid. Lieblein, Aufgabensammlung aus der algebr. Analysis, S. 179 β.)

14) Ist

$$\frac{P}{Q} = [a_1 a_2 \ldots a_n] = [a_n \ldots a_1],$$

so wird der Bruch reciprok genannt und es wird

$$q_{n-1} = \frac{Q^2 \pm 1}{P}.$$

Es muss $P > 2Q$ und $Q^2 \pm 1$ durch P theilbar sein.

15) Jede Grösse, die sich in einen periodischen Kettenbruch entwickeln lässt, ist eine irrationale Wurzel einer Gleichung zweiten Grades.

16) Sei

$$x = \frac{A}{A_1} = a + \frac{A_2}{A_1},\ x_1 = a_1 + \frac{A_3}{A_2}, \cdots\ x_n = A_n,$$

so dass

$$x = a + [a_1 \ldots a_n x_n]$$

wird, so werden die Grössen

$x x_1 \ldots x_n$ die vollständigen,
$a a_1 \ldots a_{n-1}$ die unvollständigen

Quotienten genannt.

17) Entwickelt man die irrationalen Wurzeln einer Gleichung zweiten Grades mit ganzen Coefficienten in Kettenbrüche, so ist die Periode der unvollständigen Quotienten des einen die Umkehrung der Periode des anderen.

18) Sei

$$x = \frac{E + \sqrt{A}}{D} \text{ eine Wurzel von } D x^2 - 2 E x + F = 0,$$

so dass $A = E^2 - D F$, sei ferner $x' = \frac{E' + \sqrt{A}}{D'}$ ein beliebiger vollständiger Quotient, a der in ihm enthaltene unvollständige,

$$a_1 a_2 \ldots a_{x-1}$$

die ganze Periode die mit a beginnt, ferner

$$\frac{\alpha}{\beta} = a + [a_1 a_2 \ldots a_{x-1}]$$

$$u_1 = \alpha + \beta \frac{E'}{D'}, \quad v_1 = \frac{\beta}{D'},$$

$$u_n - v_n \sqrt{A} = (u_1 - v_1 \sqrt{A})^n,$$

so wird:

$$u_1^2 - A v_1^2 = \pm 1$$

$$u_n^2 - A v_n^2 = (\pm 1)^n.$$

Soll demnach $y^2 - A z^2 = \pm H$, wo $H < \sqrt{A}$ und A kein Quadrat ist, in ganzen Zahlen lösbar sein, so muss H unter den, aus der Entwickelung von $\sqrt{A}$ folgenden Nennern, der vollständigen Quotienten, welche die erste Periode bilden, vorkommen.

Vergleiche Tafel im Anhange.

19) Es ist:

$$\cfrac{x + \cfrac{b}{\beta + \cfrac{c}{\gamma + \cdots}}}{a} = \left[\frac{\alpha}{a}, -\frac{\alpha\beta}{b\alpha + \beta}, -\frac{b\alpha\gamma}{c\beta + \gamma}, -\frac{c\beta\delta}{d\gamma + \delta}, \ldots\right]$$

20) $$\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_1 a_2} + \frac{1}{a_1 a_2 a_3} - \cdots = \left[\frac{1}{a_1}, \frac{a_1}{a_2 - 1}, \frac{a_2}{a_3 - 1}, \frac{a_3}{a_4 - 1}, \ldots\right]$$

21) $$\frac{1}{a_1} + \frac{x}{a_1 a_2} + \frac{x^2}{a_1 a_2 a_3} + \cdots = \left[\frac{1}{a_1}, \frac{-a_1 x}{a_2 + x}, \frac{-a_2 x}{a_3 + x}, \ldots\right]$$

22) Sei

$$\varphi(\alpha\beta\gamma x) = 1 + \frac{\alpha.\beta}{1.\gamma} + \frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{2!\gamma(\gamma+1)} + \cdots$$

$$\psi(\alpha\beta\gamma x) = \frac{\varphi(\alpha, \beta+1, \gamma+1, x)}{\varphi(\alpha, \beta, \gamma, x)},$$

so wird:

$$\psi(\alpha\beta\gamma x) = \left[\frac{1}{1}, -\frac{ax}{1}, -\frac{bx}{1}, \ldots\right.$$

wobei

$$a = \frac{\alpha}{\gamma}\cdot\frac{\gamma-\beta}{\gamma+1} \qquad b = \frac{\beta+1}{\gamma+1}\cdot\frac{\gamma+1-\alpha}{\gamma+2}$$

$$c = \frac{\alpha+1}{\gamma+2}\cdot\frac{\gamma-\beta+1}{\gamma+3} \qquad d = \frac{\beta+2}{\gamma+3}\cdot\frac{\gamma+2-\alpha}{\gamma+4}$$

$$e = \frac{\alpha+2}{\gamma+4}\cdot\frac{\gamma-\beta+2}{\gamma+5} \qquad f = \frac{\beta+3}{\gamma+5}\cdot\frac{\gamma+3-\alpha}{\gamma+6}$$

23) $x = A - B + C - D \ldots = \left[\frac{A}{1}\,\frac{B}{A-B}\,\frac{AC}{B-C}\,\frac{BD}{C-D}\,\frac{CE}{D-E}\right]$

24) $x = \frac{1}{A} - \frac{1}{B} + \frac{1}{C} - \cdots = \left[\frac{1}{A}\,\frac{A^2}{B-A}\,\frac{B^2}{C-B}\,\frac{C^2}{D-C}\cdots\right]$

25) $\frac{\pi}{4} = \left[1\,\frac{1}{2}\,\frac{9}{2}\,\frac{25}{2}\,\frac{49}{2}\cdots\right] = \left[\frac{1}{1} - \frac{1}{3} - \frac{1}{5} - \frac{1}{7}\cdots\right]$

$= \left[\frac{1}{1}\,\frac{1^2}{3}\,\frac{2^2}{5}\,\frac{3^2}{7}\cdots\right]$

26) $1 - e = \left[\frac{1}{1}\,\frac{1}{1}\,\frac{2}{2}\,\frac{3}{3}\,\frac{4}{4}\cdots\right]$

27) $\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \left[\frac{x}{1}\,\frac{x^2}{3}\,\frac{x^2}{5}\,\frac{x^2}{7}\cdots\right]$

28) $tgn\,x = \left[\frac{x}{1} - \frac{x^2}{3} - \frac{x^2}{5} - \frac{x^2}{7}\cdots\right]$

29) $\frac{1}{2}\log\frac{1+x}{1-x} = \left[\frac{x}{1} - \frac{1^2x^2}{3} - \frac{2^2x^2}{5} - \frac{3^2x^2}{7}\cdots\right]$

30) $e^x = 1 + \left[\frac{x}{1-x}, \frac{x}{2-x}, \frac{2x}{3-x}, \frac{3x}{4-x}, \cdots\right]$

31) $2xe^{x^2}\int_x^\infty e^{-t^2}dt = \left[\frac{1}{1}, \frac{q}{1}, \frac{2q}{1}, \frac{3q}{1}, \frac{4q}{1}, \ldots\right], q = \frac{1}{2x^2}.$

Laplace, Mécanique celeste, Tom. IV, Liv. X. Jacobi, Crelle's Journ. 12, S. 346.

32) $$\int_x^\infty \frac{e^{-x}dx}{x} = e^x \left[\frac{1}{x+1}, \frac{-1}{x+3}, \frac{-1}{\frac{x+5}{4}}, \frac{-\frac{1}{4}}{\frac{x+7}{9}}, \frac{-\frac{1}{9}}{\frac{x+9}{16}} \cdots \right]$$

Laguerre: Bulletin de la Soc. math., Tom. VII, p. 72.

Ueber Kettenbrüche: Serret, Handbuch der höh. Algebra, deutsch von Werthheim. Euler, Com. Petrop., Tom. II. (Integrale.) Stern, Crelle Bd. 37 und die Lehrbücher der algeb. Analysis von Stern, Schlömilch etc., ferner Euler, Einleitung in die Analysis des Unendlichen.

§. 34.

Zahlentheorie.

1. Theilbarkeit der Zahlen.

1) Sind $a, b, c, \ldots k, l$, sämmtliche von einander verschiedene, in m enthaltene Primzahlen, so ist

$$\varphi(m) = m\left(1 - \frac{1}{a}\right)\left(1 - \frac{1}{b}\right)\cdots\left(1 - \frac{1}{e}\right)$$

die Anzahl aller derjenigen Zahlen, $1, 2, 3, \ldots m$, die gegen m relativ prim sind.

Sei

$$m = a^\alpha b^\beta c^\gamma \ldots,$$

so wird

$$\varphi(m) = (a-1)a^{\alpha-1}(b-1)b^{\beta-1}\ldots$$

2) Es ist

$$\varphi(mm') = \varphi(m)\varphi(m')$$

$$m = \sum \varphi\left(\frac{m}{\delta}\right) = \sum \varphi(\delta),$$

das Summenzeichen bezieht sich auf sämmtliche Divisoren δ der Zahl m.

3) Die Summe aller Maasse von m ist

$$S = \frac{a^{\alpha+1}-1}{a-1} \cdot \frac{b^{\beta+1}-1}{b-1} \ldots$$

Die Anzahl aller Maasse dagegen

$$n = (\alpha+1)(\beta+1)(\gamma+1)\ldots$$

4) Eine **vollkommene Zahl** ist dargestellt durch die Form

$$(2^{n+1} - 1)2^n.$$

Es sind 6, 28, 496, 8128, ... vollkommene Zahlen.

5) Ist für zwei Zahlen die Summe S (Nr. 3) gleich, so nennt man sie **amicable Zahlen**, z. B. 210 und 366.

6) Seien $a, b, c, \ldots k, l$ Primzahlen, und N durch das Product $a, b, c \ldots k, l$ theilbar, so giebt es von 1 bis N, z Zahlen, die kleiner als N und zu N prim sind. Es ist

$$z = \frac{N}{abc\ldots kl}(a-1)(b-1)\ldots(l-1). \quad \text{(Euler'scher Satz.)}$$

2. Die Lehre von den Congruenzen.

1) Sind zwei Zahlen a und b so beschaffen, dass $a - b$ durch p theilbar ist, so nennt man **a und b nach p congruent.**

Die Zahl p heisst der Modul.

2) Man hat

$$a - b = mp$$

und schreibt

$$a \equiv b \ (mod\, p)$$

3) Es ist immer

$$a \equiv a \ (mod\, p)$$

4) Ist

$$a \equiv b \ (mod\, p), \quad b \equiv c \ (mod\, p),$$

so ist auch

$$a \equiv c \ (mod\, p)$$

5) Ist

$$a \equiv b \ (mod\, p), \quad m \equiv n \ (mod\, p),$$

so wird

$$a \pm m = (b \pm n) \ (mod\, p)$$
$$am = bn \ (mod\, p).$$

6) Sei $\varphi(x)$ wie in Nr. 1), so ist, wenn a relativ prim zu x ist

$$a^{\varphi(x)} = 1 \ (mod\, x) \quad \text{(Euler).}$$

Speciell, ist p eine Primzahl und a durch p nicht theilbar, so ist

$$a^{p-1} = 1 \ (mod\, p) \quad \text{(Fermat).}$$

7) Sind $a, b, c \ldots g, h$ gegebene ganze Zahlen, m positiv, so heisst jeder Werth von x, der der Congruenz

$$ax^m + bx^{m-1} + cx^{m-2} + \cdots gx + h \equiv 0 \ (mod\, x)$$

genügt, eine Wurzel dieser Congruenz. Man hat alle Wurzeln, wenn man die unter einander incongruenten Wurzeln kennt. Wir wollen diese letzteren die eigentlichen Wurzeln nennen. Eine Congruenz m ten Grades hat höchstens m eigentliche Wurzeln.

8) Ist a relativ prim zu $\varkappa$, so hat die Congruenz

$$a x \equiv b \pmod{\varkappa}$$

nur eine eigentliche Wurzel.

9) Damit die Congruenz

$$a x \equiv b \pmod{\varkappa}$$

überhaupt Wurzeln besitze, ist erforderlich, dass b durch den grössten gemeinschaftlichen Divisor δ der beiden Zahlen a und $\varkappa$ theilbar sei; ist diese Bedingung erfüllt, so hat die Congruenz genau δ eigentliche Wurzeln.

10) Die Auflösung der Congruenz

$$a x \equiv 1 \pmod{b}$$

ist identisch mit der Auflösung der unbestimmten Gleichung

$$a x - b y = 1.$$

Diese wird mit Hülfe des Satzes Kettenbrüche Nr. 11 geleistet.

11) Es ist p eine Primzahl, so gilt der Satz:

$$(p-1)! \equiv -1 \pmod{p} \quad \text{(Wilson's Satz).}$$

12) Ist δ ein Divisor von $p-1$, so besitzt die Congruenz

$$x^{\delta} \equiv 1 \pmod{p}$$

stets δ eigentliche Wurzeln.

3. Theorie der quadratischen Reste.

1) Sei D relativ prim zu $\varkappa$ und

$$x^2 \equiv D \pmod{\varkappa}.$$

Ist diese Congruenz möglich, d. h. besitzt sie Wurzeln, so heisst D ein (quadratischer) Rest der Zahl $\varkappa$, sonst ein (quadratischer) Nichtrest. Sei p eine ungerade Primzahl,

2) So ist

D ein Rest, wenn $\quad D^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1 \pmod{p}$

D ein Nichtrest, wenn $D^{\frac{p-1}{2}} \equiv -1 \pmod{p}$

3) $\begin{cases} \text{Rest mal Rest giebt Rest,} \\ \text{Nichtrest mal Nichtrest giebt Rest,} \\ \text{Rest mal Nichtrest giebt Nichtrest.} \end{cases}$

4) Legendre'sches Symbol

$$\left(\frac{D}{p}\right) = \pm 1 \begin{cases} + \text{ wenn } D \text{ ein Rest von } p, \\ - \text{ wenn } D \text{ ein Nichtrest von } p \end{cases}$$

5) Ist p eine ungerade Primzahl und D durch p nicht theilbar, so ist für die Möglichkeit der Congruenz

$$x^2 \equiv D \ (mod\, p^{\varkappa}) \quad (x \text{ positiv und ganz})$$

erforderlich und hinreichend, dass

$$\left(\frac{D}{p}\right) = 1.$$

Ist diese Bedingung erfüllt, so besitzt die vorgelegte Congruenz zwei eigentliche Wurzeln α und $-\alpha$, die gefunden werden können, sobald man eine Wurzel der Congruenz

$$x^2 \equiv D \ (mod\, p)$$

gefunden hat.

6) Seien D und $\varkappa$ relative Primzahlen und

$$x^2 \equiv D \ (mod\, \varkappa),$$

ferner σ die Anzahl der eigentlichen Wurzeln, so ist für diese Congruenz, für

a) $\varkappa$ ungerade $\sigma = 2^{\mu}$.

Dabei ist μ die Anzahl der von einander verschiedenen, in $\varkappa$ aufgehenden Primzahlen, für welche zugleich

$$\left(\frac{D}{p}\right) = +1.$$

b) Ist $\varkappa$ das Doppelte einer ungeraden Zahl, so gilt *a*).

c) Ist $\varkappa$ das Vierfache einer ungeraden Zahl und dazu $\left(\frac{D}{p}\right) = +1$, $D \equiv 1 \ (mod\, 4)$, so ist $\sigma = 2^{\mu+1}$.

d) Ist $\varkappa = 0 \ (mod\, 8)$ und $\left(\frac{D}{p}\right) = +1$, $D \equiv 1 \ (mod\, 8)$, so ist $\sigma = 2^{\mu+2}$.

7) Die Congruenz

$$Ax^2 + By^2 + C \equiv 0 \ (mod\, p)$$

ist immer möglich, wenn p eine Primzahl ist.

8) Die Zahl -1 ist ein quadratischer Rest aller Primzahlen von der Form $4n + 1$, dagegen ein Nichtrest jener von der Form $4n + 3$.

9) Die Zahl 2 ist ein quadratischer Rest aller Primzahlen von der Form $8n + 1$, $8n + 7$, ein Nichtrest jener von der Form $8n + 3$, $8n + 5$.

10) Sind p und q zwei positive ungerade Primzahlen, von denen mindestens eine die Form $4n + 1$ hat, so ist q ein quadratischer Rest oder Nichtrest von p, je nachdem p ein quadratischer Rest oder Nichtrest von q ist.

Haben aber beide Primzahlen p und q die Form $4n + 3$, so ist q ein quadratischer Rest oder Nichtrest von p, je nachdem p quadratischer Nichtrest oder Rest von q ist, d. h. es ist

$$\left(\frac{p}{q}\right)\left(\frac{q}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2}\cdot\frac{q-1}{2}}$$ (Reciprocitäts-Satz von Legendre).

11) Sei P eine ungerade Zahl, die in ihre Primfactoren $pp'..$ zerlegt erscheint, sei ferner m irgend eine zu P relative Primzahl, so ist

$$\left(\frac{m}{P}\right) = \left(\frac{m}{p}\right)\left(\frac{m}{p'}\right)\cdots = 1$$

(nicht umkehrbar).

12) Ist m relativ prim gegen jede der beiden ungeraden Zahlen P und Q, so ist

$$\left(\frac{m}{P}\right)\left(\frac{m}{Q}\right) = \left(\frac{m}{PQ}\right).$$

13) Sind $l, m, n, p \ldots$ relativ prim zu P, wobei P ungerade ist, so folgt

$$\left(\frac{l}{P}\right)\left(\frac{m}{P}\right)\cdots = \left(\frac{l\,m\,n\ldots}{P}\right).$$

14) Ist m relativ prim zu der ungeraden Zahl P und

$$m \equiv m' \ (mod\ P),$$

so ist

$$\left(\frac{m}{P}\right) = \left(\frac{m'}{P}\right).$$

15) Ist P eine ungerade Zahl, so ist

$$\left(\frac{2}{P}\right) = (-1)^{\frac{P^2-1}{8}}.$$

16) Sind die beiden positiven ungeraden Zahlen P und Q relative Primzahlen, so ist

$$\left(\frac{P}{Q}\right)\left(\frac{Q}{P}\right) = (-1)^{\frac{P-1}{2}\cdot\frac{Q-1}{2}}$$ (Reciprocitäts-Satz von Jacobi).

Näheres in: Dirichlet, Vorlesungen über Zahlentheorie. Braunschweig.

§. 35.

Auflösung der unbestimmten Gleichungen.

1) Sei

$$ax - by = c$$

gegeben, man suche

$$a\alpha - b\beta = \pm 1$$

mit Hülfe der Kettenbruchentwickelung. Sei sodann q eine beliebige ganze Zahl, so ist

$$\pm x - \alpha c + bq = 0$$
$$\pm y - \beta c + aq = 0.$$

2) Sei

$$a + bx + cy + dx^2 + exy + fy^2 = 0.$$

Man setze:

$$c^2 - 4af = \alpha \quad 2ce - 4bf = \beta \quad e^2 - 4df = \gamma,$$

so wird:

$$2fy + ex + c = \sqrt{\alpha + \beta x + \gamma x^2}.$$

Sei nun

$$\alpha + \beta x + \gamma x^2 = v^2,$$

so ist, wenn

$$A = 4\gamma \quad \beta^2 - 4\alpha\gamma = B$$

gesetzt wird,

$$2\gamma x + \beta = \sqrt{Av^2 + B}.$$

Sei nun

$$Av^2 + B = w^2,$$

so ist die Aufgabe gelöst, sobald wir für v und w nur je einen dieser Gleichung genügenden Werth angeben können. (Vergl. das Rationalmachen.)

Diese Aufgabe behandelt §. 18 der Kettenbrüche.

3) Um $A + Bx + Cy + Dx^2 + Exy = 0$ aufzulösen, beachte man, dass

$$E^2 y = -DEx - BE + CD - \frac{AE^2 - BCE + C^2 D}{C + Ex}$$

und suche die ganzzahligen Auflösungen von

$$(AE^2 - BCE + c^2 D)z - Ex - C = 0.$$

Diese letztere Methode ist jedoch nicht immer brauchbar, sie ist aber sehr bequem, sobald D ein Vielfaches von E ist.

§. 36.

Das Rationalmachen.

(Unbestimmte Analytik.)

Seien p und q beliebige ganze und positive Zahlen.

1) $\sqrt{a+bx}$, $x=\frac{p^2-a}{b}$

2) $\sqrt{bx+cx^2}$, $x=\frac{bq^2}{p^2-cq^2}$

3) $\sqrt{a+\gamma^2x^2}$, $x=\frac{aq^2-p^2}{2\gamma pq}$

4) $\sqrt{\alpha^2+cx^2}$, $x=\frac{2\alpha pq}{cq^2-p^2}$

5) $\sqrt{a+bx+\gamma^2x^2}$, $x=\frac{p^2-aq^2}{bq^2-2\gamma pq}$

6) $\sqrt{\alpha^2+bx+cx^2}$, $x=\frac{bq^2-2\alpha pq}{p^2-cq^2}$

7) $\sqrt{(fx+g)(hx+k)}$, $x=\frac{gp^2-\varkappa q^2}{hq^2-fp^2}$

8) $\sqrt{(dx+e)^2+(fx+g)(hx+k)}$, $x=\frac{kq^2-gp^2-2epq}{fp^2+2dpq-hq^2}$

9) $\sqrt{ay^2+\gamma^2x^2}$, $x=aq^2-p^2$, $y=2\gamma pq$

10) $\sqrt{ay^2+bxy+\gamma^2x^2}$, $x=p^2-aq^2$, $y=bq^2-2\gamma pq$

11) $\sqrt[m]{\left(\frac{a+bx}{\alpha+\beta x}\right)^n}$, $x=\frac{a-\alpha p^m}{\beta p^m-b}$.

12) Um $\sqrt{a+bx+cx^2}$ rational zu machen, suche man w so, dass $a+bw+cw^2=f^2$, und setze sodann

$$g=b+2cw \quad c=h,$$

so wird:

$$x=w+\frac{gq^2-2fpq}{p^2-hq^2}.$$

Mehreres darüber: Euler, Einleitung in die Analysis des Unendlichen, I. Bd. Sowie in seiner Algebra mit Zusätzen, 3 Thle.,

Berlin und Frankfurt 1796. Sowie das bei den „Figurirten Zahlen" citirte Werk.

§. 37.

Elimination.

I. Sylvester-Hesse. Um x aus

$$ax^2 + bx + c = 0$$
$$\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$$

zu eliminiren, bilde man:

$$\begin{aligned} ax^3 + bx^2 + cx \quad &= 0 \\ ax^2 + bx + c &= 0 \\ \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x \quad &= 0 \\ \alpha x^2 + \beta x + \gamma &= 0 \end{aligned} \qquad \varDelta = \begin{vmatrix} a & b & c & 0 \\ 0 & a & b & c \\ \alpha & \beta & \gamma & 0 \\ 0 & \alpha & \beta & \gamma \end{vmatrix}$$

so ist $\varDelta = 0$ das Eliminationsresultat.

II. Cayley. Sei x aus $\varphi(x) = 0 \quad \theta(x) = 0$ zu eliminiren, man bilde

$$\frac{\varphi(x)\,\theta(y) - \varphi(y)\,\theta(x)}{x - y} = \varphi_1(x) + y\,\varphi_2(x) + \cdots = 0$$

da y beliebig ist, so muss $\varphi_1(x) = 0 \quad \varphi_2(x) = 0 \ldots$

Die Elimination ist nun leichter auszuführen.

Vergleiche: Serret, Handbuch der höheren Algebra.

§. 38.

Interpolation.

Sei $\psi(x) = (x - \alpha)(x - \beta) \ldots$ und von der Function $f(x)$ die Werthe $f(\alpha)\,f(\beta) \ldots$ gegeben, so ist näherungsweise

$$f(x) = \psi(x) \left\{ \frac{f(\alpha)}{(x - \alpha)\,\psi'(\alpha)} + \frac{f(\beta)}{(x - \beta)\,\psi'(\beta)} + \cdots \right. \text{(Lagrange).}$$

Es ist

$$u_{n+\frac{x}{r}} = u_n + \frac{x}{r} \varDelta u_n - \frac{x(r-x)}{1.2.r^2} \varDelta^2 u_n + \frac{x(r-x)(2r-x)}{1.2.3\,r^3} \varDelta^3 u_n - \cdots$$

Ist $r = 10$

$$u_{n+\frac{x}{10}} = u_n + p_1, \varDelta u_n - p_2, \varDelta^2 u_n + p_3, \varDelta^3 u_n - \cdots$$

x	p_1	p_2	p_3	p_4	p_5
1	0,1	0,045	0,0285	0,0207	0,0161
2	0,2	0,080	0,0480	0,0336	0,0255
3	0,3	0,105	0,0595	0,0402	0,0297
4	0,4	0,120	0,0640	0,0416	0,0299
5	0,5	0,125	0,0625	0,0391	0,0273
6	0,6	0,120	0,0560	0,0336	0,0228
7	0,7	0,105	0,0455	0,0262	0,0173
8	0,8	0,080	0,0320	0,0176	0,0113
9	0,9	0,045	0,0165	0,0866	0,0537

Zusatz zu §. 38.

I. Es sind irgend eine Anzahl zu gegebenen Zeiten $a, b, c, \ldots n$ beobachteter Werthe $u_a, u_b, u_c, \ldots u_n$ einer Grösse u gegeben; man soll die Werthe der successiven Differentialquotienten dieser Grösse für eine andere Zeit x berechnen:

Man hat

$$\frac{d u_x}{d x} = \pm \left\{ \frac{b\, c \ldots n \left(\frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \cdots \frac{1}{n}\right)}{(a-b)\,(a-c)\ldots(a-n)} \right. u_a + \cdots$$

$$\frac{d^2 u_x}{d x^2} = \mp \left\{ \frac{b\, c \ldots n \left(\frac{1}{b\,c} + \frac{1}{b\,d} + \cdots \frac{1}{m\,n}\right)}{1.2.(a-b)(a-c)\ldots(a-n)} \right. u_a + \cdots$$

Laplace's Methode zur Berechnung von Kometenbahnen beruht auf diesem Satze.

II. Drei Beobachtungswerthe, u_a, u_b, u_c, einer Grösse u in der Nähe ihres Maximums oder Minimums, sowie die zugehörigen Beobachtungszeilen a, b, c sind gegeben; man soll die Zeit x des Maximums oder Minimums selbst finden.

Es ist

$$x = \frac{1}{2} \frac{(b^2 - c^2) u_a + (c^2 - a^2) u_b + (a^2 - b^2) u_c}{(b - c) u_a + (c - a) u_b + (a - b) u_c}.$$

§. 39.

Algebra der litteralen Gleichungen.

1) Man schreibt die canonische Form wie folgt:

$$a x^n + \binom{n}{1} b x^{n-1} y + \cdots \binom{n}{1} s x y^{n-1} + t y^n$$
$$= (a b c \ldots t) \wedge (x y)^n \text{ (Cayley).}$$

2) Sei gegeben

$$f(x) = x^n + a x^{n-1} + b x^{n-2} + \cdots + t = 0$$

und es werde gesetzt

$$x = y + z,$$

so dass

$$f(x) = y^n + A y^{n-1} + B y^{n-2} + \cdots \quad T = 0,$$

so ist:

$$A = \frac{f^{n-1}(z)}{(n-1)!}, \quad B = \frac{f^{n-2}(z)}{(n-2)!}, \ldots \quad f^{\varkappa}(z) = \frac{\partial^{\varkappa} f(z)}{\partial z^{\varkappa}}.$$

3) Soll das $r$te Glied in der Transformirten $= 0$ sein, so bestimme man z aus der Gleichung

$$\frac{f^{n-r+1}(z)}{(n-r+1)!} = 0.$$

3) Schafft man das zweite Glied aus

$$(a b c d \ldots t) \wedge (x y)^n$$

ab, so wird:

$$y^n - \binom{n}{2} \frac{1}{a^2} V_2 y^{n-2} + \binom{n}{3} \frac{1}{a^3} V_3 y^{n-3} - \cdots = 0.$$

Die Coefficienten

$$V_2 = b^2 - a c$$
$$V_3 = 2 b^3 - 3 a b c + a^2 d$$
$$V_4 = 3 b^4 - 6 a b^2 c + 4 a^2 b d - a^3 e$$

werden der Reihe nach quadratische, cubische etc. Variante genannt.

4) Die Coefficienten, die man bei der Fortschaffung des vorletzten Gliedes erhält, werden Retrovarianten genannt und mit doppeltem Index bezeichnet:

$V'_2 = b^2 - a c$, quadratische Retrovariante der can. Form.

$(a\,b\,c\,d)^{\wedge}(x\,1)^3$ $(a\,b\,c\,d\,e)^{\wedge}(x\,1)^4$

$V_{23} = c^2 - d\,b$ $V_{24} = d^2 - c\,e$

$V_{33} = 2\,c^3 - 3\,b\,c\,d + d^2\,a$ $V_{34} = 2\,d^3 - 3\,c\,d\,e + c^2\,b$

$V_{44} = 3\,d^4 - b\,e\,d^2\,c + 4\,e^2\,d\,b - e^3\,a.$

5) Das Absolutglied der Summengleichung wird Geminante, G_n, und das Absolutglied der Differenzengleichung Discriminante, D_n, genannt.

Um die Geminante zu bilden, eliminire man x aus

$$f(x) = 0 \quad \text{und} \quad f(-x) = 0.$$

Um für

$$f = (a\,b\,c \cdots t)^{\wedge}(x\,y)^n$$

die Discriminante zu bilden, eliminire man x und y aus

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0 \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 0.$$

6) Die symmetrischen Functionen der Wurzeln.

Sei

$$\sum_1^n x_\varkappa^m = S_m \quad \sum_1^n x_\varkappa^m x_\lambda^p = S_{mp} \text{ etc.,}$$

so ist für

$$f(x) = x^n + a\,x^{n-1} + \cdots + t$$

$S_1 + a = 0$

$S_2 + a\,S_1 + 2\,b = 0$

$S_3 + a\,S_2 + b\,S_1 + 3\,c = 0$

$S_m + a\,S_{m-1} + \cdots + m\,t = 0$

$S_{m+n} + a\,S_{m+n-1} + \cdots + t\,S_m = 0,$

oder

$S_1 = -a$

$S_2 = a^2 - 2\,b$

$S_3 = -a^3 + 3\,a\,b - 3\,c$

$S_4 = a^4 - 4\,a^2\,b + 4\,a\,c + 4\,b^2 - 4\,d$

$S_5 = -a^5 + 5\,a^3\,b + 5\,a\,b^2 - 5\,a^2\,c + 5\,a\,d + 5\,b\,c - 5\,e$

$S_{11} = b$

$S_{112} = S(x_1^2\,x_2) = -a\,b + 3\,c$

$S_{1112} = a^2 b - 2b^2 - ac + 4d^2$
$S_{1122} = b^2 - 2ac + 2d$
$S_{1123} = bc - 4d.$

7) Von den Reducenten.

Reducenten werden gewisse Functionen der Coefficienten $abc\ldots$ der Hauptgleichung genannt, welche verschwinden, wenn sich die Gleichungen auf einfachere reduciren lassen.

1. Die Reducenten der quadratischen Gleichungen.

$$(abc)^\wedge(xy)^2.$$

Ist

a) die Geminante $- b_2 = a = 0$, so hat die Gleichung zwei Wurzeln mit ungleichem Vorzeichen.
b) ist die Discriminante $ac - b^2 = 0$, so hat die Gleichung zwei gleiche Wurzeln.

2. Die Reducenten der cubischen Gleichungen.

a) Ist $ac - b^2 = 0 \quad ad - bc = 0 \quad bd - c^2 = 0$, so sind alle drei Wurzeln gleich.
b) Ist die cubische Variante $2b^3 - 3abc + a^2 d = V_3 = 0$, so ist die eine Wurzel das arithmetische Mittel der beiden anderen.
c) Ist die cubische Retrovariante $2c^3 - 3bcd + ad^2 = V_{3,3} = 0$, so ist die eine Wurzel das harmonische Mittel der beiden anderen.
d) Ist $b^3 d - ac^3 = 0$, so ist die eine Wurzel das geometrische Mittel der beiden anderen.
e) Ist $(ad - bc)^2 - 4(ac - b^2)(bd - c^2) = 0$, d. h. die Discriminante $= 0$, so hat die Gleichung mindestens zwei gleiche Wurzeln.

3. Die Reducenten der biquadratischen Gleichungen.

a) Ist $2b^3 - 3abc + a^2 d = 0$, so bilden die vier Wurzeln eine arithmetische Proportion.
b) Ist die cubische Retrovariante $2d^3 - 3cde + e^2 b = 0$, so bilden die vier Wurzeln eine harmonische Proportion.

c) Ist $b^2c - ad^2 = 0$, so bilden die Wurzeln eine geometrische Proportion.

d) Ist $2b^3e - 3ace + 2ad^2 = 0$, so haben die vier Wurzeln je drei und ein gleiche Vorzeichen und ihre Quadrate bilden eine geometrische Proportion.

e) Ist die Geminante $b^2e - 6bcd + ad^2 = 0$, so hat die Gleichung mindestens ein Paar gleicher Wurzeln mit entgegengesetztem Vorzeichen.

f) Ist $16b^4 - 24ab^3c + 8a^2bd - a^3e = 0$, so ist die eine Wurzel gleich der Summe der beiden anderen.

g) Ist $3b^4 - 6ab^2c + 4a^2bd - a^3e = 0$, d. h. die biquadratische Variante $= 0$, so ist die eine Wurzel gleich dem arithmetischen Mittel der beiden anderen.

8) Beurtheilung der Wurzeln nach den Discriminanten.

a) Cubische Gleichungen: $(abcd)\bigwedge(x\,1)^3$

$$\overline{D}_3 = (bc - ad)^2 - 4(b^2 - ac)(c^2 - bd).$$

Ist

$\overline{D}_3 > 0$, so sind zwei Wurzeln complex,

$\overline{D}_3 < 0$, so sind alle Wurzeln reell,

$\overline{D}_3 = 0$, so sind zwei Wurzeln einander gleich und alle reell.

b) Biquadratische Gleichungen: $(abcde)\bigwedge(x\,1)^4$

$$\overline{D}_4 = \begin{vmatrix} a & 3b & 3c & d & 0 & 0 \\ 0 & a & 3b & 3c & d & 0 \\ 0 & 0 & a & 3b & 3c & d \\ b & 3c & 3d & e & 0 & 0 \\ 0 & b & 3c & 3d & e & 0 \\ 0 & 0 & b & 3c & 3d & e \end{vmatrix}$$

Ist nun

$\overline{D}_4 > 0$, so sind entweder alle Wurzeln reell, oder alle Wurzeln complex,

$\overline{D}_4 < 0$, so sind zwei reell und zwei complex,

$\overline{D}_4 = 0$, so sind zwei Wurzeln gleich.

Literatur und Theorie vide Matthiessen, Grundzüge der antiken und modernen Algebra der litteralen Gleichungen. Leipzig 1878.

§. 40.

Die wichtigsten Sätze aus der Theorie der Gleichungen.

Sei

$$f(x) = x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots \quad a_1 x + a_0 = 0$$

so gelten folgende Sätze:

1) Ist $n = 2\nu + 1$, so hat die Gleichung wenigstens eine reelle Wurzel, deren Vorzeichen das Entgegengesetzte des letzten Gliedes ist.

2) Ist $n = 2\nu$ und a_0 negativ, so sind wenigstens zwei reell ungleich bezeichnete Wurzeln vorhanden.

Satz von Harriot-Descartes.

3) Eine vollständige Gleichung hat höchstens so viele + Wurzeln, als Zeichenwechsel, und höchstens so viele negative, als Zeichen folgen. Fehlende Glieder sind durch ± 0 zu ergänzen.

4) Sind alle Wurzeln reell, so hat die Gleichung genau so viel Zeichenwechsel, wie +, und Zeichenfolgen, wie — Wurzeln.

5) Eine vollständige Gleichung mit lauter Zeichenwechseln kann keine — und eine solche mit lauter Zeichenfolgen keine + Wurzeln haben.

Sätze von Du Gua.

6) Wenn zwischen zwei Gliedern einer unvollständigen Gleichung $2n$ Glieder fehlen, so hat dieselbe wenigstens $2n$ complexe Wurzeln.

7) Fehlen $2n + 1$ Glieder, so sind mindestens $2n + 2$, oder $2n$ complexe Wurzeln vorhanden, je nachdem die einschliessenden Glieder gleich oder ungleich bezeichnet sind.

Satz von Budan-Fourier.

8) Hat die Gleichung $f(x + \alpha)$ m Zeichenwechsel mehr als die Gleichung $f(x + \beta)$, so hat $f(x) = 0$ zwischen den Grenzen α und β höchstens m reelle Wurzeln.

Satz von Sturm.

9) Sei

$$x = f(x) = 0, \; x_1 = f'(x) = 0.$$

Sei ferner:

$$x = x_1\, Q - x_2$$
$$x_1 = x_2\, Q_2 - x_3$$
$$\cdot \;\cdot \;\cdot \;\cdot \;\cdot \;\cdot \;\cdot$$
$$x_{m-2} = x_{m-1}\, Q_{m-1} - x_m$$

$x_2\, x_3 \ldots$ sind die — genommenen Reste und $Q_1\, Q_2 \ldots$ die Quotienten, die sich bei der Aufsuchung des grössten gemeinschaftlichen Maasses zwischen x und x_1 ergeben.

10) Setzt man in die Reihe

$$x\, x_1\, x_2 \ldots x_m$$

das eine Mal $x = \alpha$, das andere Mal $x = \beta$, so liegen zwischen α und β genau so viele reelle Wurzeln, als die erste Reihe mehr Zeichenwechsel enthält als die zweite.

NB. Aendert eine Gleichung x_r für keinen Werth von x ihr Zeichen, so enthält x_r lauter complexe Wurzeln. Man kann sich sodann auf die Betrachtung der Functionen $x\, x_1 \ldots x_{r-1}\, x_r$ beschränken.

Die äussersten Grenzen der reellen Wurzeln.

1) Ist a_{n-1} —, jeder folgende Coefficient $+$, so ist a_{n-1} die obere Grenze der $+$ Wurzeln.

2) Sei a_r der grösste — Coefficient, so ist (a_r absolut genommen) $a_r + 1$ die obere Grenze der $+$ Wurzeln.

3) Um die untere Grenze der $+$ Wurzeln zu finden, setze $x = \frac{1}{x'}$ und ermittele dieselbe für x'.

Anhang.

Eine Zahl a, die ganz ist, kann nur dann eine Wurzel der Gleichung $f(x) = 0$ sein, wenn $f(\pm 1)$ durch $a \mp 1$ theilbar ist.

Eine Gleichung besitzt gleiche Wurzeln, wenn für $f(x) = 0$ und $f'(x) = 0$ ein gemeinschaftlicher Theiler existirt.

Die Beweise dieser Sätze suche in:

Serret, Handbuch der höheren Algebra, D. v. Wertheim. Leipzig 1868.

§. 41.

Cubische Gleichungen.

1) $x^3 + ax + b = 0, \quad x = \frac{3y^2 - a}{3y}, \quad y^6 + by^3 + \frac{a^3}{27} = 0$

2) $x^3 + ax^2 + bx + c = 0, \quad x = y - \frac{a}{3},$

$$y^3 - \left(\frac{a^2}{3} - b\right)y + \left(c - \frac{ab}{3} + \frac{2a^3}{27}\right) = 0$$

3) $x^3 + ax^2 + b = 0, \quad x = \frac{1}{y}, \quad y^3 - \frac{a}{b}y + \frac{1}{b} = 0$

4) $x^3 + ax + b = 0$

$$x = \sqrt[3]{-\frac{b}{2} + \sqrt{\frac{b^2}{4} - \frac{a^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{b}{2} - \sqrt{\frac{b^2}{4} - \frac{a^3}{27}}}$$

5) Sei $tgn\,\beta = \frac{2p}{3q}\sqrt{\frac{p}{3}}, \quad tgn\,\alpha = \sqrt[3]{tgn\,\frac{\beta}{2}}$

$$x^3 + px + q = 0, \quad x = -\,cotg\,2\alpha \,.\, 2\sqrt{\frac{p}{3}}$$

6) $x^3 + px - q = 0 \quad x = cotg\,2\alpha \,.\, 2\sqrt{\frac{p}{3}}$

7) $x^3 - px + q = 0 \quad 4p^3 < 27q^2$

8) $x^3 - px - q = 0 \quad 4p^3 < 27q^2$

$$\left.\right\} \quad x = 2\,\frac{\sqrt{\frac{p}{3}}}{sin\,2\alpha}$$

9) $x^3 - px + q = 0 \quad 4p^3 > 27q^2 \quad sin\,3\alpha = \frac{3q}{2p}\sqrt{\frac{3}{p}}$

$$x_1 = 2\sqrt{\frac{p}{3}}\,sin\,\alpha$$

$$x_2 = 2\sqrt{\frac{p}{3}}\,sin\,(60 - \alpha)$$

$$x_3 = -\,2\sqrt{\frac{p}{3}}\,sin\,(60 + \alpha)$$

10) $x^3 - px - q = 0 \quad 4p^3 > 27q^2$

$$x_1 = -2\sqrt{\frac{p}{3}}\sin\alpha$$

$$x_2 = -2\sqrt{\frac{p}{3}}\sin(60-\alpha)$$

$$x_3 = +2\sqrt{\frac{p}{3}}\sin(60+\alpha).$$

§. 42.

Biquadratische Gleichungen.

Sei gegeben

$$x^4 + ax^2 + bx + c = 0,$$

berechne z aus

$$z^3 + 2az^2 + (a^2 + 4c)z - b^2 = 0.$$

Sei ferner b positiv, so ist $\sqrt{z_x} = \zeta_x$

$$2x_1 = \zeta_1 + \zeta_2 - \zeta_3$$
$$2x_2 = \zeta_1 - \zeta_2 + \zeta_3$$
$$2x_3 = -\zeta_1 + \zeta_2 + \zeta_3$$
$$2x_4 = -\zeta_1 - \zeta_2 - \zeta_3.$$

Ist dagegen b negativ, so wird:

$$2x_1 = \zeta_1 + \zeta_2 + \zeta_3$$
$$2x_2 = \zeta_1 - \zeta_2 - \zeta_3$$
$$2x_3 = -\zeta_1 + \zeta_2 - \zeta_3$$
$$2x_4 = -\zeta_1 - \zeta_2 + \zeta_3 \quad \text{(Euler).}$$

§. 43.

Gleichungen fünften Grades.

$$x^5 - x - a = 0,\quad A = \tfrac{1}{2}\sqrt[4]{5^5 - a},\quad \sin\alpha = \frac{4}{A^3},\quad \varkappa = tgn\frac{\alpha}{4},$$

$$K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-\varkappa^2\sin^2\varphi}},\quad K' = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-\varkappa_1^2\sin^2\varphi}},\quad \varkappa^2 + \varkappa_1^2 = 1$$

$$\omega_1 = \frac{K}{5}, \quad \omega_2 = i\,\frac{K}{5}, \quad \omega_3 = \frac{K + iK'}{5}, \quad \omega_4 = \frac{K + 2iK'}{5}$$

$$\omega_5 = \frac{K + 3iK'}{5} \quad \omega_6 = \frac{K + 4iK'}{5}$$

$$u^8 = \varkappa^2$$

$$v_\lambda = u^5 \sin am\,\{K - 4\,\omega_\lambda\}\, \sin am\,\{K - 8\,\omega_\lambda\}$$

$$\lambda = 1, 2, 3, 4, 5, 6.$$

Sei

$$(v_m - v_n) = (mn),$$

so wird

$$x = \frac{z}{2}\,\frac{1}{\sqrt[4]{5^3}\sqrt[4]{\varkappa}\sqrt{1-\varkappa^2}}$$

$$z_1 = (12)\,(26)\,(45)$$
$$z_2 = (22)\,(31)\,(56)$$
$$z_3 = (32)\,(43)\,(61)$$
$$z_4 = (42)\,(54)\,(13)$$
$$z_5 = (52)\,(14)\,(34) \text{ (Hermite).}$$

§. 44.

Näherungsmethoden zur Auflösung der Gleichungen.

1) Seien x_1 und x_2 zwei Näherungswerthe einer Wurzel der Gleichung

$$y = f(x) = 0,$$

und zwar so, dass y_1 und y_2 entgegengesetzte Zeichen haben, so ist

$$x_3 = \frac{y_1 x_2 - x_1 y_2}{y_1 - y_2} = x_1 - \frac{x_1 - x_2}{y_1 - y_2}\,y_1 = x_2 - \frac{x_1 - x_2}{y_1 - y_2}\,y_2$$

ein neuer Näherungswerth. (*Regula falsi.*)

2) Seien x_1 und x_2 zwei Näherungswerthe einer reellen Wurzel von

$$y = f(x) = 0,$$

so dass y_1 und y_2 entgegengesetzte Zeichen und weder $f'(x) = 0$ noch $f''(x) = 0$ zwischen x_1 und x_2 eine Wurzel haben, so sind

$$x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} \quad \text{und} \quad x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)}$$

zwei neue Näherungswerthe. (Methode von Newton.)

3) Sei

$$\varphi(x) = 0, \quad \varphi(a) = \alpha,$$

a eine ganze Zahl und

$$a \lesseqgtr x \lesseqgtr a + 1,$$

setze

$$x = \frac{1}{x_1} + a,$$

dieses giebt

$$\varphi\left(a + \frac{1}{x_1}\right) = \psi(x_1) = 0.$$

Sei nun

$$a_1 \lesseqgtr x_1 \lesseqgtr a_1 + 1,$$

a_1 eine ganze Zahl etc., so wird

$$x = a + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cdots}} \quad \text{(Methode von Lagrange).}$$

4) Sei $f(y + zi) = 0$, so ist y und z gegeben durch:

$$\left.\begin{aligned} f(y) - \frac{f''(y)}{2!} z^2 + \frac{f''''(y)}{4!} z^4 - \cdots = 0 \\ f'(y) - \frac{f'''(y)}{3!} z^2 + \frac{f^{(V)}(y)}{5!} z^4 - \cdots = 0 \end{aligned}\right\} z \gtrless 0$$

5) Seien

$$f(x,y) = 0 \quad \varphi(x,y) = 0$$

gegeben, und

$$x_1 y_1, \quad x_2 y_2, \quad x_3 y_3$$

drei Paare von Näherungswerthen, und sei

$$z_\varkappa = f(x_\varkappa y_\varkappa), \quad \zeta_\varkappa = \varphi(x_\varkappa y_\varkappa), \quad \varkappa = 1, 2, 3,$$

$$\Delta_1 = z_2 \zeta_3 - z_3 \zeta_2, \quad \Delta_2 = z_3 \zeta_1 - z_1 \zeta_3, \quad \Delta_3 = z_1 \zeta_2 - z_2 \zeta_1;$$

so ist genauer

$$x_4 = \frac{x_1 \Delta_1 + x_2 \Delta_2 + x_3 \Delta_3}{\Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3}$$

$$y_4 = \frac{y_1 \Delta_1 + y_2 \Delta_2 + y_3 \Delta_3}{\Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3}.$$

6) Seien x_1 und y_1 die Näherungswerthe zu

$$f_1(xy) = 0, \quad f_2(xy) = 0.$$

Man bestimme ξ und η aus:

$$f_1(x_1 y_1) + \frac{\partial f_1(x_1 y_1)}{\partial x} \xi + \frac{\partial f_1(x_1 y_1)}{\partial y} \eta = 0$$

$$f_2(x_1 y_1) + \frac{\partial f_2(x_1 y_1)}{\partial x} \xi + \frac{\partial f_2(x_1 y_1)}{\partial y} \eta = 0,$$

so sind

$$x_1 + \xi \quad \text{und} \quad y_1 + \eta$$

zwei neue Näherungswerthe.

Die Litteratur der Theorie der Gleichungen findet man in den „Grundzügen der ant. und mod. Algebra" von L. Matthiessen, Leipzig 1878. Praktisch sehr zu empfehlen:

Scheffler's Auflösung der algebr. und transcend. Gleichungen. Braunschweig 1859.

§. 45.

Die Determinanten.

1) $$\varDelta = \sum \pm a_1 b_2 c_3 = (a_1 b_2 c_3) = \begin{vmatrix} a & b & c \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

$$\begin{array}{ccccc} & a_1 & b_1 & c_1 & \\ & a_2 & b_2 & c_2 & \\ & a_3 & b_3 & c_3 & \\ - & a_1 & b_1 & c_1 & + \\ - & a_2 & b_2 & c_3 & + \\ - & & & & + \end{array}$$

2) $$\varDelta = a_1 b_2 c_3 + a_2 b_3 c_1 + a_3 b_1 c_3 - a_3 b_2 c_1 - a_1 b_3 c_2 - a_2 b_1 c_3$$

3) $$\varDelta = -(b_1 a_2 c_3) = +(b_1 c_2 a_3) = -(c_1 b_2 a_3)$$

4) $$\varDelta = \frac{1}{\alpha \beta \gamma} \begin{vmatrix} a_1 \alpha, b_1 \beta, c_1 \gamma \\ a_2 \alpha, b_2 \beta, c_2 \gamma \\ a_3 \alpha, b_3 \gamma, c_3 \gamma \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 + b_1 q_1 + c_1 q_2, b_1 + c_1 r, c_1 \\ a_2 + b_2 q_1 + c_2 q_2, b_2 + c_2 r, c_2 \\ a_3 + b_3 q_1 + c_3 q_2, b_3 + c_3 r, c_3 \end{vmatrix}$$

5) $$\varDelta = \sum a_x \frac{\partial \varDelta}{\partial a_x} = \sum (a_x b_n) \frac{\partial^2 \varDelta}{\partial a_x \partial b_n} = \cdots$$

6) $$\begin{vmatrix} 1 & \alpha_1 & \alpha_1^2 \ldots \alpha_1^{n-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ 1 & \alpha_n & \alpha_n^2 \ldots \alpha_n^{n-1} \end{vmatrix} = \begin{array}{r} (\alpha_2 - \alpha_1)(\alpha_3 - \alpha_1)\ldots(\alpha_n - \alpha_1) \\ (\alpha_3 - \alpha_2)\ldots(\alpha_n - \alpha_2) \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ (\alpha_n - \alpha_{n-1}) \end{array}$$

$$= 2^{n-2} 3^{n-3} \ldots (n-1) \begin{vmatrix} 1 \binom{\alpha_1}{1} \ldots \binom{\alpha_1}{n-1} \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ 1 \binom{\alpha_n}{1} \ldots \binom{\alpha_n}{n-1} \end{vmatrix}$$

7) Sei
$$f(x) = (x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n),$$
so wird:
$$\frac{\Delta(x_1 x_2 \dots x_n)\,\Delta(\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n)}{f(x_1) f(x_2) \dots f(x_n)} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{1.2}} \sum \pm \frac{1}{x - \alpha_1} \cdots \frac{1}{x - \alpha_n}.$$

8) $$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1\alpha_1 + b_1\beta_1 & a_1\alpha_2 + b_1\beta_2 \\ a_2\alpha_1 + b_2\beta_1 & a_2\alpha_2 + b_2\beta_2 \end{vmatrix}$$

9) $$\begin{vmatrix} a_{11} \dots a_{1n} \\ \vdots \quad \vdots \\ a_{n1} \dots a_{nn} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} b_{11} \dots b_{1n} \\ \vdots \quad \vdots \\ b_{n1} \dots b_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sum a_{1x} b_{x1} \dots \sum a_{1x} b_{xn} \\ \\ \sum a_{nx} b_{x1} \dots \sum a_{nx} b_{nx} \end{vmatrix}$$
$$= \begin{vmatrix} \sum a_{x1} b_{x1} \dots \sum a_{x1} b_{nx} \\ \\ \sum a_{xn} b_{1x} \dots \sum a_{xn} b_{nx} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sum a_{x1} b_{x1} \dots \sum a_{x1} b_{xn} \\ \\ \sum a_{xn} b_{x1} \dots \sum a_{xn} b_{xn} \end{vmatrix}$$

10) $$\begin{vmatrix} x^2 + y^2 + z^2, & x x_1 + y y_1 + z z_1 \\ x x_1 + y y_1 + z z_1, & x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 \end{vmatrix}$$
$$= \begin{vmatrix} x & y \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x & z \\ x_1 & z_1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} y & z \\ y_1 & z_1 \end{vmatrix}^2$$

11) Ist
$$a_1 x + b_1 y + c_1 z = d_1$$
$$a_2 x + b_2 y + c_2 z = d_2$$
$$a_3 x + b_3 y + c_3 z = d_3$$
so wird:
$$x(a_1 b_2 c_3) = (d_1 b_2 c_3),\ y(a_1 b_2 c_3) = (a_1 d_2 c_3),\ z(a_1 b_2 c_3) = (a_1 b_2 d_3).$$
12) Sei
$$\Delta = \sum a_m A_m = \sum b_m B_m = \cdots \sum l_m L_m,\quad m = 1, 2, \dots n,$$
wobei $A_m B_m \dots L_m$ die Unterdeterminanten sind, sei ferner
$$\Delta' = \sum \pm A_1 B_2 \dots L_n,$$
so wird Δ' die reciproke Determinante genannt. Gleichliegende Elemente, z. B. a_n in Δ und A_n in Δ', werden adjungirte Elemente genannt.

Es gelten nun folgende Sätze:

13) $$\Delta' = \Delta^{n-1}$$

14) $$a_1 \Delta^{n-2} = (B_2 C_3 \dots L_n)$$
$$(a_1 b_2) \Delta^{n-3} = (C_3 D_4 \dots L_n) \text{ etc.}$$

15) $$(\Delta')^n = (\Delta^n)'$$

16) Ist in
$$\Delta = \sum \pm a_{11} a_{22} \dots a_{nn}$$
$a_{i\varkappa} = a_{\varkappa i}$, so wird sie **symmetrisch**, ist dagegen
$a_{i\varkappa} = - a_{\varkappa i}$, so wird sie **symmetral** genannt.

Das Quadrat einer Determinante ist eine symmetrische Determinante.

17) Für die Unterdeterminanten einer symmetrischen Determinante gilt der Satz:
$$A_{i\varkappa} = A_{\varkappa i}.$$

18) Ist ferner
$$a_{\varkappa i} = - a_{i\varkappa} \quad \text{und} \quad a_{ii} = 0,$$
so ist die Determinante ein Quadrat.

19) Ist
$$a_{\varkappa i} = - a_{i\varkappa} \quad \text{und} \quad a_{ii} = z,$$
so wird
$$\Delta = z^n + z^{n-2} P + z^{n-4} Q + \cdots$$
dabei sind $P, Q \dots$ Summen von Quadraten.

Litteratur und Beweise suche in **Balzer**: Theorie und Anwendung der Determinanten. Leipzig.

Jacobi, Crelle's Journ. Bd. XXII.

§. 46.

Die linearen und orthogonalen Substitutionen.

1) Die Substitution
$$x_\varkappa = b_{\varkappa 1} y_1 + b_{\varkappa 2} y_2 + \cdots \; b_{\varkappa n} y_n, \quad \varkappa = 1, 2, \dots n$$
heisst eine **lineare**.

2) $M = \sum \pm b_{11} b_{22} \dots b_{nn}$ wird die Determinante (Modulus) der Substitution genannt.

Ist $M = \pm 1$, so nennt man die Substitution **unimodular**.

3) Wird

$$f_\varkappa = a_{\varkappa 1} x_1 + a_{\varkappa 2} x_2 + \cdots a_{\varkappa n} x_n$$

durch

$$x_\varkappa = b_{\varkappa 1} y_1 + b_{\varkappa 2} y_2 + \cdots b_{\varkappa n} y_n$$

transformirt in

$$f_\varkappa = c_{\varkappa 1} y_1 + c_{\varkappa 2} y_2 + c_{\varkappa n} y_n,$$

so ist

$$\sum \pm c_{11} c_{22} \dots c_{nn} = \sum \pm a_{11} a_{22} \dots a_{nn} \sum \pm b_{11} b_{22} \dots b_{nn}.$$

4) Eine lineare Substitution wird **orthogonal** genannt, wenn

$$y_1^2 + y_2^2 + \cdots y_n^2 = x_1^2 + x_2^2 + \cdots x_n^2.$$

5) Sei

$$x_\varkappa = c_{\varkappa 1} y_1 + c_{\varkappa 2} y_2 + \cdots c_{\varkappa n} y_n$$

eine orthogonale Substitution, so wird:

$$c_{1\varkappa}^2 + c_{2\varkappa}^2 + \cdots + c_{n\varkappa}^2 = 1$$

$$c_{1j} c_{1\varkappa} + c_{2j} c_{2\varkappa} + \cdots c_{nj} c_{n\varkappa} = 0,$$

ferner

$$\sum \pm c_{11} c_{22} \dots c_{nn} = \pm 1.$$

Vergleiche auch: Functionaldeterminanten.

Litteratur: Balzer, Theorie und Anwendung der Determinanten. III. Aufl., §. 14.

§. 47.

Die homogenen Functionen und Formen.

Sei f eine homogene Function der Variablen

$$x_1 x_2 \dots x_n$$

von der Ordnung m, so wird:

1) $f(x_1 t\; x_2 t \dots x_n t) = t^{n+m} f(x_1 x_2 \dots x_n)$

2) $n(n-1)\dots(n-q+1) f = \left(\sum_1^n x^\varkappa \frac{1}{\partial x_\varkappa} \right)^q \partial^q f$ (Euler's Satz).

Sei

$$f = u, \quad \frac{\partial f}{\partial x_\varkappa} = u_\varkappa, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_\varkappa \partial x_n} = u_{\varkappa n},$$

so wird

$$\sum \pm \frac{m}{m-1} u, u_{11}, \dots u_{nn} = 0.$$

Die homogene Function u von m Dimensionen wird, wenn sie rational und ganz ist und ganze Coefficienten hat, eine **Form $m$ten Grades** (quadratisch, cubisch, ...), von n willkürlichen Variablen (binär, ternär, ...) genannt.

Sei

$$u = \sum_{i\varkappa} a_{i\varkappa} x_i x_\varkappa$$

eine quadratische Form, so wird

$$R = -\sum \pm a_{11} a_{22} \ldots a_{nn}$$

die Determinante der Form u genannt. Sei $b_{i\varkappa}$ der Coefficient von $a_{i\varkappa}$ in R, so ist die Form

$$u = -\sum_{i\varkappa} b_{i\varkappa} y_i y_\varkappa$$

der Form u adjungirt.

Die Determinante der adjungirten Form ist die $(n - 1)$te Potenz der Determinante der Form.

Vergleiche: **Balzer**, Theorie und Anwendung der Determinanten, §. 13.

§. 48.

Die Functional-Determinanten.

1) Seien $y_1 y_2 \ldots y_n$ Functionen von $x_1 x_2 \ldots x_n$, so wird

$$\Delta = \sum \pm \frac{\partial y_1}{\partial x_1} \frac{\partial y_2}{\partial x_2} \cdots \frac{\partial y_n}{\partial x_n}$$

die Functional- oder **Jacobi**'sche Determinante genannt, und mit

$$\Delta = \frac{\partial (y_1 y_2 \ldots y_n)}{\partial (x_1 x_2 \ldots x_n)}$$

bezeichnet.

2) Sind $y_1 y_2 \ldots y_n$ nicht unabhängig, sondern durch

$$\varphi (y_1 y_2 \ldots y_n) = 0$$

verbunden, so ist $\Delta = 0$ und umgekehrt.

3) Sind die Grössen y durch

$$F_1 (x_1 \ldots x_n\, y_1 \ldots y_n) = 0$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$F_n (x_1 \ldots x_n\, y_1 \ldots y_n) = 0$$

gegeben, so ist:

$$\sum \pm \frac{\partial y_1}{\partial x_1} \frac{\partial y_2}{\partial x_2} \cdots \frac{\partial y_n}{\partial x_n} = (-1)^n \frac{\sum \pm \frac{\partial F_1}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial F_n}{\partial x_n}}{\sum \pm \frac{\partial F_1}{\partial y_1} \cdots \frac{\partial F_n}{\partial y_n}}$$

4) Seien $y_1 y_2 \ldots y_n$ Functionen von $x_1 x_2 \ldots x_n$, so sind auch $x_1 \ldots x_n$ Functionen von $y_1 y_2 \ldots y_n$, die Functionen sollen in beiden Fällen von einander unabhängig sein, sodann ist:

$$\sum \pm \frac{\partial y_1}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial y_n}{\partial x_n} \cdot \sum \pm \frac{\partial x_1}{\partial y_1} \cdots \frac{\partial x_n}{\partial y_n} = 1.$$

5) Sei

$$y_{ij} = \frac{\partial^2 y}{\partial x_i \, \partial x_j},$$

so wird die Determinante

$$H = \sum \pm y_{11} y_{22} \ldots y_{nn}$$

die Hesse'sche genannt.

6) Ist $H = 0$, so ist immer

$$a_1 y_1 + a_2 y_2 + \cdots \; a_n y_n = 0,$$

wo $a_1 a_2 \ldots a_n$ constante Grössen sind, und

7) die Function y kann durch eine lineare Substitution auf eine homogene Function von $(n - 1)$ Variablen reducirt werden und umgekehrt.

8) Die Hesse'sche Determinante der transformirten Function unterscheidet sich von der der Originalfunction nur um einen mit dem Quadrat des Modulus der Transformation übereinstimmenden Factor, d. h.

$$H(f_y) = H(f_x) \cdot M^2.$$

9) Wenn die H einer homogenen ganzen Function von n Variablen identisch verschwindet und ausserdem der partielle Differentialquotient derselben nach einem ihrer Elemente, so verschwinden auch alle übrigen identisch und die Function kann durch eine lineare Substitution auf eine Function von $(n - 2)$ Variablen reducirt werden.

Litteratur: Balzer, Theorie der Determinanten.

Salmon: Vorlesungen zur Einführung in die Algebra der linearen Transformationen. Deutsch von Fiedler.

Clebsch: Theorie der binären Formen u. m. andere.

§. 49.

Wahrscheinlichkeitsrechnung.

1) Sei p die Anzahl der günstigen, q die der ungünstigen, n die der überhaupt möglichen, so dass $p + q = n$, und sei die absolute Wahrscheinlichkeit für das Eintreffen des Ereignisses w, jene für das Nichteintreffen w_1, so ist

$$w = \frac{p}{n}, \quad w_1 = \frac{q}{n}, \quad w + w_1 = 1.$$

Man sagt: ein Ereigniss ist

gewiss,	wahrscheinlich,	zweifelhaft,	unwahrscheinlich,	unmöglich, wenn
$w = 1,$	$> \frac{1}{2}$	$= \frac{1}{2}$	$< \frac{1}{2}$	$= 0.$

2) Sei die Anzahl aller Fälle n, der dem Ereigniss A günstigen p, der dem Ereigniss B günstigen q und $p + q < n$, so ist, wenn alle übrigen Fälle unberücksichtigt bleiben, die Wahrscheinlichkeit für das Eintreffen des Ereignisses

$$A \cdots \frac{p}{p+q} = \frac{w_A}{w_A + w_B}$$

$$B \cdots \frac{q}{p+q} = \frac{w_B}{w_A + w_B}$$ (Relative Wahrscheinlichkeit).

3) Seien $w_1 w_2 \ldots w_n$ die Wahrscheinlichkeiten mehrerer einzelnen Ereignisse, so ist die Wahrscheinlichkeit, dass alle diese zusammentreffen

$W = w_1 w_2 w_3 \ldots w_n$ (Zusammengesetzte Wahrscheinlichkeit).

4) Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Ereigniss A, dessen Wahrscheinlichkeit w ist, sich n mal wiederholt, ist:

$$W = (w)^n.$$

5) Seien $w_1 \ldots w_n$ die Wahrscheinlichkeiten der Ereignisse $A B \ldots N$, man fragt nach der Wahrscheinlichkeit, dass das erste, oder wenn dieses nicht, so doch das zweite etc. Ereigniss eintritt, diese ist gegeben durch:

$$W = 1 - (1 - w_1)(1 - w_2) \ldots (1 - w_n).$$

6) Sei s eine zu gewinnende Summe, w die Wahrscheinlichkeit des Gewinnes, so ist

$$s\, w$$

die mathematische Hoffnung oder Erwartung. Hängt der Gewinn von mehreren Ereignissen ab, und seien $s_1\, s_2 \ldots s_n$ die zu erwartenden Summen, $w_1\, w_2 \ldots w_n$ die Wahrscheinlichkeiten jeder dieser Summe, so ist

$$S\,W = s_1 w_1 + s_2 w_2 + \cdots + s_n w_n.$$

7) Seien $w_1\, w_2 \ldots w_n$ die Wahrscheinlichkeiten von $A\,B \ldots N$, und

$$w_1 + w_2 + \cdots + w_n = 1,$$

und man sucht die Wahrscheinlichkeit, dass in

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \alpha$$

Versuchen das Ereigniss A a_1 mal, das Ereigniss B a_2 mal etc. eintritt, so ist die gesuchte Wahrscheinlichkeit gegeben durch:

$$W = \frac{1.2.3 \ldots \alpha!}{a_1!\, a_2! \ldots a_n!} (w_1)^{a_1} (w_2)^{a_2} \ldots (w_n)^{a_n}.$$

8) Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Ereigniss A, dessen Wahrscheinlichkeit w ist, in α Versuchen wenigstens γ mal eintritt, ist:

$$W = (w)^\gamma \left\{1 + \frac{\gamma}{1}(1-w) + \frac{\gamma(\gamma+1)}{1.2}(1-w)^2 + \cdots \right.$$
$$\left. + \frac{(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots\gamma}{1.2.3\ldots(\alpha-\gamma)}(1-w)^{\alpha-\gamma}\right\}.$$

9) Alle bisher betrachteten Wahrscheinlichkeiten waren Wahrscheinlichkeiten a priori, auch deductive Wahrscheinlichkeiten; die folgenden sind Wahrscheinlichkeiten a posteriori oder inductive Wahrscheinlichkeiten. Fundamentalsatz (Bayes, Phil. Trans. 1763). Die Wahrscheinlichkeiten zweier Hypothesen verhalten sich so zu einander, wie die absoluten Wahrscheinlichkeiten der aus diesen Hypothesen resultirenden Ereignisse.

10) Sei in n Versuchen p mal das Ereigniss A, q mal das Ereigniss B eingetreten etc., und seien $P_1\, P_2 \ldots P_n$ die Wahrscheinlichkeiten a priori (gerechnet nach 7) der Hypothesen $H_1\, H_2 \ldots H_n$, so ist die Wahrscheinlichkeit für die Hypothese H_r gegeben durch

$$H_r = \frac{P_r}{P_1 + P_2 + \cdots + P_n}.$$

11) Sei $n = p + q$ die Anzahl der Ereignisse, und es ist p mal das Ereigniss A, q mal das Ereigniss B eingetreten, sei W die Wahrscheinlichkeit, dass in ferneren $n' = p' + q'$ Versuchen

A p' mal und *B* q' mal eintritt. Seien ferner $H_1 H_2 \ldots H_r$ die Hypothesen, $w_1 \ldots w_r$ die absoluten Wahrscheinlichkeiten für das Eintreffen, $v_1 \ldots v_r$ für das Nichteintreffen von *A*, also für das Eintreffen von *B*, so ist

$$W = \binom{n'}{p'} \sum_1^r {}^\lambda H_\lambda w_\lambda^{p'} v_\lambda^{q'}.$$

12) Die Wahrscheinlichkeit einer Hypothese *H*, kraft welcher die absolute Wahrscheinlichkeit des Ereignisses *A*, welches p mal beobachtet wurde, x ist, ist gegeben durch

$$H = \frac{x^p (1-x)^q dx}{\int_0^1 x^p (1-x)^q dx} \quad p + q = n.$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass x innerhalb der Grenzen α und β liegt, ist

$$H = \frac{\int_\alpha^\beta x^p (1-x)^q dx}{\int_0^1 x^p (1-x)^q dx}.$$

13) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit *P* der Hypothese, dass, nachdem in $n = p + q$ Ereignissen *A* p mal, *B* q mal eingetreten, in $n' = p' + q'$ Ereignissen *A* p' mal, *B* q' mal eintritt?

$$P = \binom{p'+q'}{p'} \frac{(p+1)\ldots(p+p')(q+1)\ldots(q+q')}{(p+q+2)\ldots(p+q+p'+q'+1)}$$

oder für sehr grosse $p\,q\,p'\,q'$

$$P = \binom{p'+q'}{p'} \frac{(p+p')^{\left(p+p'+\frac{1}{2}\right)} \cdot (q+q')^{\left(q+q'+\frac{1}{2}\right)} \cdot (p+q)^{\left(p+q+\frac{3}{2}\right)}}{p^{\left(p+\frac{1}{2}\right)} \cdot q^{\left(q+\frac{1}{2}\right)} \cdot (p+q+p'+q')^{\left(p+q+p'+q'+\frac{2}{3}\right)}}$$

14) Das Ereigniss *A* ist p mal eingetreten, das Ereigniss *B* q mal in $n = p + q$ Versuchen, die Wahrscheinlichkeit, dass im $(n+1)$ten Versuche *A* eintritt, ist:

$$\frac{p+1}{p+q+2}.$$

15) In n Versuchen ist *A* eingetreten, die Wahrscheinlichkeit, dass *A* im $(n+1)$ten Versuche eintritt, ist

$$\frac{n+1}{n+2}.$$

16) Sei A n mal eingetreten, so ist die Wahrscheinlichkeit, dass A eher als B eintritt, gleich

$$1 - \frac{1}{2^{n+1}}.$$

Methode der kleinsten Quadrate und die Fehlerrechnung vide 6. Lieferung. Wegen der Ableitungen etc. vide Meyer: Vorlesungen über Wahrscheinlichkeitsrechnung. Deutsch von E. Czuber. Leipzig 1879. Hagen: Grundzüge der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Berlin 1882.

§. 50.

Differenzen-Rechnung.

A. Symbole.

1) $u_x = \varphi(x)$

2) $\Delta u_x = \varphi(x + \Delta x) - \varphi(x)$

3) $\Delta^m \Delta^n u_x = \Delta^{m+n} u_x$ ($\Delta x = 1$ für gewöhnlich)

4) $[x, m] = x(x-1)\ldots(x-m+1)$

5) $D u_x = \varphi(x + \Delta x)$

6) $D = 1 + \Delta$. Symbolisch für $D u_x = u_x + \Delta u_x$

7) $D = e^{\frac{d}{dx}}$ " " $D u_x = u_{x+1} = u_x + \frac{1}{1} \cdot \frac{d u_x}{dx} + \frac{1}{1.2} \frac{d^2 u_x}{dx^2} + \cdots$

8) $D^n = (1 + \Delta)^n$

9) $\Delta = e^{\frac{d}{dx}} - 1$

10) $\Delta^n x^m = (x+n)^m - n(x+n-1)^m + \frac{n(n-1)}{1.2}(x+n-2)^m - \cdots$

11) $\Delta^n 0^m = \Delta^n x^m$ für $x = 0$

12) $\Delta^n 0^n = n!$

13) $\Delta^n 0^m = n^m - n(n-1)^m + \frac{n(n-1)}{1.2}(n-2)^m - \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}(n-3)^m + \cdots$

	Δ^1	Δ^2	Δ^3	Δ^4	Δ^5	Δ^6	Δ^7	Δ^8	Δ^9	Δ^{10}
0^1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0^2	1	2	0	0	0	0	0	0	0	0
0^3	1	6	6	0	0	0	0	0	0	0
0^4	1	14	36	24	0	0	0	0	0	0
0^5	1	30	150	240	120	0	0	0	0	0
0^6	1	62	540	1560	1800	720	0	0	0	0
0^7	1	126	1806	8400	16800	15120	5040	0	0	0
0^8	1	254	5796	40824	126000	191520	141120	40320	0	0
0^9	1	510	18150	186480	834120	1905120	2328480	1451520	362880	0
0^{10}	1	1022	55980	818520	5103000	16435440	29635200	30240000	16329600	3628800

B. Formeln.

14) $\Delta [x, m] = m [x, m-1]$

15) $\Delta \dfrac{1}{[x, m]} = - \dfrac{m}{[x, m-1]}$

16) $\Delta \log u_x = \log \dfrac{u_{x+1}}{u_x}$

17) $\Delta^n a^{mx} = (a^m - 1)^n a^{mx}$

18) $\Delta^n \sin(ax + b) = \left(2 \sin \dfrac{a}{2}\right)^n \sin\left\{ax + b + \dfrac{n(a+\pi)}{2}\right\}$

19) $\Delta^n \cos(ax + b) = \left(2 \sin \dfrac{a}{2}\right)^n \cos\left\{ax + b + \dfrac{n(a+\pi)}{2}\right\}$

20) $\Delta \operatorname{tgn} ax = \dfrac{\sin a}{\cos ax \cos \overline{x+1}\, a}$

21) $\Delta \operatorname{cotg} ax = \dfrac{-\sin a}{\sin ax \sin \overline{x+1}\, a}$

22) $\Delta \dfrac{u_x}{v_x} = \dfrac{v_x \Delta u_x - u_x \Delta v_x}{v_x v_{x+1}}$

23) $\Delta u_x v_x = u_x \Delta v_x + v_x \Delta u_x$

24) Sei u eine Function der Veränderlichen $x\,y\,z\ldots$, deren Differenzen $\Delta x, \Delta y, \Delta z\ldots$ constant sind, so wird

$$\Delta^n u = \left\{\left(1 + \frac{\Delta}{\Delta x}\Delta x\right)\left(1 + \frac{\Delta}{\Delta y}\Delta y\right)\cdots - 1\right\}^n u \text{ (symbolisch).}$$

25) $$\Delta^n u_x = u_{x+n} - n\,u_{x+n-1} + \frac{n(n+1)}{1.2}u_{x+n-2} - \cdots$$

26) $$x^n = \Delta 0^n x + \frac{\Delta^2 0^n}{1.2}[x, 2] + \frac{\Delta^3 0^n}{1.2.3}[x, 3] + \cdots$$

27) $$a_0 + a_1 x + a_2\frac{x^2}{1.2} + a_3\frac{x^3}{1.2.3} + \cdots$$
$$= e^x\left\{a_0 + x\Delta a_0 + \frac{x^2}{1.2}\Delta^2 a_0 + \cdots\right.$$

28) $$\frac{1}{u_{x+n}} = \frac{1}{u_x} - \frac{n\Delta u_x}{u_x u_{x+1}} + \frac{n(n-1)\Delta^2 u_x}{u_x u_{x+1} u_{x+2}} - \cdots$$

29) $$\frac{1}{u_{x+n}} = \frac{1}{u_{x+m}} - \frac{(n-m)\Delta u_x}{u_{x+m} u_{x+m+1}} + \frac{(n-m)(n-m-1)}{u_{x+m} u_{x+m+1} u_{x+m+2}} - \cdots$$

§. 51.

Summen-Rechnung.

1) $$\sum [x, m] = \frac{[x, m+1]}{m+1} + \text{Const.}$$

2) $$\sum \frac{1}{[a+x+m, m]} = -\frac{1}{m}\frac{1}{[a+x+m, m-1]} + \text{C.}$$

3) $$\sum \frac{1}{u_x u_{x+1}\ldots u_{x+m}} = C - \frac{1}{a\,m\,u_x\ldots u_{x+m-1}}$$

4) $$\sum u_x u_{x+1}\ldots u_{x-m+1} = \frac{u_x u_{x+1}\ldots u_{x-m}}{(m+1)a} + \text{C.},$$

wenn $u_x = a x + b$.

5) $$\sum u_x = c + u_0 x + \Delta u_0\frac{[x, 2]}{1.2} + \Delta^2 u_0\frac{[x, 3]}{1.2.3} + \cdots$$

6) $$\sum u_x = c + u_x x - \Delta u_x\frac{[x, 2]}{1.2} + \Delta^2 u_x\frac{[x, 3]}{1.2.3} - \cdots$$

7) $$\sum x^n = (-1)^{n+1}\left\{\Delta 0^n \frac{x(x+1)}{1.2} - \Delta^2 0^n \frac{x(x+1)(x+2)}{1.2.3} + \cdots\right.$$

$$x = 1, 2, 3, \ldots x$$

$$\sum x = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x$$

$$\sum x^2 = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x$$

$$\sum x^3 = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{4}x^2$$

$$\sum x^4 = \frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{30}x$$

$$\sum x^5 = \frac{1}{6}x^6 + \frac{1}{2}x^5 + \frac{5}{12}x^4 - \frac{1}{12}x^2$$

$$(2n+1)\int_0^x \sum x^{2n}\,dx = \sum x^{2n+1}$$

Euler, Nov. Acta Petropol. Tom. II.

8) $$\sum x^n = \frac{(1+\Delta)^{x+1} - (1+\Delta)}{\Delta}\,0^n$$

9) $$\sum (-1)^{x+1} x^n = \frac{(1+\Delta) - (-1)^x(1+\Delta)^{x+1}}{2+\Delta}\,0^n$$

10) $$\sum u_x = c + \int_0^x u_x\,dx - \frac{1}{2}u_x + \frac{1}{12}\frac{d u_x}{dx} - \frac{1}{720}\frac{d^3 u_x}{dx^3} + \frac{1}{30240}\frac{d^5 u_x}{dx^5} - \cdots$$

Näheres in: Schlömilch, Theorie der Differenz- und Summenrechnung, Halle 1848. Boole, Grundlehren der endl. Differenz- und Summenrechnung, 1867. Herschel, Sammlung von Aufgaben aus der endl. Summen- und Differenzenrechnung, 1859. Die beiden letzteren deutsch von Schnusse, Braunschweig.

Zusätze zum §. 50 und 51.

Anwendung dieser Formeln zur Summation von Reihen. Um

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots x^2$$

zu summiren, muss man $(x+1)^2$ integriren. Nun ist

$$\sum (x+1)^2 = \sum (x^2 + 2x + 1)$$
$$= \sum x^2 + 2\sum x + x.$$

Nach der Formel 26) ist aber

$$x^2 = x + x(x-1),$$

wir haben also

$$\sum (x+1)^2 = \sum x(x-1) + 3\sum x + x.$$

Nun ist nach 1), §. 51

$$\sum x(x-1) = \frac{x(x-1)(x-2)}{3}$$

$$\sum x = \frac{x(x-1)}{2}.$$

Wir haben also

$$\sum (x+1)^2 = x + \frac{3x(x-1)}{2} + \frac{x(x-1)(x-2)}{3} + \text{Const.}$$

Für $x = 1$ wird $\sum x = 1$, also $1 = 1 + \text{Const.}$, woraus Const. $= 0$ folgt.

Theorem: Sei $u_x = a + hx$, so wird die Function

$$\frac{(p + qx + rx^2)s^x}{u_x \ldots u_{x+m-1}}$$

integrabel, wenn

$$p - q\left(\frac{a}{h}\right) + r\left(\frac{a}{h}\right)^2 = \frac{m-1}{s-1}\left\{-q + 2r\left(\frac{a}{h}\right) + \frac{s-m+1}{s-1}r\right\}$$

und ihr Integral ist

$$\frac{(A + Bx)s^x}{u_x \ldots u_{x+m-2}} + \text{Const.},$$

wobei

$$A = \frac{q}{(s-1)h} - \left\{\frac{a}{h} + \frac{s-m+1}{s-1}\right\} \cdot \frac{r}{(s-1)h}$$

$$B = \frac{r}{(s-1)h}.$$

Löst man die Bedingungsgleichung in Bezug auf s auf, so erhält man zwei Werthe von s, die diese Function integrabel machen.

So ist beispielsweise

$$\frac{2}{1.3}\cdot\frac{1}{3}+\frac{2}{3.5}\cdot\frac{1}{3^2}+\frac{4}{5.7}\cdot\frac{1}{3^3}+\cdots=\frac{1}{4}\left\{1-\frac{1}{(2x+1).3^x}\right\}.$$

Diese Reihe hat x Glieder.

Manchmal kann man ohne Anwendung der Formeln sich leicht eine integrable Form verschaffen.

Sei z. B. die summirende Reihe:

$$\frac{1}{1.3}+\frac{1}{2.4}+\frac{1}{3.5}+\cdots\frac{1}{x(x+2)}.$$

Man hat

$$\sum u_{x+1}=\sum\frac{1}{(x+1)(x+3)};$$

hier kann man Formel 28), §. 50, anwenden. Man kann aber auch einfacher wie folgt verfahren:

$$\sum u_{x+1}=\sum\frac{x+2}{(x+1)(x+2)(x+3)}$$

$$=\sum\left\{\frac{1}{(x+1)(x+2)(x+3)}+\frac{1}{(x+2)(x+3)},\right.$$

woraus nach Bestimmung der Constanten

$$\sum u_{x+1}=\frac{3x^2+5x}{4(x+1)(x+2)}$$

folgt.

§. 52.

Zins-, Zinseszins- und Renten-Rechnung.

Sei A das Anfangscapital, E das Endcapital, p die Procente, $q = 1 + \frac{p}{100}$ der Zinsfuss, $\pm R$ die Rente, n die Anzahl der Jahre, Z die Zinsen nach n Jahren.

NB. Werden Zinsen und Rente in je $\frac{1}{m}$ tel Jahren verrechnet, so ist in nachstehenden Formeln $\frac{p}{m}$ statt p und $m\,n$ statt n zu setzen.

1) Zinsrechnung.

$$Z = A\,\frac{p}{100}\,n, \quad A = \frac{100\,Z}{p\,n}, \quad p = \frac{100\,Z}{A\,n}, \quad n = \frac{100\,Z}{p\,A}.$$

2) Einfache Zinseszinsrechnung.

$$E = A\,q^n, \quad A = \frac{E}{q^n}, \quad n = \frac{\log E - \log A}{\log q}, \quad q = \sqrt[n]{\frac{E}{A}}.$$

Ein Capital ver m facht sich, wenn

$$m = q^n, \quad n = \frac{\log m}{\log q}, \quad q = \sqrt[n]{m}.$$

3) Zusammengesetzte Zinseszinsrechnung.

$$E = A\,q^n \pm \frac{100\,R}{p}\,(q^n - 1)$$

$$q^n A = E \mp \frac{100\,R}{p}\,(q^n - 1)$$

$$n = \frac{\log(p\,E \pm 100\,R) - \log(p\,A \pm 100\,R)}{\log q}$$

$$A\,q^n \pm R\,\frac{q^x - 1}{q - 1} - E = 0.$$

4) Rentenrechnung $\left\{E = 0 \quad R > A\,\frac{p}{100}\right\}$

$$A q^n = \frac{100 R}{p} (q^n - 1)$$

$$n \doteq \frac{\log 100 R - \log(100 R - p A)}{\log q}$$

$$A q^n - R \frac{q^n - 1}{q - 1} = 0.$$

Siehe Spitzer: Anleitung zur Berechnung der Leibrenten. Wien 1881. Morgenbesser: Mathematische Grundlagen des ges. Versicherungswesens. Berlin 1882.

ANHANG.

EINIGE NUMERISCHE TAFELN.

I. Tafel für die Zahl e.

$e = 2{,}71828\ 18284\ 59045\ 23536\ 02874\ 71353\ \ldots$

n	e^n	$\left(\frac{1}{e}\right)^n$	$n\,e$	$\frac{n}{e}$
1	2,71828	0,36788	2,71828	0,36788
2	7,38906	0,13534	5,43656	0,73576
3	20,08554	0,04979	8,15485	1,10364
4	54,59815	0,01832	10,87313	1,47152
5	148,41316	0,00674	13,59141	1,83940
6	403,42879	0,00248	16,30969	2,20728
7	1096,63316	0,00091	19,02797	2,57516
8	2980,95799	0,00034	21,74625	2,94304
9	8103,08393	0,00012	24,46454	3,31091

n	e^n	n	e^n
0,01	1,01005	0,1	1,10517
0,02	1,02020	0,2	1,22140
0,03	1,03045	0,3	1,34986
0,04	1,04081	0,4	1,49183
0,05	1,05127	0,5	1,64872
0,06	1,06184	0,6	1,82212
0,07	1,07251	0,7	2,01375
0,08	1,08329	0,8	2,22554
0,09	1,09417	0,9	2,45960

Man beachte beim Gebrauche dieser Tafel die Identitäten

$$e^{a+\frac{b}{10}+\frac{c}{100}} = e^a \cdot e^{\frac{b}{10}} \cdot e^{\frac{c}{100}}$$

$$e^{a+\delta} = e^a \left\{1 + \delta + \frac{\delta^2}{1 \cdot 2} + \cdots\right.$$

$$\log nat\, e = 1$$

$$\log vulg\, e = 0{,}434294482\ \ldots$$

Sei

$$e^x = z, \text{ so ist}$$

$$\log nat\, z = x$$

$$\log vulg\, z = x \cdot \log vulg\, e = x \cdot 0{,}43429448190325182765112891 9\ \ldots$$

Es ist ferner

$$\log nat\ 1 = 0$$

$$\log nat\ 10 = 2{,}3025851\ldots$$

$$\sqrt[e]{e} = 1{,}444667\ldots$$

Es ist $\sqrt[e]{e} > \sqrt[z]{z}$, wobei z eine beliebige Zahl bedeuten kann.

II. Numerische Werthe für π.

$\pi = 3{,}14159\ 26535\ 89793\ 23846\ 26433\ 83279\ 50288\ \ldots$

Arg.	*Valor.*	*Log. vulg.*	*Log. nat.*
π	3,1415926536	0,497149873	1,144730
2π	6,283185	0,798180	1,837877
$\frac{\pi}{2}$	1,570796	0,196120	0,451583
$\frac{\pi}{4}$	0,785398	0,895090 — 1	0,758436 — 1
$\frac{\pi}{3}$	1,047198	0,020029	0,046118
$\frac{2}{3}\pi$	2,094395	0,321059	0,739265
$\frac{4}{3}\pi$	4,188790	0,622089	1,432412
$\frac{1}{\pi}$	0,3183098862	0,502850 — 1	0,855270 — 2
$\frac{1}{2\pi}$	0,159155	0,201820 — 1	0,162123 — 2
π^2	9,8696044011	0,994300	2,289460
π^3	31,0062766803	1,491450	3,434190
$\frac{1}{\pi^2}$	0,1013211836	0,005700 — 1	0,710540 — 3
$\sqrt{\pi}$	1,7724538509	0,248575	0,572365
$\sqrt{\frac{1}{\pi}}$	0,5641895835	0,751425 — 1	0,427635 — 1
$\sqrt[3]{\pi}$	1,4645918876	0,165717	0,381577
$\sqrt[3]{\frac{1}{\pi}}$	0,6827840633	0,834283 — 1	0,618423 — 1
log nat π	1,1447298858	0,058703	0,135169

Näherungsbrüche für $1:\pi$

$$\frac{1}{3},\ \frac{7}{22},\ \frac{106}{333},\ \frac{113}{355},\ \frac{33102}{103993},\ \frac{33215}{104348},\ \frac{66317}{208341},\ \frac{99532}{312689}$$

Einige π-Reihen:

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \cdots$$

$$\frac{\pi}{2\sqrt{2}} = 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - - \cdots$$

$$\frac{5\pi}{12} = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} - \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \frac{1}{13} + \cdots$$

$$\frac{\pi}{2\sqrt{3}} = 1 - \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{11} + \frac{1}{13} - \frac{1}{17} + \frac{1}{19} - \cdots$$

$$\frac{\pi^2}{16} = 1 - \frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} - \frac{1}{5^2} + \frac{1}{6^2} - \frac{1}{7^2} - \frac{1}{8^2} + \frac{1}{9^2} + \cdots$$

$$\frac{3\pi^3}{64\sqrt{2}} = 1 + \frac{1}{3^3} - \frac{1}{5^3} - \frac{1}{7^3} + \frac{1}{9^3} + \frac{1}{11^3} - \frac{1}{13^3} - \cdots$$

$$\frac{4}{\pi} = 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2.4}\right)^2 + \left(\frac{1.3}{2.4.6}\right)^2 + \cdots$$

III. Tafel der Binomial-Coefficienten.

$\binom{n}{1}$	$\binom{n}{2}$	$\binom{n}{3}$	$\binom{n}{4}$	$\binom{n}{5}$	$\binom{n}{6}$	$\binom{n}{7}$	$\binom{n}{8}$	$\binom{n}{9}$	$\binom{n}{10}$	$\binom{n}{11}$	$\binom{n}{12}$
1	1										
2	1										
3	3	1									
4	6	4	1								
5	10	10	5	1							
6	15	20	15	6	1						
7	21	35	35	21	7	1					
8	28	56	70	56	28	8	1				
9	36	84	126	126	84	36	9	1			
10	45	120	210	252	210	120	45	10	1		
11	55	165	330	462	462	330	165	55	11	1	
12	66	220	495	792	924	792	495	220	66	12	1
13	78	286	715	1287	1716	1716	1287	715	286	78	13
14	91	364	1001	2002	3003	3432	3003	2002	1001	364	91
15	105	455	1365	3003	5005	6435	6435	5005	3003	1365	455
16	120	560	1820	4368	8008	11440	12870	11440	8008	4368	1820
17	136	680	2380	6188	12376	19448	24310	24310	19448	12376	6188
18	153	816	3060	8568	18564	31824	43758	48620	43758	31824	18564
19	171	969	3876	11628	27132	50388	75582	92378	92378	75582	50388
20	190	1140	4845	15504	38760	77520	125970	167960	184756	167960	125970

Man beachte die Definition:

$$\binom{n}{x} = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-x+1)}{1.2.3\ldots x}$$

und die Sätze:

$$\binom{n}{x} = \binom{n-1}{x-1} + \binom{n-1}{x} = \binom{n+1}{x} - \binom{n}{x-1}$$

$$\binom{n}{x} = \binom{n+1}{x+1} - \binom{n}{x+1}$$

$$\binom{a+b}{x} = \binom{a}{x} + \binom{a}{x-1}\binom{b}{1} + \binom{a}{x-2}\binom{b}{2} \cdots \binom{a}{1}\binom{b}{x-1} + \binom{a}{x}.$$

IV. Logarithmen einiger Facultäten.

Es ist

$$log(x!) = log\sqrt{2\pi} + x\,log\,x + \frac{1}{2}\,log\,x - x + \frac{B_1}{1.2}\cdot\frac{1}{x} - \cdots$$

$$- (-1)^n \frac{B_{2n-1}}{(2n-1)\,2n}\,\frac{1}{x^{2n-1}} + (-1)^n \frac{\theta\,B_{2n-1}}{(2n-1)\,2n}\cdot\frac{1}{x^{2n-1}},\; 0 < \theta < 1.$$

x	$log\,(x!)$	x	$log\,(x!)$
1	0	26	26,6056190
2	0,3010300	27	28,0369828
3	0,7781513	28	29,4841408
4	1,3802112	29	30,9465388
5	2,0791812	30	32,4236601
6	2,8573325	31	33,9150218
7	3,7024305	32	35,4201717
8	4,6055205	33	36,9386857
9	5,5597630	34	38,4701646
10	6,5597630	35	40,0142326
11	7,6011557	36	41,5705351
12	8,6803370	37	43,1387369
13	9,7942803	38	44,7185205
14	10,9404084	39	46,3095851
15	12,1164996	40	47,9116451
16	13,3206196	41	49,5244289
17	14,5510685	42	51,1476782
18	15,8063410	43	52,7811467
19	17,0850946	44	54,4245993
20	18,3861246	45	56,0778119
21	19,7083439	46	57,7405097
22	21,0507666	47	59,4126676
23	22,4124944	48	61,0939088
24	23,7927057	49	62,7841049
25	25,1906457	50	64,4830749

V. Tafel der ganzzahligen Auflösungen von $x^2 = ay^2 \pm 1$.

a	y	x	a	y	x
2	2	3	53	9100	66251
3	1	2	54	66	485
5	4	9	55	12	89
6	2	5	56	2	15
7	3	8	57	20	151
8	1	3	58	2564	19603
10	6	19	59	69	530
11	3	10	60	4	31
12	2	7	61	226153980	1766319049
13	180	649	62	8	63
14	4	15	63	1	8
15	1	4	65	16	129
17	8	33	66	8	65
18	4	17	67	5967	48842
19	39	170	68	4	33
20	2	9	69	936	7775
21	12	55	70	30	251
22	42	197	71	413	3480
23	5	24	72	2	17
24	1	5	73	267000	2281249
26	10	51	74	430	3699
27	5	26	75	3	26
28	24	127	76	6630	57799
29	1820	9801	77	40	351
30	2	11	78	6	53
31	273	1520	79	9	80
32	3	17	80	1	9
33	4	23	82	18	163
34	6	35	83	9	82
35	1	6	84	6	55
37	12	73	85	30996	285771
38	6	37	86	1122	10405
39	4	25	87	3	28
40	3	19	88	21	197
41	320	2049	89	53000	500001
42	2	13	90	2	19
43	531	3482	91	165	1574
44	30	199	92	120	1151
45	24	161	93	1260	12151
46	3588	24335	94	221064	2143295
47	7	48	95	4	39
48	1	7	96	5	49
50	14	99	97	6377352	62809633
51	7	50	98	10	99
52	90	649	99	1	10

VI. Tafel einiger öfters angewandten Reihen-coefficienten.

Coefficient	*Log. vulg.*	Coefficient	*Log. vulg.*
$\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$	0,6989700 — 1	$\frac{1}{6} = \frac{1}{2 \cdot 3}$	0,2218487 — 1
$\frac{1}{8} = \frac{1}{2 \cdot 1}$	0,0969100 — 1	$\frac{3}{40} = \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 5}$	0,8750613 — 2
$\frac{1}{16} = \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6}$	0,7958800 — 2	$\frac{5}{112} = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7}$	0,6497520 — 2
$\frac{5}{128} = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8}$	0,5917600 — 2	$\frac{35}{1152} = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 9}$	0,4826156 — 2
$\frac{7}{256} = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10}$	0,4368581 — 2	$\frac{63}{2816} = \frac{1 \cdot 3 \ldots 7 \cdot 9}{2 \cdot 4 \ldots 10 \cdot 11}$	0,3497078 — 2
$\frac{21}{1024} = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10 \cdot 12}$	0,3119193 — 2	$\frac{231}{13312} = \frac{1 \cdot 3 \ldots 9 \cdot 11}{2 \cdot 4 \ldots 12 \cdot 13}$	0,2393687 — 2
$\frac{33}{2048} = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 11}{2 \cdot 4 \cdot 6 \ldots 12 \cdot 14}$	0,2071840 — 2	$\frac{429}{30720} = \frac{1 \cdot 3 \ldots 11 \cdot 13}{2 \cdot 4 \ldots 14 \cdot 15}$	0,1450361 — 2
$\frac{429}{32768} = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots 11 \cdot 13}{2 \cdot 4 \cdot 6 \ldots 14 \cdot 16}$	0,1170074 — 2	$\frac{6435}{557056} = \frac{1 \cdot 3 \ldots 13 \cdot 15}{2 \cdot 4 \ldots 16 \cdot 17}$	0,0626497 — 2
$\frac{715}{65536} = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots 13 \cdot 15}{2 \cdot 4 \cdot 6 \ldots 16 \cdot 18}$	0,0378261 — 2	$\frac{12155}{1245184} = \frac{1 \cdot 3 \ldots 15 \cdot 17}{2 \cdot 4 \ldots 18 \cdot 19}$	0,9895214 — 3
$\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$	0,6989700 — 1	$\frac{1}{6} = \frac{1}{2 \cdot 3}$	0,2218487 — 1
$\frac{3}{8} = \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}$	0,5740313 — 1	$\frac{1}{40} = \frac{1}{2 \cdot 4 \cdot 5}$	0,3979400 — 2
$\frac{5}{16} = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}$	0,4948500 — 1	$\frac{1}{112} = \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7}$	0,9507820 — 3
$\frac{35}{128} = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8}$	0,4368581 — 1	$\frac{5}{1152} = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 9}$	0,6375175 — 3
$\frac{63}{256} = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10}$	0,3911005 — 1	$\frac{7}{2816} = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{2 \cdot 4 \ldots 10 \cdot 11}$	0,3954654 — 3
$\frac{231}{1024} = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots 9 \cdot 11}{2 \cdot 4 \cdot 6 \ldots 10 \cdot 12}$	0,3533120 — 1	$\frac{21}{13312} = \frac{1 \cdot 3 \ldots 7 \cdot 9}{2 \cdot 4 \ldots 12 \cdot 13}$	0,1979760 — 3
$\frac{429}{2048} = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots 11 \cdot 13}{2 \cdot 4 \cdot 6 \ldots 12 \cdot 14}$	0,3211273 — 1	$\frac{33}{30720} = \frac{1 \cdot 3 \ldots 9 \cdot 11}{2 \cdot 4 \ldots 14 \cdot 15}$	0,0310927 — 3
$\frac{6435}{32768} = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots 13 \cdot 15}{2 \cdot 4 \cdot 6 \ldots 14 \cdot 16}$	0,2930986 — 1	$\frac{429}{557056} = \frac{1 \cdot 3 \ldots 11 \cdot 13}{2 \cdot 4 \ldots 16 \cdot 17}$	0,8865584 — 4
$\frac{12155}{65536} = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots 15 \cdot 17}{2 \cdot 4 \cdot 6 \ldots 16 \cdot 18}$	0,2682750 — 1	$\frac{715}{1245184} = \frac{1 \cdot 3 \ldots 13 \cdot 15}{2 \cdot 4 \ldots 18 \cdot 19}$	0,7590725 — 4

VII. Tafel der Bernoulli'schen Zahlen.

	Zahl	*Log. vulg.*		Zahl	*Log. vulg.*
B_1	$\frac{1}{6}$	0,2218487 — 1	B_{19}	$\frac{174611}{330}$	2,7235577
B_3	$\frac{1}{30}$	0,5228787 — 2	B_{21}	$\frac{854513}{138}$	3,7918360
B_5	$\frac{1}{42}$	0,3767507 — 2	B_{23}	$\frac{236364091}{2730}$	4,9374189
B_7	$\frac{1}{30}$	0,5228787 — 2	B_{25}	$\frac{8553103}{6}$	6,1539725
B_9	$\frac{5}{66}$	0,8794261 — 2	B_{27}	$\frac{23749461029}{870}$	7,4361345
B_{11}	$\frac{691}{2730}$	0,4033154 — 1	B_{29}	$\frac{8615841276005}{14322}$	8,7792940
B_{13}	$\frac{7}{6}$	0,0669468	B_{31}	$\frac{7709321041217}{510}$	10,1794460
B_{15}	$\frac{3617}{510}$	0,8507783	B_{33}	$\frac{2577687858367}{6}$	11,6330791
B_{17}	$\frac{43867}{798}$	1,7401350	B_{35}	$\frac{26315271553053477373}{1919190}$	13,1370899

VIII. Tafel der Potenzsummen.

Wir bezeichnen mit

P_n die Summe der Reihe $1 + \frac{1}{3^{2n}} + \frac{1}{5^{2n}} + \frac{1}{7^{2n}} + \cdots$

Q_n " " " " $\frac{1}{2^{2n}} + \frac{1}{4^{2n}} + \frac{1}{6^{2n}} + \frac{1}{8^{2n}} + \cdots$

R_n " " " " $1 + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} + \frac{1}{4^n} + \cdots$

n	P_n	Q_n	R_n
1	1,2337006	0,4112335	∞
2	1,0146780	0,067645	1,6449341
3	1,0014471	0,015860	1,2020569
4	1,0001552	0,0039222	1,0823232
5	1,0000170	0,0009775	1,0369278
6	1,0000019	0,0002442	1,0173431
7	1,0000002	0,0000610	1,0083493
8	1,0000000	0,0000153	1,0040774
9	1,0000000	0,0000038	1,0020084
10	1,0000000	0,0000010	1,0009946

IX. Potenzen und Wurzeln.

n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$	n	n^2	n^3	$\sqrt{n}$	$\sqrt[3]{n}$
1	1	1	1,0000	1,0000	51	2601	132651	7,1414	3,7084
2	4	8	1,4142	1,2599	52	2704	140608	7,2111	3,7325
3	9	27	1,7321	1,4422	53	2809	148877	7,2801	3,7563
4	16	64	2,0000	1,5874	54	2916	157464	7,3485	3,7798
5	25	125	2,2361	1,7100	55	3025	166375	7,4162	3,8030
6	36	216	2,4495	1,8171	56	3136	175616	7,4833	3,8259
7	49	343	2,6458	1,9129	57	3249	185193	7,5498	3,8485
8	64	512	2,8284	2,0000	58	3364	195112	7,6158	3,8709
9	81	729	3,0000	2,0801	59	3481	205379	7,6811	3,8930
10	100	1000	3,1623	2,1544	60	3600	216000	7,7460	3,9149
11	121	1331	3,3166	2,2240	61	3721	226981	7,8102	3,9365
12	144	1728	3,4641	2,2894	62	3844	238328	7,8740	3,9579
13	169	2197	3,6056	2,3513	63	3969	250047	7,9373	3,9791
14	196	2744	3,7417	2,4101	64	4096	262144	8,0000	4,0000
15	225	3375	3,8730	2,4662	65	4225	274625	8,0623	4,0207
16	256	4096	4,0000	2,5198	66	4356	287496	8,1240	4,0412
17	289	4913	4,1231	2,5713	67	4489	300763	8,1854	4,0615
18	324	5832	4,2426	2,6207	68	4624	314432	8,2462	4,0817
19	361	6859	4,3589	2,6684	69	4761	328509	8,3066	4,1016
20	400	8000	4,4721	2,7144	70	4900	343000	8,3666	4,1213
21	441	9261	4,5826	2,7589	71	5041	357911	8,4261	4,1408
22	484	10648	4,6904	2,8021	72	5184	373248	8,4853	4,1602
23	529	12167	4,7958	2,8439	73	5329	389017	8,5440	4,1793
24	576	13824	4,8990	2,8845	74	5476	405224	8,6023	4,1983
25	625	15625	5,0000	2,9240	75	5625	421875	8,6603	4,2172
26	676	17576	5,0990	2,9625	76	5776	438976	8,7178	4,2358
27	729	19683	5,1962	3,0000	77	5929	456533	8,7750	4,2543
28	784	21952	5,2915	3,0366	78	6084	474552	8,8318	4,2727
29	841	24389	5,3852	3,0723	79	6241	493039	8,8882	4,2908
30	900	27000	5,4772	3,1072	80	6400	512000	8,9443	4,3089
31	961	29791	5,5678	3,1414	81	6561	531441	9,0000	4,3267
32	1024	32768	5,6569	3,1748	82	6724	551368	9,0554	4,3445
33	1089	35937	5,7446	3,2075	83	6889	571787	9,1104	4,3621
34	1156	39304	5,8310	3,2396	84	7056	592704	9,1652	4,3795
35	1225	42875	5,9161	3,2711	85	7225	614125	9,2195	4,3968
36	1296	46656	6,0000	3,3019	86	7396	636056	9,2736	4,4140
37	1369	50653	6,0828	3,3322	87	7569	658503	9,3274	4,4310
38	1444	54872	6,1644	3,3620	88	7744	681472	9,3808	4,4480
39	1521	59319	6,2450	3,3912	89	7921	704969	9,4340	4,4647
40	1600	64000	6,3246	3,4200	90	8100	729000	9,4868	4,4814
41	1681	68921	6,4031	3,4482	91	8281	753571	9,5394	4,4979
42	1764	74088	6,4807	3,4760	92	8464	778688	9,5917	4,5144
43	1849	79507	6,5574	3,5034	93	8649	804357	9,6437	4,5307
44	1936	85184	6,6332	3,5303	94	8836	830584	9,6954	4,5468
45	2025	91125	6,7082	3,5569	95	9025	857375	9,7468	4,5629
46	2116	97336	6,7823	3,5830	96	9216	884736	9,7980	4,5789
47	2209	103823	6,8557	3,6088	97	9409	912673	9,8489	4,5947
48	2304	110592	6,9282	3,6342	98	9604	941192	9,8995	4,6104
49	2401	117649	7,0000	3,6593	99	9801	970299	9,9499	4,6261
50	2500	125000	7,0711	3,6840	100	10000	1000000	10,0000	4,6416

X. Tafel der gewöhnlichen Logarithmen.

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	00000	00432	00860	01284	01703	02119	02531	02938	03342	03743
11	04139	04532	04922	05308	05690	06070	06446	06819	07188	07555
12	07918	08279	08636	08991	09342	09691	10037	10380	10721	11059
13	11394	11727	12057	12385	12710	13033	13354	13672	13988	14301
14	14613	14922	15229	15534	15836	16137	16435	16732	17026	17319
15	17609	17898	18184	18469	18752	19033	19312	19590	19866	20140
16	20412	20683	20952	21219	21484	21748	22011	22272	22531	22789
17	23045	23300	23553	23805	24055	24304	24551	24797	25042	25285
18	25527	25768	26007	26245	26482	26717	26951	27184	27416	27646
19	27875	28103	28330	28556	28780	29003	29226	29447	29667	29885
20	30103	30320	30535	30750	30963	31175	31387	31597	31806	32015
21	32222	32428	32634	32838	33041	33244	33445	33646	33846	34044
22	34242	34439	34635	34830	35025	35218	35411	35603	35793	35984
23	36173	36361	36549	36736	36922	37107	37291	37475	37658	37840
24	38021	38202	38382	38561	38739	38917	39094	39270	39445	39620
25	39794	39967	40140	40312	40483	40654	40824	40993	41162	41330
26	41497	41664	41830	41996	42160	42325	42488	42651	42813	42975
27	43136	43297	43457	43616	43775	43933	44091	44248	44404	44560
28	44716	44871	45025	45179	45332	45484	45637	45788	45939	46090
29	46240	46389	46538	46687	46835	46982	47129	47276	47422	47567
30	47712	47857	48001	48144	48287	48430	48572	48714	48855	48996
31	49136	49276	49415	49554	49693	49831	49969	50106	50243	50379
32	50515	50651	50786	50920	51055	51188	51322	51455	51587	51720
33	51851	51983	52114	52244	52375	52504	52634	52763	52892	53020
34	53148	53275	53403	53529	53656	53782	53908	54033	54158	54283
35	54407	54531	54654	54777	54900	55023	55145	55267	55388	55509
36	55630	55751	55871	55991	56110	56229	56348	56467	56585	56703
37	56820	56937	57054	57171	57287	57403	57519	57634	57749	57864
38	57978	58092	58206	58320	58433	58546	58659	58771	58883	58995
39	59106	59218	59329	59439	59550	59660	59770	59879	59988	60097
40	60206	60314	60423	60531	60638	60746	60853	60959	61066	61172
41	61278	61384	61490	61595	61700	61805	61909	62014	62118	62221
42	62325	62428	62531	62634	62737	62839	62941	63043	63144	63246
43	63347	63448	63548	63649	63749	63849	63949	64048	64147	64246
44	64345	64444	64542	64640	64738	64836	64933	65031	65128	65225
45	65321	65418	65514	65610	65706	65801	65896	65992	66087	66181
46	66276	66370	66464	66558	66652	66745	66839	66932	67025	67117
47	67210	67302	67394	67486	67578	67669	67761	67852	67943	68034
48	68124	68215	68305	68395	68485	68574	68664	68753	68842	68931
49	69020	69108	69197	69285	69373	69461	69548	69636	69723	69810
50	69897	69984	70070	70157	70243	70329	70415	70501	70586	70672
51	70757	70842	70927	71012	71096	71181	71265	71349	71433	71517
52	71600	71684	71767	71850	71933	72016	72099	72181	72263	72346
53	72428	72509	72591	72673	72754	72835	72916	72997	73078	73159
54	73239	73320	73400	73480	73560	73640	73719	73799	73878	73957

X. Tafel der gewöhnlichen Logarithmen.

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
55	74036	74115	74194	74273	74351	74429	74507	74586	74663	74741
56	74819	74896	74974	75051	75128	75205	75282	75358	75435	75511
57	75587	75664	75740	75815	75891	75967	76042	76118	76193	76268
58	76343	76418	76492	76567	76641	76716	76790	76864	76938	77012
59	77085	77159	77232	77305	77379	77452	77525	77597	77670	77743
60	77815	77887	77960	78032	78104	78176	78247	78319	78390	78462
61	78533	78604	78675	78746	78817	78888	78958	79029	79099	79169
62	79239	79309	79379	79449	79518	79588	79657	79727	79796	79865
63	79934	80003	80072	80140	80209	80277	80346	80414	80482	80550
64	80618	80686	80754	80821	80889	80956	81023	81090	81158	81224
65	81291	81358	81425	81491	81558	81624	81690	81757	81823	81889
66	81954	82020	82086	82151	82217	82282	82347	82413	82478	82543
67	82607	82672	82737	82802	82866	82930	82995	83059	83123	83187
68	83251	83315	83378	83442	83506	83569	83632	83696	83759	83822
69	83885	83948	84011	84073	84136	84198	84261	84323	84386	84448
70	84510	84572	84634	84696	84757	84819	84880	84942	85003	85065
71	85126	85187	85248	85309	85370	85431	85491	85552	85612	85673
72	85733	85794	85854	85914	85974	86034	86094	86153	86213	86273
73	86332	86392	86451	86510	86570	86629	86688	86747	86806	86864
74	86923	86982	87040	87099	87157	87216	87274	87332	87390	87448
75	87506	87564	87622	87679	87737	87795	87852	87910	87967	88024
76	88081	88138	88195	88252	88309	88366	88423	88480	88536	88593
77	88649	88705	88762	88818	88874	88930	88986	89042	89098	89154
78	89209	89265	89321	89376	89432	89487	89542	89597	89653	89708
79	89763	89818	89873	89927	89982	90037	90091	90146	90200	90255
80	90309	90363	90417	90472	90526	90580	90634	90687	90741	90795
81	90849	90902	90956	91009	91062	91116	91169	91222	91275	91328
82	91381	91434	91487	91540	91593	91645	91698	91751	91803	91855
83	91908	91960	92012	92065	92117	92169	92221	92273	92324	92376
84	92428	92480	92531	92583	92634	92686	92737	92788	92840	92891
85	92942	92993	93044	93095	93146	93197	93247	93298	93349	93399
86	93450	93500	93551	93601	93651	93702	93752	93802	93852	93902
87	93952	94002	94052	94101	94151	94201	94250	94300	94349	94399
88	94448	94498	94547	94596	94645	94694	94743	94792	94841	94890
89	94939	94988	95036	95085	95134	95182	95231	95279	95328	95376
90	95424	95472	95521	95569	95617	95665	95713	95761	95809	95856
91	95904	95952	95999	96047	96095	96142	96190	96237	96284	96332
92	96379	96426	96473	96520	96567	96614	96661	96708	96755	96802
93	96848	96895	96942	96988	97035	97081	97128	97174	97220	97267
94	97313	97359	97405	97451	97497	97543	97589	97635	97681	97727
95	97772	97818	97864	97909	97955	98000	98046	98091	98137	98182
96	98227	98272	98318	98363	98408	98453	98498	98543	98588	98632
97	98677	98722	98767	98811	98856	98900	98945	98989	99034	99078
98	99123	99167	99211	99255	99300	99344	99388	99432	99476	99520
99	99564	99607	99651	99695	99739	99782	99826	99870	99913	99957



Differentialrechnung.

§. 53.

Einleitung.

1) Sei $f(x) = y$, so wird, unter Voraussetzung der Eindeutigkeit und Stetigkeit der Functionen $f(x)$, wenn

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$$
$$\Delta x = (x + \Delta x) - x$$

gesetzt wird

$$\frac{dy}{dx} = \lim \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x},\ \lim \Delta x = 0.$$

Man schreibt auch

$$\frac{dy}{dx} = f'(x) = D_x f(x).$$

Allgemein ist

$$\frac{d^n y}{dx^n} = f^{(n)}(x) = \lim \frac{f^{(n-1)}(x + \Delta x) - f^{(n-1)}(x)}{\Delta x}.$$

2) Sei $z = f(xy)$, so wird:

$$f_1 = \frac{\partial z}{\partial x} = \lim \frac{f(x + \Delta x, y) - f(xy)}{\Delta x},\ \lim \Delta x = 0$$

$$f_2 = \frac{\partial z}{\partial x} = \lim \frac{f(x, y + \Delta y) - f(xy)}{\Delta y},\ \lim \Delta y = 0.$$

Es ist ferner

$$\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y)$$
$$= \frac{f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y + \Delta y)}{\Delta x} \Delta x$$
$$+ \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y} \Delta y$$

$$dz = \lim \Delta z \text{ für } \begin{cases} \lim \Delta x = 0 \\ \lim \Delta y = 0 \end{cases}$$

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}\, dx + \frac{\partial z}{\partial y}\, dy.$$

Es ist:

$$\frac{dz}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = \frac{dz}{dt}, \text{ nicht aber } \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} = \frac{\partial z}{\partial t},$$

d. h. $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$ sind symbolische Quotienten, während $\frac{dz}{dx}$, $\frac{dz}{dy}$ wahre sind.

3) Ist $f(xy) = 0$, so folgt:

$$f_1\, dx + f_2\, dy = 0,$$

demnach

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{f_1}{f_2}.$$

4) Ist $f(xyz) = 0$, $F(xyz) = 0$, so folgt:

$$f_1\, dx + f_2\, dy + f_3\, dz = 0$$
$$F_1\, dx + F_2\, dy + F_3\, dz = 0$$

und daraus

$$\frac{dx}{\Delta_{23}} = \frac{dy}{\Delta_{31}} = \frac{dz}{\Delta_{12}},$$

wenn gesetzt wird:

$$\Delta_{ij} = \begin{vmatrix} f_i & F_i \\ f_j & F_j \end{vmatrix}$$

In dem speciellen Falle, wo

$$F(xyz) = 0, \quad z = f(xy),$$

ergiebt sich:

$$\left(F_1 + F_3 \frac{\partial f}{\partial x}\right) dx + \left(F_2 + F_3 \frac{\partial f}{\partial y}\right) dy = 0.$$

5) Ist $F \equiv F(uv)$ und zugleich

$$u = \varphi(xyz) \quad v = \psi(xyz) \quad z = f(xy);$$

so wird

$$dF = \left\{\frac{\partial F}{\partial u}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}\right) + \frac{\partial F}{\partial v}\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}\right)\right\} dx$$
$$+ \left\{\frac{\partial F}{\partial u}\left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}\right) + \frac{\partial F}{\partial v}\left(\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}\right)\right\} dy.$$

6) Es ist, wenn $f(x)$ endlich stetig und eindeutig bleibt, für

$$a \gtrless x \gtrless b,$$

und wenn

$$a \gtrless h \gtrless b$$

angenommen wird, sowie m eine positive ganze Zahl bedeutet,

$$f(x) + hf'(x) \gtrless f(x+h) \gtrless f(x) + hf'(x+h)$$

$$f(x+h) = f(a) + \frac{hf'(a+\vartheta h)}{m\,\theta^{m-1}},$$

wobei

$$0 < \theta < 1$$

$$1 - \vartheta = \theta.$$

Allgemein ergiebt sich:

$$f(x+h) = \sum_0^{n-1}{}_{\varkappa} \frac{h^\varkappa}{\varkappa!} f^{(\varkappa)}(x) + \frac{h^n}{(n-1)!} \frac{f^{(n)}(x+\vartheta h)}{p\,\theta^{p-n}} \quad \text{(Taylor)}$$

$$f(x) = \sum_0^{n-1}{}_{\varkappa} \frac{x^\varkappa}{\varkappa!} f^{(\varkappa)}(0) + \frac{x^n}{(n-1)!} \frac{f^{(n)}(\vartheta x)}{p\,\theta^{p-n}} \quad \text{(Maclaurin)}$$

und ähnlich für zwei Variable:

$$f(x+\alpha, y+\beta) = \sum_0^{n-1}{}_{\varkappa} \frac{1}{\varkappa!} \left\{\alpha \frac{1}{\partial x} + \beta \frac{1}{\partial y}\right\}^\varkappa \partial^\varkappa f(x\,y)$$

$$+ \frac{1}{n!} \left(\alpha \frac{1}{\partial x} + \beta \frac{1}{\partial y}\right)^n \partial^n f(x+\vartheta\,\alpha, y+\vartheta'\beta).$$

Analog auch für mehrere Variable.

Man merke dazu: Sei $f(x)$ für $x = \xi_0$, $x = \xi_1, \ldots x = \xi_n$, discontinuirlich, wobei $\xi_\varkappa$ allgemein complex gedacht wird, und

$$mod\,\xi_0 < mod\,\xi_1 < \cdots < mod\,\xi_n,$$

so gilt die Entwickelung von $f(x)$

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1}\,x + \frac{f''(0)}{2!}\,x^2 + \cdots$$

so lange, so lange

$$mod\,x < mod\,\xi_\varkappa.$$

Mehreres in der Functionentheorie.

§. 54.

Allgemeine Differentialformeln.

1) $d x^n = n x^{n-1} d x$

2) $d a^x = a^x \log a \, dx$

3) $d \log x = \frac{d x}{x}, \ldots \quad d \log^{(a)} x = \frac{1}{\log a} \cdot \frac{d x}{x}$

4) $d e^x = e^x d x$

5) $d \sin x = \cos x \, d x$

6) $d \cos x = - \sin x \, d x$

7) $d \operatorname{tgn} x = \frac{d x}{\cos^2 x}$

8) $d \operatorname{cotg} x = - \frac{d x}{\sin^2 x}$

9) $d \sec x = \operatorname{tgn} x \sec x \, d x$

10) $d \operatorname{cosec} x = \operatorname{cotg} x \operatorname{cosec} x \, d x$

11) 12) $\left. \begin{matrix} d \arcsin x \\ d \arccos x \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} + \\ - \end{matrix} \right. \frac{d x}{\sqrt{1 - x^2}}$

13) 14) $\left. \begin{matrix} d \operatorname{arctgn} x \\ d \operatorname{arccotg} x \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} + \\ - \end{matrix} \right. \frac{d x}{1 + x^2}$

15) 16) $\left. \begin{matrix} d \operatorname{arc} \sec x \\ d \operatorname{arc} \operatorname{cosec} x \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} + \\ - \end{matrix} \right. \frac{d x}{x \sqrt{x^2 - 1}}$

NB. Im ersten Quadranten.

17) $d z = \frac{\partial z}{\partial x} d x + \frac{\partial z}{\partial y} d y$

18) $d^2 z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} d x^2 + 2 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} d x \, d y + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} d y$

19) $d^n z = \left\{ \frac{1}{\partial x} d x + \frac{1}{\partial y} \right\}^n \partial^n z$

20) $d u v = u d v + v d u$

21) $d \frac{u}{v} = \frac{v d u - u d v}{v^2}$

22) $d u^v = u^v \left\{ \log u \, dv + \frac{v}{u} du \right\}$

23) $d\, u v w \cdots = u v w \cdots \left\{ \frac{du}{u} + \frac{dv}{v} + \frac{dw}{w} + \cdots \right\}$

24) $d \frac{u v w \ldots}{p q r \ldots} = \frac{u v w \ldots}{p q r \ldots} \left\{ \frac{du}{u} + \frac{dv}{v} + \cdots - \frac{dp}{p} - \frac{dq}{q} - \cdots \right\}$

25) $\frac{du}{dx} = \frac{du}{dy} \frac{dy}{dx}$

26) $\frac{d^2 u}{dx^2} = \frac{d^2 u}{dy^2} \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 + \frac{du}{dy} \cdot \frac{d^2 y}{dx^2}.$

§. 55.

Einige oft vorkommende Differentialquotienten.

1) $\frac{d}{dx} \left\{ \frac{a + bx + cx^2}{\alpha + \beta x + \gamma x^2} \right\} = \frac{(\alpha b - a\beta) + 2(\alpha c - a\gamma)x + (\beta c - b\gamma)x^2}{(\alpha + \beta x + \gamma x^2)^2}$

2) $\frac{d}{dx} \left\{ x^n \sqrt{a + bx + cx^2} \right\} = \frac{2na x^{n-1} + (2n+1)bx^n + 2(n+1)cx^{n+1}}{2\sqrt{a + bx + cx^2}}$

3) $\frac{d}{dx} \left\{ \frac{x^n}{\sqrt{a + bx + cx^2}} \right\} = \frac{2na x^{n-1} + (2n-1)bx^n + 2(n-1)cx^{n+1}}{2\sqrt{a + bx + cx^2}^3}$

4) $\frac{d}{dx} \sqrt{\frac{a + bx + cx^2}{\alpha + \beta x + \gamma x^2}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{(b\alpha - a\beta) + 2(\alpha c - a\gamma)x + (b\gamma - \beta c)x^2}{\sqrt{(a + bx + cx^2)(\alpha + \beta x + \gamma x^2)^3}}$

§. 56.

Höhere Differentialquotienten.

1) $\frac{d^n}{dx^n} x^m = m^{n|-1} x^{m-n} = m(m-1) \ldots (m-n+1) x^{m-n}$

2) $\frac{d^n}{dx^n} \left(\frac{1}{x} \right) = (-1)^n \frac{n!}{x^{n+1}}, \quad \frac{d^n}{dx^n} \left(\frac{1}{x^m} \right) = (-1)^n \frac{m^{n|1}}{x^{m+n}}$

3) $\frac{d^n}{dx^n} \sqrt{x} = (-1)^{n-1} \frac{1^{n|2}}{x^n (2n-1) 2^n} \sqrt{x}, \quad \frac{d^n x^{-\frac{1}{2}}}{dx^n} = (-1)^n \frac{1^{n|2}}{2^n x^n \sqrt{x}}$

4) $\frac{d^n}{dx^n} (a \pm bx)^m = (\pm b)^n m^{n|-1} (a \pm bx)^{m-n}$

5) $\dfrac{d^n}{dx^n}\dfrac{1}{a \pm bx} = (\mp b)^n \dfrac{n!}{(a \pm bx)^{n+1}}$

6) $\dfrac{d^n}{dx^n}\dfrac{1}{\sqrt{a \pm bx}} = (\mp b)^n \dfrac{1^{n/2}}{2^n (a \pm bx)^n \sqrt{a \pm bx}}$

7) $\dfrac{d^n}{dx^n}\dfrac{1}{a^2+b^2x^2} = \dfrac{(-1)^n n!\, b^n}{a\sqrt{a^2+b^2x^2}^{\,n+1}} \sin\left\{(n+1) \operatorname{arc\,tgn} \dfrac{a}{bx}\right\}$

8) $\dfrac{d^n}{dx^n}\dfrac{1}{a^2-b^2x^2} = (-1)^n \dfrac{n!\, b^n}{2a}\left\{\dfrac{1}{(a+bx)^{n+1}} - \dfrac{1}{(-a+bx)^{n+1}}\right\}$

9) $\dfrac{d^n}{dx^n} e^{bx} = b^n e^{bx}$

10) $\dfrac{d^n}{dx^n} \sin x = \sin\left(\dfrac{n\pi}{2} + x\right)$

11) $\dfrac{d^n}{dx^n} \cos x = \cos\left(\dfrac{n\pi}{2} + x\right)$

12) $\dfrac{d^n}{dx^n} e^x \sin x = \dfrac{e^x}{\sin^n \dfrac{\pi}{4}} \sin\left(x + \dfrac{n\pi}{4}\right)$

13) $\dfrac{d^n}{dx^n} e^x \cos x = \dfrac{e^x}{\sin^n \dfrac{\pi}{4}} \cos\left(x + \dfrac{n\pi}{4}\right)$

14) $\dfrac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}\left\{(1-x^2)^{n-\frac{1}{2}}\right\} = (-1)^{n-1} . 1 . 3 . 5 \ldots (2n-1) \dfrac{\sin nz}{n},$

$\cos z = x$ gesetzt.

Jacobi, Crelle Journ. XV, p. 3.

15) $\dfrac{d^n}{dx^n} f(x^\lambda) = \dfrac{n!}{x^n} \sum_1^n{}_\varkappa \dfrac{\varkappa!}{x^{\varkappa\lambda}} f^\varkappa(x^\lambda) \sum_1^\varkappa{}_h (-1)^{\varkappa+h} \binom{\varkappa}{h}\binom{h\lambda}{n}$

16) $\dfrac{d^n}{dx^n} f(x) = \sum_1^n{}_\varkappa \dfrac{x^\varkappa f^\varkappa(x)}{\varkappa!} \sum_1^\varkappa{}_h (-1)^{\varkappa-h} \binom{\varkappa}{h} \dfrac{1}{x^h} \dfrac{\partial^n x^h}{\partial x^n}.$

Vergleiche: Koppe, Theorie der indepedenten Darstellung der höheren Differentialquotienten. Leipzig 1845.

17) $(y^2 + b)^m\, d^{n+m} (y^2 + b)^n = d^{n-m} (y^2 + b)^n.$

Crelle Journal Bd. II, p. 225.

18) $\frac{d^n(x^\varkappa)}{x^\varkappa} = \binom{\varkappa}{1}\binom{n-\varkappa}{n-1}\frac{d^n(x)}{x} + \binom{\varkappa}{2}\binom{n-\varkappa}{n-2}\frac{d^n(x^2)}{x^2} + \cdots$

$+ \binom{\varkappa}{n}\binom{n-\varkappa}{0}\frac{d^n(x^n)}{x^n}$, $\varkappa$ kann $\pm$ ganze oder gebrochen sein.

Vergl. Götting, Mathem. Ann. Bd. III, p. 279. Ausserdem Schlömilch, Compendium II. Bd. 4 bis 16. Sohnke, Aufgaben-Sammlung 1. Bd. II.

§. 57.

Unbestimmte Formen.

1) $\frac{0}{0} = \frac{\varphi(\alpha)}{f(\alpha)} = \frac{\varphi'(\alpha)}{f'(\alpha)} = \frac{\varphi''(\alpha)}{f''(\alpha)} \cdots$

Sei

$$\varphi(\alpha) = \frac{1}{\varphi_1(\alpha)},\quad f(\alpha) = \frac{1}{f_1(\alpha)},$$

so wird aus

2) $\frac{\infty}{\infty} = \frac{\varphi(\alpha)}{f(\alpha)} \cdots \frac{\varphi_1(\alpha)}{f_1(\alpha)} = \frac{0}{0}$

3) $\infty - \infty = \varphi(\alpha) - f(\alpha) \cdots \frac{f_1(\alpha) - \varphi_1(\alpha)}{f_1(\alpha)\cdot\varphi_1(\alpha)} = \frac{0}{0}$

4) $0.\infty = \varphi(\alpha).f(\alpha) \cdots \frac{\varphi(\alpha)}{f_1(\alpha)} = \frac{0}{0}$

5) 0^∞, ∞^0, 1^∞ sei $= q$,

so wird

$$q = \{f(\alpha)\}^{\varphi(\alpha)} = e^{\varphi(\alpha)\log f(\alpha)} \qquad \varphi(\alpha).\log f(\alpha) = 0\cdot\infty$$

Für $x = 0$ wird

6) $\frac{\sqrt{a + bx + cx^2} - \sqrt{a - bx + cx^2}}{\sqrt{\alpha + \beta x} - \sqrt{\alpha - \beta x}} = \frac{b}{\beta}\sqrt{\frac{\alpha}{a}}$

7) $\frac{a^x - b^x}{x} = \log a - \log b$

8) $x^p \log\frac{1}{x} = 0 \quad p > 1$

9) $x^x = 1.$

Für $x = \infty$ wird

10) $\frac{\log x}{x^m} = 0 \quad m > 0$

11) $\frac{x^\beta}{e^{ax}} = 0 \quad a > 0 \quad \beta > 0$

12) $\frac{a^x}{x} = \infty.$

Für $x = 1$

13) $x^{\frac{1}{1-x}} = \frac{1}{e}$

14) $(1 - x) \log (1 - x) = 0$

15) $\frac{1}{\log x} - \frac{1}{x-1} = \frac{1}{2}.$

§. 58.

Transformationsgleichungen.

1) Sei $x = \varphi(t)$, so wird

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\varphi'} \frac{dy}{dt}$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{1}{\varphi'^3} \left\{ \varphi' \frac{d^2 y}{dt^2} - \varphi'' \frac{dy}{dt} \right\}$$

$$\frac{d^3 y}{dx^3} = \frac{1}{\varphi'^5} \left\{ \varphi'^2 \frac{d^3 y}{dt^3} - 3' \varphi' \varphi'' \frac{d^2 y}{dt^2} + (3 \varphi''^2 - \varphi' \varphi''') \frac{dy}{dt} \right\}$$

2) Sei $x = \varphi(y)$, so wird:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\varphi'}$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = -\frac{\varphi''}{\varphi'^3}$$

$$\frac{d^3 y}{dx^3} = \frac{1}{\varphi'^5} (3 \varphi''^2 - \varphi' \varphi''').$$

3) Seien x und y Functionen von t, so wird:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \Big/ \frac{dx}{dt}$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \left\{ \frac{dx}{dt} \cdot \frac{d^2 y}{dt^2} - \frac{d^2 x}{dt^2} \cdot \frac{dy}{dt} \right\} \Big/ \left(\frac{dx}{dt} \right)^3$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \left\{ \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 \frac{d^3y}{dt^3} - 3\frac{dx}{dt}\cdot\frac{d^2x}{dt^2}\frac{d^2y}{dt^2} + \left(3\left[\frac{d^2x}{dt^2}\right]^2 - \frac{dx}{dt}\frac{d^3x}{dt^3}\right)\frac{dy}{dt}\right\} \Big/ \left(\frac{dx}{dt}\right)^5.$$

4) Sei $f(xyz) = 0$, so wird:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -\left\{ \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - 2\frac{\partial f}{\partial z}\cdot\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\right\} \Big/ \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^3$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -\left\{ \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} - \frac{\partial f}{\partial z}\left[\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}\right] + \frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\right\} \Big/ \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^3$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\left\{ \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - 2\frac{\partial f}{\partial z}\cdot\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\right\} \Big/ \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^3.$$

5) Sei $x = \varrho \cos\varphi$, $y = \varrho \sin\varphi$, so wird:

$$dx = d\varrho \cos\varphi - \varrho \sin\varphi \, d\varphi$$

$$dy = d\varrho \sin\varphi + \varrho \cos\varphi \, d\varphi$$

$$d^2x = d^2\varrho \cos\varphi - 2\, d\varrho \, d\varphi \sin\varphi - \varrho \cos\varphi \, d^2\varphi$$

$$d^2y = d^2\varrho \sin\varphi + 2\, d\varrho \, d\varphi \cos\varphi - \varrho \sin\varphi \, d^2\varphi$$

$$x\,dx + y\,dy = \varrho\, d\varrho$$

$$x\,dy + y\,dx = d\varrho \sin 2\varphi - \varrho \cos 2\varphi \, d\varphi$$

$$x\,dy - y\,dx = \varrho^2 d\varphi$$

$$\frac{dy}{y} - \frac{dx}{x} = \frac{d\varphi}{\sin\varphi \cos\varphi}$$

$$\frac{dy}{y} + \frac{dx}{x} = 2\left\{\frac{d\varrho}{\varrho} + d\varphi \operatorname{cotg} 2\varphi\right\}$$

$$(dx)^2 + (dy)^2 = (d\varrho)^2 + (\varrho\, d\varphi)^2$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d\varrho \sin\varphi + \varrho \cos\varphi \, d\varphi}{d\varrho \cos\varphi - \varrho \sin\varphi \, d\varphi}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{-\varrho \frac{d^2\varrho}{d\varphi^2} + 2\left(\frac{d\varrho}{d\varphi}\right)^2 + \varrho^2}{\left(\frac{d\varrho}{d\varphi}\cos\varphi - \varrho \sin\varphi\right)^3},$$ ϱ als Function von φ.

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial \varrho^2} + \frac{1}{\varrho^2}\frac{\partial^2 z}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{\varrho}\frac{\partial z}{\partial \varrho}.$$

6) Sei

$$x = u \cos \alpha t + v \sin \alpha t \quad y = -u \sin \alpha t + v \cos \alpha t,$$

so wird:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{du}{dt} \cos \alpha t + \frac{dv}{dt} \sin \alpha t - \alpha u \sin \alpha t + \alpha v \cos \alpha t$$

$$\frac{dy}{dt} = -\frac{du}{dt} \sin \alpha t + \frac{dv}{dt} \cos \alpha t - \alpha u \cos \alpha t - \alpha v \sin \alpha t$$

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = \frac{d^2 u}{dt^2} \cos \alpha t + \frac{d^2 v}{dt^2} \sin \alpha t - 2\alpha \frac{du}{dt} \sin \alpha t + 2\alpha \frac{dv}{dt} \cos \alpha t$$
$$- \alpha^2 u \cos \alpha t - \alpha^2 v \sin \alpha t$$

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = -\frac{d^2 u}{dt^2} \sin \alpha t + \frac{d^2 v}{dt^2} \cos \alpha t - 2\alpha \frac{du}{dt} \cos \alpha t - 2\alpha \frac{dv}{dt} \sin \alpha t$$
$$+ \alpha^2 u \sin \alpha t - \alpha^2 v \cos \alpha t.$$

§. 59.

Maxima und Minima.

1) Ist

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{1.2} f''(x) + \cdots$$

und

$$f'(x) = 0 \quad \{\text{oder } \infty\} \quad \text{für } x = \alpha$$

und $f^{(2\varkappa)}(\alpha)$ die erste nicht verschwindende Ableitung gerader Ordnung, so ist

$$f(\alpha) \text{ ein } \begin{cases} \text{Max.} \\ \text{Min.} \end{cases} \text{ je nachdem } f^{(2\varkappa)}(\alpha) \begin{cases} - \\ + \end{cases} \text{ ist.}$$

Wird $f^{(2\varkappa)}(\alpha) = \infty$, so untersuche man, ob

$$f^{(2\varkappa)}(\alpha \pm h) - f^{(2\varkappa)}(\alpha) \begin{cases} - \\ + \end{cases} \text{ ist,}$$

es ist alsdann

$$f(\alpha) \text{ ein } \begin{cases} \text{Maximum} \\ \text{Minimum.} \end{cases}$$

Die Untersuchung wird durch folgende Bemerkungen oft erleichtert.

1) Ist

$$f'(x) = \varphi(x) . \psi(x)$$

oder

$$f'(x) = \frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$$

und $\psi(x)$ für jeden reellen Werth von x wesentlich $+$, so wird $f(x)$ ein Maximum resp. Minimum, wenn

$$[f'(x)] = \varphi(x) = 0$$

$$[f''(x)] = \varphi'(x) \begin{cases} - \\ + \end{cases} \text{ist.}$$

2) Ist $f(x) = \frac{A}{\varphi(x)}$, so suche man das Max. oder Min. von $\varphi(x)$.

3) Ist $f(x) = \frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$, so ist es oft vortheilhafter, das Max. oder Min. von $\frac{1}{f(x)} = \frac{\psi(x)}{\varphi(x)}$ zu suchen.

4) Ist $f(\alpha) = +$ und ein Max. oder Min., so ist auch $\log f(\alpha)$ ein Max. oder Min.

2) Seien zwei unabhängige Variable vorhanden und

$$z = f(x_1 y).$$

Sei ferner

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0, \; \frac{\partial f}{\partial y} = 0, \quad Q = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \, \partial y}\right)^2 - \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial y^2},$$

so ist z ein $\begin{cases} \text{Max.} \\ \text{Min.} \end{cases}$, wenn $Q < 0$ und gleichzeitig $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \; \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ beide $\begin{cases} - \\ + \end{cases}$ sind.

Für $Q \gtreqless 0$ findet weder ein Max. noch ein Min. statt.

3) Seien $x_1 x_2 \ldots x_n$ unabhängige Variable, und

$$z = f(x_1 \ldots x_n),$$

ferner

$$f_{\varkappa\lambda} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_\varkappa \, \partial x_\lambda}$$

und

$$H_\varkappa = \begin{vmatrix} f_{11} \, f_{12} \cdots f_{1\varkappa} \\ f_{12} \cdots\cdots\cdots \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \\ f_{1\varkappa} \cdots\cdots f_{\varkappa\varkappa} \end{vmatrix}$$

Hesse'sche (Determinante),

so wird z ein Max., wenn alle

$$\begin{matrix} H_\varkappa < 0 & \text{für ungerade } \varkappa \\ H_\varkappa > 0 & \text{für gerade } \varkappa \end{matrix} \quad (\varkappa = 1, 2, 3, \ldots n),$$

und z ein Min., wenn alle $H_\varkappa > 0$ für $\varkappa = 1, 2, 3, \ldots n$.

Findet weder das eine, noch das andere statt, so existirt entweder weder ein Max. noch ein Min., oder das Verhalten der Function muss mittelst der Taylor'schen Reihe untersucht werden.

4) Sei gegeben

$$u = f_1(x_1 x_2, \ldots x_{n+m}),$$

ausserdem die Bedingungsgleichungen

$$\varphi_1(x_1 \ldots x_{m+n}) = 0$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\varphi_m(x_1 \ldots x_{m+n}) = 0.$$

Man bestimme aus diesen und aus

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} + \sum_1^m \lambda_\varkappa \frac{\partial \varphi_\varkappa}{\partial x_1} = 0$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\frac{\partial f}{\partial x_{m+n}} + \sum_1^m \lambda_\varkappa \frac{\partial \varphi_\varkappa}{\partial x_{m+n}} = 0.$$

Die Unbekannte

$$x_1 x_2 \ldots x_{m+n}$$
$$\lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_m,$$

diese in

$$u = f(x_1 x_2 \ldots x_{m+n})$$

eingesetzt, liefern ein Max. oder Min.

Litteratur und Beweise vide Dr. Otto Stolz: Sitzungsber. der k. k. Akademie der Wiss. in Wien. Dec. 1868.

Integral-Tafeln.

A. Unbestimmte Integrale.

§. 60.

Allgemeine Bemerkungen und Lehrsätze.

1) Findet man hier eine Integralformel nicht, so ersetze man

x durch $-x$
oder x „ xi
„ x „ x^n
„ x „ $\frac{\pi}{2} - x$
„ e^x „ e^{xi}
„ e^{x^n} „ e^{ix^n}

suche die Transformirte, und mache rechter Hand in der gefundenen Formel dieselben Substitutionen.

2) Man beachte, dass:

$$\int u \frac{dv}{dx} dx = uv - \int v \frac{du}{dx} dx$$

$$\int u dx = \frac{u}{v} \int v dx - \int \left\{ \frac{d}{dx} \left(\frac{u}{v} \right) \int v dx \right\} dx$$

wird $x = \varphi(z)$

$$\int f(x) dx = \int f\{\varphi(z)\} \frac{d\varphi(z)}{dz} dz$$

3) Es ist, so lange die Reihen convergent sind:

$$\int f(x)\,dx = f(a)\,\frac{x-a}{1!} + f'(a)\,\frac{(x-a)^2}{2!} + f''(a)\,\frac{(x-a)^3}{3!} + \cdots$$

$$\int f(x)\,dx = f(0)\,\frac{x}{1!} + f'(0)\,\frac{x^2}{2!} + f''(0)\,\frac{x^3}{3!} + \cdots$$

$$\int f(x)\,dx = xf(x) - \frac{x^2}{2!}f'(x) + \frac{x^3}{3!}f''(x) + \cdots$$

$$+ \frac{(-1)^n}{n!}\int x^n f^{(n)}(x)\,dx.$$

4) Es ist

$$\int\int \varphi(x)\,dx\,.\,dx = x\int \varphi(x)\,dx - \int x\,\varphi(x)\,dx$$

§. 61.

Zerlegung einer algebraischen rationalen Function.

Sei

$$\frac{F(x)}{f(x)} = \frac{F(x)}{(x-\alpha)^p(x-\beta)^q(x-\gamma)^r\ldots}$$

$$= \frac{A_p}{(x-\alpha)^p} + \frac{A_{p-1}}{(x-\alpha)^{p-1}} + \cdots + \frac{A_1}{x-\alpha}$$

$$+ \frac{B_q}{(x-\beta)^q} + \frac{B_{q-1}}{(x-\beta)^{q-1}} + \cdots + \frac{B_1}{x-\beta}$$

$$+ \cdots\cdots\cdots\cdots$$

Sei ferner

$$\varphi(x) = (x-\beta)^q(x-\gamma)^r\ldots \quad \text{d. h.} \quad \varphi(x) = \frac{f(x)}{(x-\alpha)^p},$$

so lassen sich die Coefficienten A_p, $A_{p-1}, \ldots$ aus folgenden Relationen bestimmen:

$$F(\alpha) = A_p\,\varphi(\alpha)$$

$$F'(\alpha) = A_p\,\varphi'(\alpha) + A_{p-1}\,\varphi(\alpha)$$

$$F''(\alpha) = A_p\,\varphi''(\alpha) + \binom{2}{1} A_{p-1}\,\varphi'(\alpha) + 1.2.A_{p-2}\,\varphi(\alpha)$$

$$F'''(\alpha) = A_p\,\varphi'''(\alpha) + \binom{3}{1}.1.A_{p-1}\,\varphi''(\alpha) + \binom{3}{2}1.2.A_{p-2}\,\varphi'(\alpha)$$
$$+ 1.2.3.A_{p-3}\,\varphi(\alpha).$$

$$F^{IV}(\alpha) = A_p\,\varphi^{IV}(\alpha) + \binom{4}{1}1\,A_{p-1}\,\varphi'''(\alpha) + \binom{4}{2}1.2.A_{p-2}\,\varphi''(\alpha)$$
$$+ \binom{4}{3}.1.2.3\,A_{p-3}\,\varphi'(\alpha) + 1.2.3.4.A_{p-4}\,\varphi(\alpha). \text{ etc.}$$

Ersetzt man α durch β, A durch B etc., so ergeben sich die Formeln für die übrigen Coefficienten.

Insbesondere ist:

$$\int\left[\frac{M+iN}{x-\alpha-i\beta}+\frac{M-iN}{x-\alpha+i\beta}\right]dx = M\log(x^2-2\alpha x+\alpha^2+\beta^2)$$
$$-2N\,arctgn\,\frac{x-\alpha}{\beta},$$

wobei M, N, α, β beliebige reelle Zahlen sind.

§. 62.

Transformation der Integrale.

Es ist

1) $$\int\int f(xy)\,dx\,dy = \int\int f(\varphi,\psi)\,\Delta\,dr\,ds,$$

wenn

$$x = \varphi(r,s),\quad y = \psi(r,s)$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} \frac{\partial\varphi}{\partial r} & \frac{\partial\psi}{\partial s} \\ \frac{\partial\varphi}{\partial s} & \frac{\partial\psi}{\partial s} \end{vmatrix}$$

2) $$\int\int\int f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \int\int\int f(\varphi,\psi,x)\,\Delta\,dr\,ds\,dt$$

$$x = \varphi(r,s,t),\quad y = \psi(r,s,t),\quad z = \chi(r,s,t)$$

$$\varDelta = \begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial r} & \frac{\partial \psi}{\partial r} & \frac{\partial \chi}{\partial r} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial s} & \frac{\partial \psi}{\partial s} & \frac{\partial \chi}{\partial s} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial t} & \frac{\partial \psi}{\partial t} & \frac{\partial \chi}{\partial t} \end{vmatrix}.$$

3) Für $x = \varrho \cos\varphi \quad y = \varrho \sin\varphi$ ist

$$\int\int f(x,y)\,dx\,dy = \int\int f(\varrho\cos\varphi, \varrho\sin\varphi)\,\varrho\,d\varrho\,d\varphi.$$

4) Für $x = \varrho\cos\varphi, \quad y = \varrho\sin\varphi\cos\theta, \quad z = \varrho\sin\varphi\sin\theta$ ist

$$\int\int\int f(xyz)\,dx\,dy\,dz = \int\int\int f\{\varrho\cos\varphi, \varrho\sin\varphi\cos\theta, \varrho\sin\varphi\sin\theta\}\,\varrho^2\sin\varphi\,d\varrho\,d\varphi\,d\theta.$$

5) Für $x = r\cos\theta + a\sin\theta, \quad y = r\sin\theta + a\cos\theta$ wird:

$$\int\int f(x,y)\,dx\,dy = \int\int f(r\cos\theta + a\sin\theta, r\sin\theta + a\cos\theta)\,(a\sin 2\theta - r)\,d\theta\,dr.$$

6) Für $\alpha x = yz, \quad \beta y = xz, \quad \gamma z = xy$ wird:

$$\int\int\int f(\alpha\beta\gamma)\,d\alpha\,d\beta\,d\gamma = 4\int\int\int f\left\{\frac{yz}{x}, \frac{xz}{y}, \frac{xy}{z}\right\}dx\,dy\,dz.$$

7) Für $x + y = u, \quad y = vu$

$$\int\int f(x,y)\,dx\,dy = \int\int f\{(1-v)u, uv\}\,u\,du\,dv.$$

§. 63.

Integrale einfacher Functionen.

1) $\displaystyle\int x^m\,dx = \frac{x^{m+1}}{m+1}, \quad \int x^{-m}\,dx = -\frac{1}{(m-1)\,x^{m-1}}$

$$\int x^{\pm\frac{m}{n}}\,dx = \frac{n}{n \pm m}\sqrt[n]{x^{n\pm m}}$$

2) $\displaystyle\int \frac{dx}{x} = \log x$

3) $\int dx\sqrt{x} = \frac{2}{3}\sqrt{x^3}$

4) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x}$

5) $\int dx\sqrt[3]{x^2} = \frac{3}{5}\sqrt[3]{x^5} \quad \int dx\sqrt[3]{x} = \frac{3}{4}\sqrt[3]{x^4}$

6) $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}} = 3\sqrt[3]{x} \quad \int \frac{dx}{\sqrt[3]{x}} = \frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2}$

7) $\int e^x\, dx = e^x$

8) $\int a^x\, dx = \frac{a^x}{\log a}$

9) $\int \log x\, dx = x \log x - x$

10) $\int \sin x\, dx = -\cos x$

11) $\int \cos x\, dx = \sin x$

12) $\int \operatorname{tgn} x\, dx = -\log\cos x$

13) $\int \operatorname{cotg} x\, dx = \log\sin x$

14) $\int \sec x\, dx = \frac{1}{2}\log\frac{1+\sin x}{1-\sin x}$

15) $\int \operatorname{cosec} x\, dx = \log\operatorname{tgn}\frac{x}{2}$

16) $\int \arcsin x\, dx = x \arcsin x + \sqrt{1-x^2}$

17) $\int \arccos x\, dx = x \arccos x - \sqrt{1-x^2}$

18) $\int \operatorname{arc\,tgn} x\, dx = x \operatorname{arc\,tgn} x - \frac{1}{2}\log(1+x^2)$

19) $\int \operatorname{arc\,cotg} x\, dx = x \operatorname{arc\,cotg} x + \frac{1}{2}\log(1+x^2)$

20) $\int \operatorname{arc\,sec} x\, dx = x \operatorname{arc\,sec} x - \log\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$

21) $\int \operatorname{arc\,cosec} x\, dx = x \operatorname{arc\,cosec} x + \log\left(x + \sqrt{x^2+1}\right).$

§. 64.

Integrale durch Substitutionen integrirbar.

1) $\int \frac{dx}{x\sqrt{2ax - a^2}} \quad x = \frac{a}{1 - z}$

2) $\int \frac{dx}{x\sqrt{a^{2n} \pm x^{2n}}} \quad x = \frac{1}{z}$

3) $\int \frac{dx}{x\sqrt{a + bx + cx^2}} \quad x = \frac{1}{z}$

4) $\int dx \sqrt{\frac{x}{2a - x}} \quad x = a(1 - \cos\varphi)$

5) $\int \frac{dx}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}} \quad \sqrt{x+1} + \sqrt{x-1} = z$

6) $\int x^2\sqrt{a - x}\, dx \quad x + a = t^2$

7) $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{1 + x^2}} \quad x^2 = \frac{1}{t^2 - 1}$

8) $\int \frac{dx}{(a^2 + x^2)^{3/2}} \quad x^2 = \frac{a^2}{t^2 - 1}$

9) $\int \sqrt{\frac{x}{a^3 - x^3}} \quad y = x^{3/2}$

10) $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{1 - x^3}} \quad 1 - x^3 = x^3 z^3$

11) $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{1 + x^3}} \quad x = \frac{z}{\sqrt[3]{1 - z^3}}$

12) $\int \frac{x\,dx}{\sqrt[3]{1 + x} + \sqrt{1 + x}} \quad 1 + x = z^6$

13) $\int \frac{dx}{(1 - x^3)\sqrt[3]{1 + x^3}} \quad x = \frac{1}{z} \sqrt[3]{1 + z^3} = y$

14) $\int x \frac{\sqrt[3]{1 + x^3}}{1 - x^3}\, dx \quad x^3 = \frac{1 - y}{1 + y} \quad \sqrt[3]{1 - y} = z$

15) $\int \frac{dx}{(1 + x)\sqrt[3]{1 - x^3}} \quad x = \frac{y - 1}{y + 1} \quad z = \sqrt[3]{1 + 3y^2}$

16) $\int \frac{\sqrt[3]{1-x^3}}{1+x}\,dx \quad x = \frac{y-1}{y+1}, \quad z\sqrt[3]{4} = \sqrt[3]{2(1+3y^2)}$

17) $\int \frac{(a-bx^2)\,dx}{x\sqrt{\{cx^2-(a-bx^2)^2\}}} \quad \frac{a}{x}+by=y$

18) $\int \frac{dx}{(1+x)\sqrt[3]{1+3x+3x^2}} \quad y(1+x)=x$

19) $\int \frac{dx}{(3-x^2)\sqrt[3]{1+x^2}} \quad \begin{cases} \sqrt[3]{1+x^2} = z\sqrt[3]{4}, & z = \sqrt[3]{1-3y+3y^2} \\ y(1+u)=1, & v=\sqrt[3]{1+u^3} \end{cases}$

20) $\int \frac{dx}{(1+x)\sqrt{2x^2-1}}, \; x\sqrt{2} = \frac{t^2+1}{t^2-1}, \; t = \frac{y^2-3}{4}\sqrt{2}, \; y = z\sqrt{-1}$

21) $\int \frac{dx}{(1+r^2x^2)\sqrt{1-x^2}} \quad x^2=y, \; \sqrt{y-y^2}=yu$

22) $\int \frac{dx}{(a+bx)\sqrt{1+x^2}} \quad x = \frac{1-y^2}{2y}$

23) $\int \frac{\sqrt{1+x^4}}{1-x^4}\,dx \quad \frac{x\sqrt{2}}{\sqrt{1+x^4}} = z$

24) $\int \frac{dx}{(1-x^4)\sqrt[4]{1+x^4}} \quad z = \frac{x}{\sqrt[4]{1+x^4}}$

25) $\int \frac{dx}{(1+x)\sqrt[4]{2x^2-1}} \quad tgn^4 z = 2x^2-1$

26) $\int \frac{(1\pm x^2)}{(1\mp x^2)\sqrt{1+x^4}}\,dx \quad y = \frac{x\sqrt{2}}{1\mp x^2}$

27) $\int \frac{x\,dx}{(1+x^2)\sqrt[4]{2x^2+1}} \quad \sqrt[4]{2x^2+1} = cotg\, z$

28) $\int \frac{(x^2-1)\,dx}{x\sqrt{1+3x^2+x^4}} \quad z = x+\frac{1}{x}$

29) $\int \frac{(x+\sqrt{1+x^2})^{\frac{m}{n}}}{\sqrt{1+x^2}}\,dx \quad x+\sqrt{1+x^2}=z^n$

30) $\int \frac{dx}{(1-x^n)\sqrt[2n]{2x^{2n}-1}}, \quad \sqrt[2n]{2x^{2n}-1} = xy$

31) $\int \frac{x^{n-1}\,dx}{(1-x^n)\sqrt[2n]{2x^n-1}}, \quad \sqrt[2n]{2x^n-1} = y$

32) $\displaystyle\int\frac{x\,dx}{(\alpha+\beta x)\sqrt[4]{2\gamma x^2+\delta}}\qquad z=\sqrt[4]{2\gamma x^2+\delta}$

33) $\displaystyle\int\frac{x^{n-2}\,dx\sqrt{a+bx^n+cx^{2n}}}{a-cx^n}\qquad \sqrt{a+bx^n+cx^{2n}}=zx$

34) $\displaystyle\int\frac{dx}{(a+bx^n)\sqrt[2n]{a+2bx^n}},\qquad \frac{x}{\sqrt[2n]{a+2bx^n}}=z$

35) $\displaystyle\int\frac{dx}{(a+bx^n)\sqrt[3n]{a^2+3abx^n+3b^2x^{2n}}}$

$$z=\frac{x}{\sqrt[3n]{a^2+3abx^n+3b^2x^{2n}}}$$

36) $\displaystyle\int\frac{x\,dx}{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt{1+x}}\qquad 1+x=z^6$

37) $\displaystyle\int\frac{dx}{(\alpha+\beta x+\gamma x^2)^{\frac{m}{n}}}=2\beta n\int\frac{y^{-m+n-1}\,dy}{\sqrt{4\beta y^n+(\beta^2-4\alpha\gamma)}}$

$$y^n=\alpha+\beta x+\gamma x^2$$

Sei FR eine rationale Function.

38) $\displaystyle\int FR\{x,\sqrt{ax+b}\}\,dx=\frac{2}{a}\int FR\left\{\frac{u^2-b}{\alpha},u\right\}u\,du$

$$u=\sqrt{ax+b}$$

39) $\displaystyle\int FR\{x,\sqrt{(x-a)(x-b)}\}\,dx=-2(a-b)$

$$\int FR\left\{\frac{bu^2-a}{u^2-1},\,u\,\frac{b-a}{u^2-1}\right\}\frac{u\,du}{(u^2-1)^2},$$

wenn $u=\sqrt{\dfrac{x-a}{x-b}}$ gesetzt wird.

40) $\displaystyle\int FR\left\{x,\sqrt[m]{a+\sqrt[m]{bx+c}}\right\}dx\qquad z^m=a+\sqrt[m]{bx+c}$

41) $\displaystyle\int FR\{x,\sqrt{a+bx\pm x^2}\}\,dx\qquad \begin{cases}\sqrt{a+bx+x^2}=x+z\\ \sqrt{a+bx-x^2}=\sqrt{a}+xz\end{cases}$

42) $\displaystyle\int FR\left\{x,\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right\}dx\qquad x=\frac{dz^n\mp b}{a-cz^n}$

43) $\displaystyle\int x^m(a+bx^n)^p\,dx\qquad z=a+bx^n$

44) $$\int \frac{FR(x^2)\,dx}{\sqrt{a+cx^2}} = \int FR\left\{\frac{a u^2}{\varkappa^2 - c u^2}\right\} \frac{\varkappa\, du}{\varkappa^2 - c u^2},\quad u = \frac{\varkappa x}{\sqrt{a+cx^2}}$$

45) $$\int \frac{FR(x^2)\,x\,dx}{\sqrt{a+cx^2}} \qquad u = \sqrt{a+cx^2}$$

Die Integrale

46) $$\int \frac{f_1(x^2)\,dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-\varkappa^2 x^2)}},\quad \int \frac{f_2(x^2)\,dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-\varkappa^2 x^2)}},$$
$$\int \frac{f_3(x^2)\,dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-\varkappa^2 x^2)}}$$

lassen sich, wenn

$$f_1(x^2) = -f\left(\frac{1}{\varkappa^2 x^2}\right),\quad f_1(x^2) = -f_1\left\{\frac{1-\varkappa^2 x^2}{\varkappa^2(1-x^2)}\right\},$$
$$f_2(x^2) = -f_2\left\{\frac{1-x^2}{1-\varkappa^2 x^2}\right\}$$

durch die Substitutionen

$$p = \frac{1}{x}\sqrt{(1-x^2)(1-x^2\varkappa^2)},\quad p = x\,\frac{\sqrt{1-\varkappa^2 x^2}}{\sqrt{1-x^2}},\quad p = x\,\frac{\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-\varkappa^2 x^2}}$$

auf rationale zurückführen.

Hermit Lionville Journ. VI, p. 5 bis 18.

§. 65.

Sei $a + b x^n = w.$

1) $$\int x^{m-1}(a+bx^n)^p\,dx = \frac{x^m w^p}{m} - \frac{p n b}{m}\int x^{m+n-1} w^{p-1}\,dx$$

2) $$= \frac{x^{m-n} w^{p+1}}{(p+1)nb} - \frac{m-n}{(p+1)nb}\int x^{m-n-1} w^{p+1}\,dx$$

3) $$\int x^{m-1}(a+bx^n)^p dx = \frac{x^{m-n}\, w^{p+1}}{(m+np)b} - \frac{(m-n)a}{(m+np)b} \int x^{m-n-1}\, w^p\, dx$$

4) $$= \frac{x^m w^p}{m+np} + \frac{pna}{m+np}\int x^{m-1}\, w^{p-1}\, dx$$

5) $$= \frac{x^m w^{p+1}}{ma} - \frac{(m+n+np)b}{ma} \int x^{m+n-1}\, w^p\, dx$$

6) $$= -\frac{x^m w^{p+1}}{(p+1)na} + \frac{m+n+np}{(p+1)na} \int x^{m-1}\, w^{p+1}\, dx$$

§. 66.

Sei $a + bx = w.$

1) $$\int \frac{dx}{a+bx} = \frac{1}{b} \log w$$

2) $$\int \frac{x\,dx}{a+bx} = \frac{x}{b} - \frac{a}{b^2} \log w$$

3) $$\int \frac{x^2\,dx}{a+bx} = \frac{x^2}{2b} - \frac{ax}{b^2} + \frac{a^2}{b^3} \log w$$

4) $$\int \frac{x^3\,dx}{a+bx} = \frac{x^3}{3b} - \frac{aw^2}{2b^2} + \frac{a^2 x}{b^3} - \frac{a^3}{b^4} \log w$$

5) $$\int \frac{x^4\,dx}{a+bx} = \frac{x^4}{4b} - \frac{ax^3}{3b^2} + \frac{a^2x^2}{2b^3} - \frac{a^3x}{b^4} + \frac{a^4}{b^5} \log w$$

6) $$\int \frac{x^5\,dx}{a+bx} = \frac{x^5}{5b} - \frac{ax^4}{4b^2} + \frac{a^2x^3}{3b^3} - \frac{a^3x^2}{2b^4} + \frac{a^4x}{b^5} - \frac{a^5}{b^6} \log w$$

7) $$\int \frac{dx}{(a+bx)^2} = -\frac{1}{bw}$$

8) $\int \frac{x\,dx}{(a+bx)^2} = \frac{a}{b\,w} + \frac{1}{b^2} \log w$

9) $\int \frac{x^2\,dx}{(a+bx)^2} = \left(\frac{x^2}{b} - \frac{2a^2}{b^3}\right)\frac{1}{w} - \frac{2a}{b^3} \log w$

10) $\int \frac{x^3\,dx}{(a+bx)^2} = \left(\frac{x^3}{2b} - \frac{3ax^2}{2b^2} + \frac{3a^3}{b^4}\right)\frac{1}{w} + \frac{3a^2}{b^4} \log w$

11) $\int \frac{x^4\,dx}{(a+bx)^2} = \left(\frac{x^4}{3b} - \frac{3ax^3}{3b^2} + \frac{2a^2x^2}{b^3} - \frac{4a^4}{b^5}\right)\frac{1}{w} - \frac{4a^3}{b^5} \log w$

12) $\int \frac{x^5\,dx}{(a+bx)^2} = \left(\frac{x^5}{4b} - \frac{5ax^4}{12b^2} + \frac{5a^2x^3}{6b^3} - \frac{5a^3x^2}{2b^4} + \frac{5a^5}{b^6}\right)\frac{1}{w} + \frac{5a^4}{b^6} \log w.$

13) $\int \frac{dx}{(a+bx)^3} = -\frac{1}{2bw^2}$

14) $\int \frac{x\,dx}{(a+bx)^3} = -\left(\frac{x}{b} + \frac{a}{2b^2}\right)\frac{1}{w^2}$

15) $\int \frac{x^2\,dx}{(a+bx)^3} = \left(\frac{2ax}{b^2} + \frac{3a^2}{2b^3}\right)\frac{1}{w^2} + \frac{1}{b^3} \log w$

16) $\int \frac{x^3\,dx}{(a+bx)^3} = \left(\frac{x^3}{b} - \frac{6a^2x}{b^3} - \frac{9a^3}{2b^4}\right)\frac{1}{w^2} - \frac{3a}{b^4} \log w$

17) $\int \frac{x^4\,dx}{(a+bx)^3} = \left(\frac{x^4}{2b} - \frac{2ax^3}{b^2} + \frac{12a^3x}{b^4} + \frac{9a^4}{b^5}\right)\frac{1}{w^2} + \frac{6a^2}{b^5} \log w$

18) $\int \frac{x^5\,dx}{(a+bx)^3} = \left(\frac{x^5}{3b} - \frac{5ax^4}{6b^2} + \frac{10a^2x^3}{3b^3} - \frac{20a^4x}{b^5} - \frac{15a^5}{b^6}\right)\frac{1}{w^2} - \frac{10a^3}{b^6} \log w.$

19) $\int \frac{x\,dx}{(a+bx)^4} = -\left(\frac{x}{2b} + \frac{a}{6b^2}\right)\frac{1}{w^3}$

20) $\int \frac{x^2\,dx}{(a+bx)^4} = -\left(\frac{x^2}{b} + \frac{ax}{b^2} + \frac{a^2}{3b^3}\right)\frac{1}{w^3}$

21) $\int \frac{x^3\,dx}{(a+bx)^4} = \left(\frac{3ax^2}{b^2} + \frac{9a^2x}{2b^3} + \frac{11a^3}{6b^4}\right)\frac{1}{w^3} + \frac{1}{b^4} \log w$

22) $\int \frac{x\,dx}{(a+bx)^5} = -\left(\frac{x}{3b} + \frac{a}{12b^2}\right)\frac{1}{w^4}$

23) $\int \frac{x^2\,dx}{(a+bx)^5} = -\left(\frac{x^2}{2b} + \frac{ax}{3b^2} + \frac{a^2}{12b^3}\right)\frac{1}{w^4}$

24) $$\int \frac{x^3\,dx}{(a+bx)^5} = -\left(\frac{x^3}{b} + \frac{3\,a\,x^2}{2\,b^2} + \frac{a^2 x}{b^3} + \frac{a^3}{4\,b^4}\right)\frac{1}{w^4}$$

25) $$\int \frac{dx}{x(a+bx)} = \frac{1}{a}\log\frac{x}{w}$$

26) $$\int \frac{dx}{x^2(a+bx)} = -\frac{1}{a\,x} + \frac{b}{a^2}\log\frac{w}{x}$$

27) $$\int \frac{dx}{x^3(a+bx)} = -\frac{1}{2\,a\,x^2} + \frac{b}{a^2 x} - \frac{b^2}{a^3}\log\frac{w}{x}$$

28) $$\int \frac{dx}{x^4(a+bx)} = -\frac{1}{3\,a\,x^3} + \frac{b}{2\,a^2 x^2} - \frac{b^2}{a^3 x} + \frac{b^3}{a^4}\log\frac{w}{x}$$

29) $$\int \frac{dx}{x^5(a+bx)} = -\frac{1}{4\,a\,x^4} + \frac{b}{3\,a^2 x^3} - \frac{b^2}{2\,a^3 x^2} + \frac{b^3}{a^4 x} - \frac{b^4}{a^5}\log\frac{w}{x}$$

30) $$\int \frac{dx}{x(a+bx)^2} = \frac{1}{a\,w} - \frac{1}{a^2}\log\frac{w}{x}$$

31) $$\int \frac{dx}{x^2(a+bx)^2} = \left(-\frac{1}{a\,x} - \frac{2\,b}{a^2}\right)\frac{1}{w} + \frac{2\,b}{a^3}\log\frac{w}{x}$$

32) $$\int \frac{dx}{x^3(a+bx)^2} = \left(-\frac{1}{2\,a\,x^2} + \frac{3\,b}{2\,a^2 x} + \frac{3\,b^2}{a^3}\right)\frac{1}{w} - \frac{3\,b^2}{a^4}\log\frac{w}{x}$$

33) $$\int \frac{dx}{x^4(a+bx)^2} = \left(-\frac{1}{3\,a\,x^3} + \frac{2\,b}{3\,a^2 x^2} - \frac{2\,b^2}{a^3 x} - \frac{4\,b^3}{a^4}\right)\frac{1}{w} + \frac{4\,b^3}{a^5}\log\frac{w}{x}$$

34) $$\int \frac{dx}{x^5(a+bx)^2} = \left(-\frac{1}{4\,a\,x^4} + \frac{5\,b}{12\,a^2 x^3} - \frac{5\,b^2}{6\,a^3 x^2} + \frac{5\,b^3}{2\,a^4 x} + \frac{5\,b^4}{a^5}\right)\frac{1}{w} - \frac{5\,b^4}{a^6}\log\frac{w}{x}$$

35) $$\int \frac{dx}{x(a+bx)^3} = \left(\frac{3}{2\,a} + \frac{b\,x}{a^2}\right)\frac{1}{w^2} - \frac{1}{a^3}\log\frac{w}{x}$$

36) $$\int \frac{dx}{x^2(a+bx)^3} = \left(-\frac{1}{a\,x} - \frac{9\,b}{2\,a^2} - \frac{3\,b^2 x}{a^3}\right)\frac{1}{w^2} + \frac{3\,b}{a^4}\log\frac{w}{x}$$

37) $$\int \frac{dx}{x^3(a+bx)^3} = \left(-\frac{1}{2\,a\,x^2} + \frac{2\,b}{a^2 x} + \frac{9\,b^2}{a^3} + \frac{6\,b^3 x}{a^4}\right)\frac{1}{w^2} - \frac{6\,b^2}{a^5}\log\frac{w}{x}$$

38) $$\int \frac{dx}{x^4(a+bx)^3} = \left(-\frac{1}{3ax^3} + \frac{5b}{6a^2x^2} - \frac{10b^2}{3a^3x} - \frac{15b^3}{a_4} - \frac{10b^4x}{a^5}\right)\frac{1}{w^2} + \frac{10b^3}{a^6}\log\frac{w}{x}$$

39) $$\int \frac{dx}{x^5(a+bx)^3} = \left(-\frac{1}{4ax^4} + \frac{b}{2a^2x^3} - \frac{5b^2}{4a^3x^2} + \frac{5b^3}{a^4x} + \frac{45b^4}{2a^5} + \frac{15b^5x}{a^6}\right)\frac{1}{w^2} - \frac{15b^4}{a^7}\log\frac{w}{x}$$

40) $$\int \frac{dx}{x(a+bx)^4} = \left(\frac{11}{6a} + \frac{5bx}{2a^2} + \frac{b^2x^2}{a^3}\right)\frac{1}{w^3} - \frac{1}{a^4}\log\frac{w}{x}$$

41) $$\int \frac{dx}{x^2(a+bx)^4} = \left(-\frac{1}{ax} - \frac{22b}{3a^2} - \frac{10b^2x}{a^3} - \frac{4b^3x^2}{a^4}\right)\frac{1}{w^3} + \frac{4b}{a^5}\log\frac{w}{x}$$

42) $$\int \frac{dx}{x^3(a+bx)^4} = \left(-\frac{1}{2ax^2} + \frac{5b}{2a^2x} + \frac{55b^2}{3a^3} + \frac{25b^3x}{a^4} + \frac{10b^4x^2}{a^5}\right)\frac{1}{w^3} - \frac{10b^2}{a^6}\log\frac{w}{x}$$

43) $$\int \frac{dx}{x(a+bx)^5} = \left(\frac{25}{12a} + \frac{13bx}{3a^2} + \frac{7b^2x^2}{2a^3} + \frac{b^3x^3}{a^4}\right)\frac{1}{w^4} - \frac{1}{a^5}\log\frac{w}{x}$$

44) $$\int \frac{dx}{x^2(a+bx)^5} = \left(-\frac{1}{ax} - \frac{125b}{12a^2} - \frac{65b^2x}{3a^3} - \frac{35b^3x^2}{2a^4} - \frac{5b^4x^3}{a^5}\right)\frac{1}{w^4} + \frac{5b}{a^6}\log\frac{w}{x}$$

45) $$\int \frac{dx}{x^3(a+bx)^5} = \left(-\frac{1}{2ax^2} + \frac{3b}{a^2x} + \frac{125b^2}{4a^3} + \frac{65b^3x}{a^4} + \frac{105b^4x^2}{2a^5} + \frac{15b^5x^3}{a^6}\right)\frac{1}{w^4} + \frac{15b^2}{a^7}\log\frac{w}{x}.$$

§. 67.

Sei $a + b x^2 = w.$

1) $\int \frac{dx}{a + b x^2} = \frac{1}{a} \sqrt{\frac{a}{b}}\, arc\, tgn\, x \sqrt{\frac{b}{a}}$ a und b gleichbezeichnet

2) $\int \frac{dx}{a + b x^2} = \frac{1}{2a} \sqrt{\frac{a}{-b}}\, log \frac{x\sqrt{-b} + \sqrt{a}}{x\sqrt{-b} - \sqrt{a}}$ a und b ungleich bezeichnet

3) $\int \frac{x\, dx}{a + b x^2} = \frac{1}{2b} \log w$

4) $\int \frac{x^2 dx}{a + b x^2} = \frac{x}{b} - \frac{a}{b} \int \frac{dx}{w}$

5) $\int \frac{x^3 dx}{a + b x^2} = \frac{x^2}{2b} - \frac{a}{2b^2} \log w$

6) $\int \frac{x^4 dx}{a + b x^2} = \frac{x^3}{3b} - \frac{a x}{b^2} + \frac{a^2}{b^2} \int \frac{dx}{w}$

7) $\int \frac{x^5 dx}{a + b x^2} = \frac{x^4}{4b} - \frac{a x^2}{2b^2} + \frac{a^2}{2b^3} \log w$

8) $\int \frac{dx}{(a + b x^2)^2} = \frac{x}{2aw} + \frac{1}{2a} \int \frac{dx}{w}$

9) $\int \frac{x\, dx}{(a + b x^2)^2} = -\frac{1}{2bw}$

10) $\int \frac{x^2 dx}{(a + b x^2)^2} = -\frac{x}{2bw} + \frac{1}{2b} \int \frac{dx}{w}$

11) $\int \frac{x^3 dx}{(a + b x^2)^2} = -\frac{a}{2b^2 w} + \frac{1}{2b^2} \log w$

12) $\int \frac{x^4 dx}{(a + b x^2)^2} = \left(\frac{x^3}{b} + \frac{3ax}{2b^2}\right)\frac{1}{w} - \frac{3a}{2b^2} \int \frac{dx}{w}$

13) $\int \frac{x^5 dx}{(a + b x^2)^2} = \left(\frac{x^4}{2b} - \frac{a^2}{b^3}\right)\frac{1}{w} - \frac{a}{b^3} \log w$

14) $\int \frac{dx}{(a + b x^2)^3} = \left(\frac{3 b x^3}{8 a^2} + \frac{5x}{8a}\right)\frac{1}{w^2} + \frac{3}{8a^2} \int \frac{dx}{w}$

$$15)\quad \int \frac{x\,dx}{(a+bx^2)^3} = -\frac{1}{4bw^2}$$

$$16)\quad \int \frac{x^2\,dx}{(a+bx^2)^3} = \left(\frac{x^3}{8a} - \frac{x}{8b}\right)\frac{1}{w^2} + \frac{1}{8ab}\int\frac{dx}{w}$$

$$17)\quad \int \frac{x^3\,dx}{(a+bx^2)^3} = \left(-\frac{x^2}{2b} - \frac{a}{4b^2}\right)\frac{1}{w^2}$$

$$18)\quad \int \frac{x^4\,dx}{(a+bx^2)^3} = \left(-\frac{5x^3}{8b} - \frac{3ax}{8b^2}\right)\frac{1}{w^2} + \frac{3}{8b^2}\int\frac{dx}{w}$$

$$19)\quad \int \frac{x^5\,dx}{(a+bx^2)^3} = \left(\frac{ax^2}{b^2} + \frac{3a^2}{4b^3}\right)\frac{1}{w^2} + \frac{1}{2b^3}\log w$$

$$20)\quad \int \frac{dx}{(a+bx^2)^4} = \left(\frac{5b^2x^5}{16a^3} + \frac{5bx^3}{6a^2} + \frac{11x}{16a}\right)\frac{1}{w^3} + \frac{5}{16a^3}\int\frac{dx}{w}$$

$$21)\quad \int \frac{x\,dx}{(a+bx^2)^4} = -\frac{1}{6bw^3}$$

$$22)\quad \int \frac{x^2\,dx}{(a+bx^2)^4} = \left(\frac{bx^5}{16a^2} + \frac{x^3}{6a} - \frac{x}{16b}\right)\frac{1}{w_3} + \frac{1}{16a^2b}\int\frac{dx}{w}$$

$$23)\quad \int \frac{dx}{(a+bx^2)^5} = \left(\frac{35b^3}{128a^4}x^7 + \frac{385b^2x^5}{384a^3} + \frac{511b}{384a^2}x^3 + \frac{93}{128a}x\right)\frac{1}{w^4} + \frac{35}{128a^4}\int\frac{dx}{w}$$

$$24)\quad \int \frac{x\,dx}{(a+bx^2)^5} = -\frac{1}{8bw^4}$$

$$25)\quad \int \frac{x^2\,dx}{(a+bx^2)^5} = \left(\frac{5b^2}{128a^3}x^7 + \frac{55b}{384a^2}x^5 + \frac{73}{384a}x_3 - \frac{5}{128b}x\right)\frac{1}{w^4} + \frac{5}{128a^3b}\int\frac{dx}{w}$$

$$26)\quad \int \frac{dx}{x(a+bx^2)} = \frac{1}{2a}\log\frac{x^2}{w}$$

$$27)\quad \int \frac{dx}{x^2(a+bx^2)} = -\frac{1}{ax} - \frac{b}{a}\int\frac{dx}{w}$$

$$28)\quad \int \frac{dx}{x^3(a+bx^2)} = -\frac{1}{2ax^2} - \frac{b}{2a^2}\log\frac{x^2}{w}$$

$$29)\quad \int \frac{dx}{x^4(a+bx^2)} = -\frac{1}{3ax^3} + \frac{b}{a^2x} + \frac{b^2}{a^2}\int\frac{dx}{w}$$

30) $$\int \frac{dx}{x^5(a+bx^2)} = -\frac{1}{4ax^4} + \frac{b}{2a^2x^2} + \frac{b^2}{2a^3} \log \frac{x^2}{w}$$

31) $$\int \frac{dx}{x(a+bx^2)^2} = \frac{1}{2aw} + \frac{1}{2a^2} \log \frac{x^2}{w}$$

32) $$\int \frac{dx}{x^2(a+bx^2)} = \left(-\frac{1}{ax} - \frac{3bx}{2a^2}\right)\frac{1}{w} - \frac{3b}{2a^2}\int \frac{dx}{w}$$

33) $$\int \frac{dx}{x^3(a+bx^2)} = \left(-\frac{1}{2ax^2} - \frac{b}{a^2}\right)\frac{1}{w} - \frac{b}{a^2} \log \frac{x^2}{w}$$

34) $$\int \frac{dx}{x^4(a+bx^2)} = \left(-\frac{1}{3ax^3} + \frac{5b}{3a^2x} + \frac{5b^2x}{2a^3}\right)\frac{1}{w} + \frac{5b^2}{2a^3}\int \frac{dx}{w}$$

35) $$\int \frac{dx}{x^5(a+bx^2)} = \left(-\frac{1}{4ax^4} + \frac{3b}{4a^2x^2} + \frac{3b^2}{2a^3}\right)\frac{1}{w} + \frac{3b^2}{2a^4} \log \frac{x^2}{w}$$

36) $$\int \frac{dx}{x(a+bx^2)^3} = \left(\frac{3}{4a} + \frac{bx^2}{2a^2}\right)\frac{1}{w^2} + \frac{1}{2a^3} \log \frac{x^2}{w}$$

37) $$\int \frac{dx}{x^2(a+bx^2)^3} = \left(-\frac{1}{ax} - \frac{25bx}{8a^2} - \frac{15b^3x^3}{8a^3}\right)\frac{1}{w^2} - \frac{15b}{8a^3}\int \frac{dx}{w}$$

38) $$\int \frac{dx}{x^3(a+bx^2)^3} = \left(-\frac{1}{2ax^2} - \frac{9b}{4a^2} - \frac{3b^2x^2}{2a^3}\right)\frac{1}{w^2} - \frac{3b}{2a^4} \log \frac{x^2}{w}$$

39) $$\int \frac{dx}{x^4(a+bx^2)^3} = \left(-\frac{1}{3ax^3} + \frac{7b}{3a^2x} + \frac{175b^2x}{24a^3} + \frac{35b^3x^3}{8a^4}\right)\frac{1}{w^2} + \frac{35b^2}{8a^4}\int \frac{dx}{w}$$

40) $$\int \frac{dx}{x^5(a+bx^2)^3} = \left(-\frac{1}{4ax^4} + \frac{b}{a^2x^2} + \frac{9b^2}{2a^3} + \frac{3b^3x^2}{a^4}\right)\frac{1}{w^2} + \frac{3b^2}{a^5} \log \frac{x^2}{w}.$$

§. 68.

Sei $a + bx^3 = w.$

1) $$\int \frac{x^n\,dx}{(a+bx^3)^{p+1}} = \frac{x^{n+1}}{3apw^p} - \frac{n-3p+1}{3ap}\int \frac{x^n}{w^p}\,dx$$

2) $$\int \frac{dx}{x^n(a+bx^3)^{p+1}} = \frac{1}{3apx^{n-1}w^p} + \frac{n+3p-1}{3ap}\int \frac{dx}{x^n w^p}$$

3) $$\int \frac{dx}{(a+bx^3)^{p+1}} = \frac{1}{3apw^p} + \frac{3p-1}{3ap}\int \frac{dx}{w^p}$$

Sei $\varkappa = \sqrt[3]{\frac{a}{b}}.$

4) $$\int \frac{dx}{a+bx^3} = \frac{\varkappa}{3a}\left\{\frac{1}{2}\log\frac{(x+\varkappa)^2}{x^2-x\varkappa+\varkappa^2} + \sqrt{3}\,arc\,tgn\frac{x\sqrt{3}}{2\varkappa-x}\right\}$$

5) $$\int \frac{x\,dx}{a+bx^3} = -\frac{1}{3b\varkappa}\left\{\frac{1}{2}\log\frac{(x+\varkappa)^2}{x^2-x\varkappa+\varkappa^2} - \sqrt{3}\,arc\,tgn\frac{x\sqrt{3}}{2\varkappa-x}\right\}$$

6) $$\int \frac{x^2\,dx}{a+bx^3} = \frac{1}{3b}\log(1+x^3\varkappa^3)$$

7) $$\int \frac{x^3\,dx}{a+bx^3} = \frac{x}{b} - \frac{a}{b}\int \frac{dx}{a+bx^3}$$

8) $$\int \frac{x^4\,dx}{a+bx^3} = \frac{x^2}{2b} - \frac{a}{b}\int \frac{x\,dx}{a+bx^3}$$

9) $$\int \frac{dx}{x(a+bx^3)} = \frac{1}{3a}\log\frac{x^3}{a+bx^3}$$

10) $$\int \frac{dx}{x^2(a+bx^3)} = -\frac{1}{ax} - \frac{b}{a}\int \frac{x\,dx}{a+bx^3}$$

11) $$\int \frac{dx}{x^3(a+bx^3)} = -\frac{1}{2ax^2} - \frac{b}{a}\int \frac{dx}{a+bx^3}$$

12) $$\int \frac{dx}{x^4(a+bx^3)} = -\frac{1}{3ax^3} + \frac{b}{3a^2}\log\frac{a+bx^3}{x^3}$$

13) $$\int \frac{dx}{(a+bx^3)^2} = \frac{x}{2aw} + \frac{2}{3a}\int \frac{dx}{w}$$

14) $$\int \frac{x\,dx}{(a+bx^3)^2} = \frac{x^2}{3aw} + \frac{1}{3a}\int \frac{x\,dx}{w}$$

15) $$\int \frac{x^2\,dx}{(a+bx^3)^2} = -\frac{1}{3bw}$$

16) $$\int \frac{x^3\,dx}{(a+bx^3)^2} = -\frac{x}{3bw} + \frac{1}{3b}\int \frac{dx}{w}$$

17) $$\int \frac{dx}{x(a+bx^3)^2} = \frac{1}{3aw} - \frac{1}{3a^2}\log\frac{w}{x^3}$$

18) $$\int \frac{dx}{x^2(a+bx^3)^2} = \left(-\frac{1}{ax} - \frac{4bx^2}{3a^2}\right)\frac{1}{w} - \frac{4b}{3a^2}\int \frac{x\,dx}{w}$$

19) $$\int \frac{dx}{x^3(a+bx^3)^2} = \left(-\frac{1}{2ax^2} - \frac{5bx}{6a^2}\right)\frac{1}{w} - \frac{5b}{3a^2}\int \frac{dx}{w}$$

20) $$\int \frac{dx}{x^4(a+bx^3)^2} = \left(-\frac{1}{3ax^3} - \frac{2b}{3a^2}\right)\frac{1}{w} + \frac{2b}{3a^3}\log\frac{w}{x^3}.$$

§. 69.

Sei $a + bx^4 = w$.

1) $$\int \frac{x^n\,dx}{(a+bx^4)^{p+1}} = \frac{x^{n+1}}{4apw^p} + \frac{4p-n-1}{4ap}\int \frac{x^n\,dx}{w^p}$$

2) $$\int \frac{dx}{x^n(a+bx^4)^{p+1}} = \frac{1}{a}\int \frac{dx}{x^n w^p} - \frac{b}{a}\int \frac{dx}{x^{n-4} w^{p+1}}$$

3) $$\int \frac{dx}{(a+bx^4)^{p+1}} = \frac{x}{4apw^p} + \frac{4p-1}{4ap}\int \frac{dx}{w^p}$$

Sei $\frac{a}{b}$ positiv und $\sqrt[4]{\frac{a}{b}} = \varkappa$, so wird:

4) $$\int \frac{dx}{a+bx^4} = \frac{\varkappa}{4a\sqrt{2}}\left\{\log\frac{x^2+\varkappa x\sqrt{2}+\varkappa^2}{x^2-\varkappa x\sqrt{2}+\varkappa^2} + 2\,arc\,tgn\frac{\varkappa x\sqrt{2}}{\varkappa^2-x^2}\right\}$$

5) $$\int \frac{dx}{a+bx^4} = \frac{\varkappa'}{4a}\left\{\log\frac{x+\varkappa'}{x-\varkappa'} + 2\,arc\,tgn\,\frac{x}{\varkappa'}\right\}$$

wenn $\frac{a}{b}$ negativ und $\varkappa' = \sqrt[4]{-\frac{a}{b}}$

6) $$\int \frac{dx}{(a+bx^4)^2} = \frac{x}{4aw} + \frac{3}{4a}\int \frac{dx}{w}$$

7) $$\int \frac{dx}{(a+bx^4)^3} = \frac{x}{a}\left\{\frac{1}{8w^2} + \frac{7}{32aw}\right\} + \frac{21}{32a^2}\int \frac{dx}{w}$$

8) $$\int \frac{dx}{(a+bx^4)^3} = \frac{x}{a}\left\{\frac{1}{12w^3} + \frac{11}{96aw^2} + \frac{77}{384a^2w}\right\} + \frac{77}{128a^3}\int \frac{dx}{w}.$$

Sei $\frac{a}{b}$ positiv und $\varkappa = \sqrt[4]{\frac{a}{b}}$,

9) $$\int \frac{x\,dx}{(a+bx^4)} = -\frac{1}{2\sqrt{ab}}\, arc\,tgn\, \frac{\sqrt{a}}{x^2\sqrt{b}}$$

10) $$\int \frac{x^2\,dx}{(a+bx^4)} = \frac{1}{4b\varkappa\sqrt{2}}\left(log\,\frac{x^2 - \varkappa x\sqrt{2} + \varkappa^2}{x^2 + \varkappa x\sqrt{2} + \varkappa^2} + 2\,arc\,tgn\,\frac{\varkappa x\sqrt{2}}{\varkappa^2 - x^2}\right).$$

Sei $\frac{a}{b}$ negativ und $\varkappa = \sqrt[4]{-\frac{a}{b}}$,

11) $$\int \frac{x\,dx}{(a+bx^4)} = -\frac{1}{4b\varkappa^2}\,log\,\frac{x^2+\varkappa^2}{x^2-\varkappa^2}$$

12) $$\int \frac{x^2\,dx}{(a+bx^4)} = -\frac{1}{4b\varkappa}\left(log\,\frac{x+\varkappa}{x-\varkappa} - 2\,arc\,tgn\,\frac{x}{\varkappa}\right).$$

Es ist:

13) $$\int \frac{dx}{x(a+bx^4)} = \frac{log\,x}{a} - \frac{log\,w}{4a}$$

14) $$\int \frac{dx}{x^2(a+bx^4)} = -\frac{1}{ax} - \frac{b}{a}\int \frac{x^2\,dx}{w}.$$

§. 70.

Integrale von der Form $\int \frac{x^m}{1 \pm x^n}\, dx$.

1) $\int \frac{dx}{1+x} = \log(1+x)$

2) $\int \frac{dx}{1+x^2} = arc\,tgn\, x = -\, arc\,cot\, x$

3) $\int \frac{dx}{1+x^3} = \frac{1}{3} \log \frac{1+x}{\sqrt{1-x+x^2}} + \frac{1}{\sqrt{3}}\, arc\,tgn \frac{x\sqrt{3}}{2-x}$

4) $\int \frac{dx}{1+x^4} = \frac{1}{4\sqrt{2}} \log \frac{1+x\sqrt{2}+x^2}{1-x\sqrt{2}+x^2} + \frac{1}{2\sqrt{2}}\, arc\,tgn \frac{x\sqrt{2}}{1-x^2}$

5) $\int \frac{dx}{1+x^5} = \frac{2}{5} \left\{ \frac{1}{2} \log(1+x) - P_0 \cos\frac{\pi}{5} + P_1 \cos\frac{2\pi}{5} + Q_0 \sin\frac{\pi}{5} + Q_1 \sin\frac{2\pi}{5} \right\}.$

Dabei ist

$$P_0 = \frac{1}{2} \log\left(1 - 2x\cos\frac{\pi}{5} + x^2\right) \qquad Q_0 = arc\,tgn \frac{x \sin\frac{\pi}{5}}{1 - x\cos\frac{\pi}{5}}$$

$$P_1 = \frac{1}{2} \log\left(1 + 2x\cos\frac{2\pi}{5} + x^2\right) \qquad Q_1 = arc\,tgn \frac{x \sin\frac{2\pi}{5}}{1 + x\cos\frac{2\pi}{5}}$$

6) $\int \frac{dx}{1+x^6} = \frac{1}{4\sqrt{3}} \log \frac{1+x\sqrt{3}+x^2}{1-x\sqrt{3}+x^2} + \frac{1}{6}\, arc\,tgn \frac{3x(1-x^2)}{1-4x^2+x^4}.$

Sei

$$P_\varkappa = \frac{1}{2} \log\left(x^2 - 2x\cos\frac{2\varkappa+1}{n}\pi + 1\right)$$

$$Q_\varkappa = arc\,tgn \frac{x \sin\frac{2\varkappa+1}{n}\pi}{1 - x\cos\frac{2\varkappa+1}{n}\pi},$$

so ist, wenn n gerade ist:

7) $$\int \frac{dx}{1+x^n} = -\frac{2}{n}\sum_{0}^{\frac{1}{2}n-1}{}_{x} P_x \cos\frac{2x+1}{n}\pi + \frac{2}{n}\sum_{0}^{\frac{1}{2}n-1}{}_{x} Q_x \sin\frac{2x+1}{n}\pi,$$

und wenn n ungerade ist:

8) $$\int \frac{dx}{1+x^n} = \frac{1}{n}\log(1+x) - \frac{2}{n}\sum_{0}^{\frac{n-3}{2}}{}_{x} P_x \cos\frac{2x+1}{n}\pi$$

$$+\frac{2}{n}\sum_{0}^{\frac{n-3}{2}}{}_{x} Q_x \sin\frac{2x+1}{n}\pi$$

9) $$\int \frac{x\,dx}{1+x} = x - \log(1+x)$$

10) $$\int \frac{x\,dx}{1+x^2} = \frac{1}{2}\log(1+x^2)$$

11) $$\int \frac{x\,dx}{1+x^3} = -\frac{1}{6}\log\frac{(1+x)^2}{1-x+x^2} + \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tgn}\frac{x\sqrt{3}}{2-x}$$

12) $$\int \frac{x\,dx}{1+x^4} = \frac{1}{2}\operatorname{arc\,tgn} x^2$$

13) $$\int \frac{x\,dx}{1+x^5} = \frac{2}{5}\left\{-\frac{1}{2}\log(x+1) - P_0\cos\frac{2\pi}{5} + P_1\cos\frac{\pi}{5}\right.$$

$$\left. + Q_0\sin\frac{2\pi}{5} - Q_1\sin\frac{\pi}{5}\right\}$$

Bezeichnungen wie in Nr. 5.

14) $$\int \frac{dx}{1-x} = \log\frac{1}{1-x}$$

15) $$\int \frac{dx}{1-x^2} = \frac{1}{2}\log\frac{1+x}{1-x}$$

16) $$\int \frac{dx}{1-x^3} = \frac{1}{3}\log\frac{\sqrt{1+x+x^2}}{1-x} + \frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arc\,tgn}\frac{x\sqrt{3}}{2+x}$$

17) $$\int \frac{dx}{1-x^4} = \frac{1}{4}\log\frac{1+x}{1-x} + \frac{1}{2}\operatorname{arc\,tgn} x$$

18) $$\int \frac{dx}{1-x^5} = \frac{2}{5}\left\{\frac{1}{2}\log(1-x) - P_1\cos\frac{\pi}{5} + P_0\cos\frac{2\pi}{5}\right.$$

$$\left. - Q_1\sin\frac{\pi}{5} - Q_0\sin\frac{2\pi}{5}\right\}$$

Bezeichnungen wie in Nr. 5.

$$19)\quad \int \frac{dx}{1-x^6} = \frac{1}{6} \log \frac{1+x}{1-x} \sqrt{\frac{1+x+x^2}{1-x+x^2}} + \frac{1}{2\sqrt{3}} \operatorname{arctgn} \frac{x\sqrt{3}}{1-x^2}$$

Sei n gerade, und

$$P_\varkappa = \frac{1}{2} \log \left\{ x^2 - 2x \cos \frac{2\varkappa}{n} \pi + 1 \right\}$$

$$Q_\varkappa = \operatorname{arctgn} \frac{x \sin \frac{2\varkappa}{n} \pi}{1 - x \cos \frac{2\varkappa}{n} \pi},$$

so wird:

$$20)\quad \int \frac{dx}{1-x^n} = -\frac{1}{n} \log \frac{1+x}{1-x} - \frac{2}{n} \sum_{1}^{\frac{n}{2}-1}{}_\varkappa\, P_\varkappa \cos \frac{2\varkappa}{n} \pi$$
$$+ \frac{2}{n} \sum_{1}^{\frac{n}{2}-1}{}_\varkappa\, Q_\varkappa \sin \frac{2\varkappa}{n} \pi$$

Sei

$$P_\varkappa = \frac{1}{2} \log \left(x^2 + 2x \cos \frac{2\varkappa+1}{n} \pi + 1 \right)$$

$$Q_\varkappa = \operatorname{arctgn} \frac{x \sin \frac{2\varkappa+1}{n} \pi}{1 + x \cos \frac{2\varkappa+1}{n} \pi}$$

und n ungerade, so wird:

$$21)\quad \int \frac{dx}{1-x^n} = \frac{1}{n} \log (1-x) - \frac{2}{n} \sum_{0}^{\frac{n-3}{2}}{}_\varkappa\, P_\varkappa \cos \frac{2\varkappa+1}{n} \pi$$
$$- \frac{2}{n} \sum_{0}^{\frac{n-3}{2}} Q_\varkappa \sin \frac{2\varkappa+1}{n} \pi$$

$$22)\quad \int \frac{x\,dx}{1-x} = \log (1-x) - x$$

$$23)\quad \int \frac{x\,dx}{1-x^2} = -\frac{1}{2} \log (1-x^2)$$

$$24)\quad \int \frac{x\,dx}{1-x^3} = -\frac{1}{6} \log \frac{(1-x)^2}{1+x+x^2} - \frac{1}{\sqrt{3}} \operatorname{arctgn} \frac{x\sqrt{3}}{2+x}$$

25) $$\int \frac{x\,dx}{1-x^4} = \frac{1}{4} \log \frac{1+x^2}{1-x^2}$$

26) $$\int \frac{x\,dx}{1-x^5} = \frac{2}{5}\left\{-\frac{1}{2}\log(1-x) - P_1 \cos\frac{2\pi}{5} + P_0 \cos\frac{\pi}{5} - Q_1 \sin\frac{2\pi}{5} + Q_0 \sin\frac{\pi}{5}\right\}$$

Es ist

27) $$\int \frac{x^m\,dx}{1-x^{2n}} = \frac{1}{2}\int \frac{x^m\,dx}{1-x^n} + \frac{1}{2}\int \frac{x^m}{1+x^n}$$

28) $$\int \frac{x^p\,dx}{(1+x^2)^n} = \frac{-1}{2n-p-1}\,\frac{x^{p-1}}{(1+x^2)^{n-1}} + \frac{p-1}{2n-p-1}\int \frac{x^{p-2}\,dx}{(1+x^2)^n}$$

29) $$\int \frac{dx}{x^p(1+x^2)^n} = -\frac{1}{p-1}\cdot\frac{1}{x^{p-1}(1+x^2)^{n-1}} - \frac{2n+p-3}{p-1}\int \frac{dx}{x^{p-2}(1+x^2)^n}$$

30) $$\int \frac{dx}{(1+x^2)^n} = \frac{1}{2n-2}\cdot\frac{x}{(1+x^2)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2n-2}\int \frac{dx}{(1+x^2)^{n-1}}$$

31) $$\int \frac{dx}{x(1+x^2)^n} = \frac{1}{2n-2}\cdot\frac{1}{(1+x^2)^{n-1}} + \int \frac{dx}{x(1+x^2)^{n-1}}$$

32) $$\int \frac{dx}{x(1+x^2)} = \log \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

33) $$\int \frac{x^p\,dx}{(1-x^2)^n} = \frac{1}{2n-2}\cdot\frac{x^{p-1}}{(1-x^2)^{n-1}} - \frac{p-1}{2n-2}\int \frac{x^{p-2}\,dx}{(1-x^2)^{n-1}}$$
$$= \frac{1}{2n-p-1}\cdot\frac{x^{p-1}}{(1-x^2)^{n-1}} - \frac{p-1}{2n-p-1}\int \frac{x^{p-2}\,dx}{(1-x^2)^n}$$

34) $$\int \frac{dx}{x^p(1-x^2)^n} = -\frac{1}{p-1}\,\frac{1}{x^{p-1}(1-x^2)^{n-1}} + \frac{2n+p-3}{p-1}\int \frac{dx}{x^{p-2}(1-x^2)^n}$$

35) $$\int \frac{dx}{(1-x^2)^n} = \frac{1}{2n-2}\cdot\frac{x}{(1-x^2)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2n-2}\int \frac{dx}{(1-x^2)^{n-1}}$$

36) $$\int \frac{dx}{x(1-x^2)^n} = \frac{1}{2(n-1)}\,\frac{1}{(1-x^2)^{n-1}} + \int \frac{dx}{x(1-x^2)^{n-1}}$$

37) $$\int \frac{dx}{(1+x^2)^p} = \frac{x}{2p-1} \sum_1^{p-1} {}^{\varkappa} A_\varkappa \frac{1}{2^\varkappa (1+x^2)^{p-\varkappa}}$$
$$+ \frac{1}{2p-1} \cdot \frac{(2p-3)(2p-5)\ldots 5.3.1}{(p-1)(p-2)\ldots 2.1} \frac{1}{2^{p-1}} \operatorname{arc\,tgn} x$$
$$A_\varkappa = \frac{(2p-3)(2p-5)\ldots(2p-2\varkappa-1)}{(p-1)(p-2)\ldots(p-\varkappa)}.$$

38) $$\int \frac{dx}{(1-x^2)^p} = \frac{x}{2p-1} \sum_1^{p-1} {}^{\varkappa} A_\varkappa \frac{1}{2\varkappa(1-x^2)^{p-\varkappa}}$$
$$+ \frac{1}{2p-1} \cdot \frac{(2p-3)(2p-5)\ldots 5.3.1}{(p-1)(p-2)\ldots 2.1} \frac{1}{2^p} \log \frac{1+x}{1-x}$$

$A_\varkappa$ wie bei der vorhergehenden Formel.

Sei $m > 2n$, m und n positiv und ganz.

39) $$\int \frac{x^{m-1}dx}{1+x^{2n}} = -\frac{1}{2n} \sum_1^{n} {}^{\varkappa} \cos \frac{m\pi(2\varkappa-1)}{2n}$$
$$\log\left\{1 - 2x \cos\frac{(2\varkappa-1)}{2n}\pi + x^2\right\} + \frac{1}{n}\sum_1^{n} {}^{\varkappa} \sin\frac{m\pi(2\varkappa-1)}{2n}$$
$$\operatorname{arc\,tgn} \frac{x - \cos\frac{2\varkappa-1}{2n}\pi}{\sin\frac{(2\varkappa-1)}{2n}\pi}$$

40) $$\int \frac{x^{m-1}dx}{1-x^{2n}} = \frac{1}{2n}\{(-1)^{m+1}[\log(1+x)] - \log(1-x)\}$$
$$+ (-1)^{m+1} \frac{1}{2n} \sum_1^{n-1} {}^{\varkappa} \cos\frac{\varkappa m\pi}{n} \log\left(1 + 2\varkappa\cos\frac{\varkappa\pi}{n} + x^2\right)$$
$$+ (-1)^{m+1} \frac{1}{n} \sum_1^{n-1} {}^{\varkappa} \sin\frac{\varkappa m\pi}{n} \operatorname{arc\,tgn} \frac{x + \cos\frac{\varkappa\pi}{n}}{\sin\frac{\varkappa\pi}{n}}.$$

41) $$\int \frac{x^{m-1}dx}{1+x^{2n+1}} = (-1)^{m+1} \frac{\log(1+x)}{2n+1}$$
$$- \frac{1}{2n+1} \sum_1^{2n+1} {}^{\varkappa} \cos\frac{m\pi(2\varkappa-1)}{2n+1} \log\left(1 - 2x\cos\frac{2\varkappa-1}{2n+1}\pi + x^2\right)$$
$$+ \frac{2}{2n+1} \sum_1^{2n+1} {}^{\varkappa} \sin\frac{m\pi(2\varkappa-1)}{2n+1} \operatorname{arc\,tgn} \frac{x - \cos\frac{(2\varkappa-1)\pi}{2n+1}}{\sin\frac{(2\varkappa-1)\pi}{2n+1}}$$

$$42)\quad \int \frac{x^{m-1}dx}{1-x^{2n+1}} = -\frac{1}{2n+1}\log(1-x)$$

$$+(-1)^{m+1}\frac{1}{2n+1}\sum_{1}^{2n+1}{}_{\varkappa}\cos\frac{m\pi(2\varkappa-1)}{2n+1}\log\left(1+2x\cos\frac{2\varkappa-1}{2n+1}\pi+x^2\right)$$

$$+(-1)^{m+1}\frac{2}{2n+1}\sum_{1}^{2n+1}\sin\frac{m\pi(2\varkappa-1)}{2n+1}\,arc\,tgn\,\frac{x+\cos\frac{(2\varkappa-1)\pi}{2n+1}}{\sin\frac{(2\varkappa-1)\pi}{2n+1}}.$$

§. 71.

Sei $u = a + bx,\ v = \alpha + \beta x,\ \varDelta = a\beta - \alpha b.$

$$1)\quad \int (a+bx)^n(\alpha+\beta x)^m dx = \frac{v^m u^{n+1}}{m+n+1} - \frac{m\varDelta}{(m+n+1)b}\int v^{m-1}u^n\,dx$$

$$2)\quad \int \frac{(\alpha+\beta x)^m}{(a+bx)^n}dx = \frac{1}{m-n+1}\frac{v^m}{u^{n-1}} - \frac{m\varDelta}{(m-n+1)b}\int\frac{v^{m-1}}{u^n}dx$$

$$3)\quad = \frac{1}{(n-1)a}\frac{v^{m+1}}{u^{n-1}} - \frac{(m-n+2)}{(n-1)}\frac{\beta}{\varDelta}\int\frac{v^m}{u^{n-1}}dx$$

$$4)\quad = -\frac{1}{(n-1)b}\frac{v^m}{u^{n-1}} + \frac{m\beta}{(n-1)b}\int\frac{v^{m-1}}{u^{n-1}}dx$$

$$5)\quad \int\frac{dx}{(a+bx)^n(\alpha+\beta x)^m} = -\frac{1}{(m-1)a}\cdot\frac{1}{v^{m-1}u^{n-1}} - \frac{(m+n-2)b}{(m-1)\varDelta}\int\frac{dx}{v^{m-1}u^n}dx$$

$$6)\quad = +\frac{1}{(n-1)a}\cdot\frac{1}{v^{m-1}u^{n-1}} + \frac{(m+n-2)\beta}{(n-1)\varDelta}\int\frac{1}{v^m u^{n-1}}dx$$

§. 72.

Sei $a + bx + cx^2 = w.$

1) $$\int x^{m+1} w^p dx = \frac{x^m w^{p+1}}{c(m+2p+2)}$$
$$- \frac{am}{c(m+2p+2)} \int x^{m-1} w^p dx - \frac{b}{c} \frac{m+p+1}{m+2p+2} \int x^m w^p dx$$

2) $$\int \frac{x^{m+1}}{w^p} dx = - \frac{x^m}{2pcw^p} + \frac{m}{2pc} \int \frac{x^{m-1} dx}{w^p} - \frac{b}{2c} \int \frac{x^m dx}{w^{p+1}}$$

3) $$\int \frac{w^p}{x^{n+1}} dx = - \frac{w^{p+1}}{anx^n} + \frac{b(p-m+1)}{an} \int \frac{w^p dx}{x^n}$$
$$+ \frac{c(2p-n+2)}{an} \int \frac{w^p dx}{x^{n-1}}$$

4) $$\int \frac{1}{w^n} dx = \frac{b+2cx}{(n-1)(4ac-b^2)} \frac{1}{w^{n-1}}$$
$$+ \frac{2(2n-3)}{(n-1)(4ac-b^2)} \int \frac{dx}{w^{n-1}}$$

5) $$\int w^n dx = \frac{b+2cx}{2(2n+1)c} w^n + \frac{n(4ac-b^2)}{2(2n+1)c} \int w^{n-1} dx$$

6) $$\int \frac{dx}{a+bx+cx^2} = \frac{1}{\sqrt{b^2-4ac}} \cdot$$
$$\log \frac{b+2cx-\sqrt{b^2-4ac}}{b+2cx+\sqrt{b^2-4ac}}, \quad b^2-4ac>0$$
$$= \frac{2}{b+2cx} \qquad b^2-4ac=0$$
$$= \frac{2}{\sqrt{4ac-b^2}} \operatorname{arc\,tgn} \frac{b+2cx}{\sqrt{4ac-b^2}}, \quad b^2-4ac<0$$

7) $$\int \frac{dx}{(a+bx+cx^2)^{n+1}} = \frac{b+2cx}{n\Delta R} - \frac{(4n-2)c}{n\Delta} \int \frac{dx}{R^n},$$

wenn zur Abkürzung

$$R = a + bx + cx^2, \quad \Delta = 4ac - b^2$$

gesetzt wird.

$$8)\quad \int \frac{dx}{(a+bx+cx^2)^2} = \frac{b+2cx}{\varDelta R} + \frac{2c}{\varDelta}\int\frac{dx}{R}$$

$$9)\quad \int \frac{dx}{(a+bx+cx^2)^3} = \frac{b+2cx}{\varDelta}\left\{\frac{1}{2R^2}+\frac{3c}{\varDelta R}\right\} + \frac{6c^2}{\varDelta^2}\int\frac{dx}{R}$$

$$10)\quad \int \frac{dx}{(a+bx+cx^2)^4} = \frac{b+2cx}{\varDelta}\left\{\frac{1}{3R^3}+\frac{5c}{3\varDelta R^2}+\frac{10c^2}{\varDelta^2 R}\right\} + \frac{20c^3}{\varDelta^3}\int\frac{dx}{R}$$

$$11)\quad \int \frac{x^m}{R^n}dx = -\frac{x^{m-1}}{(2n-m-1)cR^{n-1}} - \frac{(n-m)b}{(2n-m-1)c}\int\frac{x^{m-1}}{R^n}dx + \frac{(m-1)a}{(2n-m-1)c}\int\frac{x^{m-2}}{R^n}dx$$

Wird $m = 2n - 1$, so ist diese Formel unbrauchbar; man hat sodann:

$$12)\quad \int \frac{x^{2n-1}}{R^n}dx = \frac{1}{c}\int\frac{x^{2n-3}}{R^{n-1}}dx - \frac{a}{c}\int\frac{x^{2n-3}}{R^n}dx - \frac{b}{c}\int\frac{x^{2n-2}}{R^n}dx$$

$$13)\quad \int \frac{x\,dx}{(a+bx+cx^2)^2} = -\frac{2a+bx}{\varDelta R} - \frac{b}{\varDelta}\int\frac{dx}{T}$$

$$14)\quad \int \frac{x^2dx}{(a+bx+cx^2)^2} = \frac{ab+(b^2-2ac)x}{c\varDelta R} + \frac{2a}{\varDelta}\int\frac{dx}{T}$$

$$15)\quad \int \frac{x^3dx}{(a+bx+cx^2)^2} = \frac{1}{2c^2}\varDelta R + \frac{a(2ac-b^2)+b(3ac-b^2)x}{c^2\varDelta R} - \frac{b(6ac-b^2)}{2c^2\varDelta}\int\frac{dx}{R}$$

$$16)\quad \int \frac{x\,dx}{(a+bx+cx^2)^3} = -\frac{2a+bx}{3\varDelta R^2} - \frac{3b(b+2cx)}{2\varDelta^2 R} - \frac{3bc}{\varDelta^2}\int\frac{dx}{R}$$

$$17)\quad \int \frac{x^2dx}{(a+bx+cx^2)^3} = \frac{ab+(b^2-2ac)x}{2c\varDelta R^2} + \frac{(2ac+b^2)(b+2cx)}{2c\varDelta^2 R} + \frac{2ac+b^2}{\varDelta^2}\int\frac{dx}{R}$$

18) $$\int \frac{x^3\,dx}{(a+bx+cx^2)^2} = -\left(\frac{x^2}{c}+\frac{abx}{c\Delta}+\frac{2a^2}{b\Delta}\right)\frac{1}{2R^2} - \frac{3ab}{2c\Delta}\int\frac{dx}{R^2}$$

19) $$\int \frac{dx}{x(a+bx+cx^2)^n} = \frac{1}{(2n-2)aR^{n-1}} - \frac{b}{2a}\int\frac{dx}{R^n} + \frac{1}{a}\int\frac{dx}{xR^{n-1}}$$

20) $$\int \frac{dx}{x^m(a+bx+cx^2)^n} = -\frac{1}{(m-1)ax^{m-1}R^{n-1}} - \frac{(m+n-2)b}{(m-1)a}\int\frac{dx}{x^{m-1}R^n} - \frac{(m+2n-3)c}{(m-1)a}\cdot\int\frac{dx}{x^{m-2}R^n},\quad m>1$$

21) $$\int \frac{dx}{x(a+bx+cx^2)} = \frac{1}{2a}\log\frac{x^2}{R} - \frac{b}{2a}\int\frac{dx}{R}$$

22) $$\int \frac{dx}{x^2(a+bx+cx^2)} = \frac{b}{2a^2}\log\left(\frac{R}{x^2}\right) - \frac{1}{ax} + \frac{b^2-2ac}{2a^2}\int\frac{dx}{R}$$

23) $$\int \frac{dx}{x^3(a+bx+cx^2)} = \frac{ac-b^2}{2a^3}\log\left(\frac{R}{x^2}\right) + \frac{b}{a^2x} - \frac{1}{2ax^2} + \frac{b(3ac-b^2)}{2a^3}\int\frac{dx}{R}$$

24) $$\int \frac{dx}{x(a+bx+cx^2)^2} = \frac{1}{2a}\log\frac{x^2}{R} + \frac{1}{2aR}\left\{1-\frac{b(b+2cx)}{\Delta}\right\} - \frac{b}{2a^2}\left(1+\frac{2ac}{\Delta}\right)\int\frac{dx}{R}$$

25) $$\int \frac{dx}{x^2(a+bx+cx^2)^2} = \frac{b}{a^2}\log\frac{R}{x^2} - \frac{1}{a^2x^2} + \left\{\frac{b^2}{a^2} - \frac{3bc}{a} + \left(\frac{b^2}{a^2}-\frac{2c}{a}\right)cx\right\}\frac{1}{\Delta R} - \frac{1}{\Delta}\left(\frac{b^4}{a^3}-\frac{6b^2c}{a^2}+\frac{6c^2}{a}\right)\int\frac{dx}{R}$$

26) $$\int \frac{dx}{x^3(a+bx+cx^2)^2} = \left(-\frac{1}{2ax^2}+\frac{3b}{2a^2x}\right)\frac{1}{\Delta} + \left(\frac{3b^2}{a^2}-\frac{2c}{a}\right)\int\frac{dx}{xR^2} + \frac{9bc}{2a^2}\int\frac{dx}{R^2}$$

27) $$\int \frac{dx}{x(a+bx+cx^2)^3} = \frac{1}{4aw^2} + \frac{1}{2a^2w} + \frac{1}{2a^3} \log \frac{x^2}{w} - \frac{b}{2a}\int\frac{dx}{w^3} - \frac{b}{2a^2}\int\frac{dx}{w^2} - \frac{b}{2a^3}\int\frac{dx}{w}$$

28) $$\int \frac{dx}{x^2(a+bx+cx^2)^3} = -\frac{1}{axw^3} - \frac{3b}{a}\int\frac{dx}{xw^3} - \frac{5c}{a}\int\frac{dx}{w^3}$$

29) $$\int \frac{dx}{x^3(a+bx+cx^2)^3} = \left(-\frac{1}{2ax^2} + \frac{2b}{a^2x}\right)\frac{1}{w^3} + \left(\frac{6b^2}{a^2} - \frac{3c}{a}\right)\int\frac{dx}{xw^3} + \frac{10bc}{a^2}\int\frac{dx}{w^3}$$

§. 73.

Integrale von der Form $\int x^{m-1}(a+bx^n+cx^{2n})^p\,dx$.

Sei $a + bx^n + cx^{2n} = w.$

1) $$\int x^{m-1}w^p\,dx = \frac{x^m w^p}{m} - \frac{pnb}{m}\int x^{m+n-1}w^{p-1}\,dx - \frac{2npc}{m}\int x^{m+2n-1}w^{p-1}\,dx$$

2) $$= \frac{x^{m-2n}w^{p+1}}{(m+2np)c} - \frac{(m-2n)a}{(m+2pn)c}\int x^{m-2n-1}w^p\,dx - \frac{(m-n+pn)b}{(m+2pn)c}\int x^{m-n-1}w^p\,dx$$

3) $$= \frac{x^m w^p}{m+2pn} + \frac{2npa}{m+2pn}\int x^{m-1}w^{p-1}\,dx + \frac{pnb}{m+2np}\int x^{m+n-1}w^{p-1}\,dx$$

$$4)\quad \int x^{m-1} w^p\,dx = \frac{x^m w^{p+1}}{ma} - \frac{(m+n+pn)b}{ma}\int x^{m+n-1} w^p\,dx$$
$$- \frac{(m+2n+2pn)c}{ma}\int x^{m+2n-1} w^p\,dx$$

Sei

$$\tfrac{1}{2}b - \tfrac{1}{2}\sqrt{b^2-4ac} = f,\quad \tfrac{1}{2}b + \tfrac{1}{2}\sqrt{b^2-4ac} = g,$$
$$\sqrt{b^2-4ac} = h$$

und

$$b^2 - 4ac > 0.$$

$$5)\quad \int\frac{dx}{a+bx^2+cx^4} = \frac{c}{h}\left\{\int\frac{dx}{cx^2+f} - \int\frac{dx}{cx^2+g}\right\}$$

$$6)\quad \int\frac{x\,dx}{a+bx^2+cx^4} = \frac{1}{2h}\log\frac{cx^2+f}{cx^2+g}$$

$$7)\quad \int\frac{x^2\,dx}{a+bx^2+cx^4} = \frac{g}{h}\int\frac{dx}{cx^2+g} - \frac{f}{h}\int\frac{dx}{cx^2+f}$$

Sei

$$b^2 - 4ac < 0,\quad \cos\alpha = -\frac{b}{2\sqrt{ac}}$$

$$8)\quad \int\frac{dx}{a+bx^2+cx^4} = \frac{1}{4cf^3}\left\{\sin\frac{\alpha}{2}\log\frac{x^2+2f\cos\frac{\alpha}{2}+f^2}{x^2-2f\cos\frac{\alpha}{2}+f^2}\right.$$
$$\left. + 2\cos\frac{\alpha}{2}\,\mathrm{arctgn}\frac{2fx\sin\frac{\alpha}{2}}{f^2-x^2}\right\}$$

$$9)\quad \int\frac{x\,dx}{a+bx^2+cx^4} = \frac{1}{2cf^2\sin\alpha}\,\mathrm{arctgn}\frac{f^2\sin\alpha}{f^2\cos\alpha - x^2}.$$

Sei

$$\varkappa = 2a(p-1)(b^2-4ac),$$

$$10)\quad \int\frac{dx}{w^p} = \frac{bcx^3+(b^2-2ac)x}{\varkappa w^{p-1}} + \frac{(4p-7)bc}{\varkappa}\int\frac{x^2\,dx}{w^{p-1}}$$
$$+ \frac{2(p-1)(b^2-4ac)+2ac-b^2}{\varkappa}\int\frac{dx}{w^{p-1}}$$

$$11)\quad \int\frac{dx}{w^2} = \frac{bcx^2+(b^2-2ac)x}{\varkappa w} + \frac{b^2-6ac}{\varkappa}\int\frac{dx}{w} + \frac{bc}{\varkappa}\int\frac{x^2\,dx}{w}$$

12) $$\int \frac{dx}{x^m w^p} = -\frac{1}{(m-1)a x^{m-1} w^{p-1}} - \frac{(m+2p-3)b}{(m-1)a} \int \frac{dw}{x^{m-2} w^p} - \frac{m+4p-5}{(m-1)a} \int \frac{dx}{x^{m-4} w^p}$$

§. 74.

Reductionsformel für das Integral:

$$\int x^{m-1}(a + bx^n + cx^{2n} + dx^{3n} + \cdots)^p dx.$$

Um diese zu bilden, beachte man, dass

$$(a + bx^n + cx^{2n} + \cdots)^p = a(a + bx^n + \cdots)^{p-1} + bx^n(a + bx^n + \cdots)^{p-1} + \cdots$$

§. 75.

Sei $u = a + bx + cx^2, \quad v = \alpha + \beta x.$

$$A = a\beta^2 - \alpha b\beta + c\alpha^2, \quad B = b\beta - 2c\alpha, \quad \Delta = 4ac - b^2.$$

1) $$\int \frac{v^m}{u^n} dx = \frac{\beta}{m-2n+1} \cdot \frac{v^{m-1}}{u^{n-1}} - \frac{(m-n)B}{m-2n+1} \int \frac{v^{m-1}}{u^n} dx - \frac{(m-1)A}{c(m-2n+1)} \int \frac{v^{m-1}}{u^n} dx$$

2) $$= \frac{\beta}{(n+1)B} \frac{v^m}{u^{n-1}} - \frac{2A}{B} \int \frac{v^{m-1}}{u^n} dx - \frac{(m-2n+2)\beta^2}{(n+1)B} \int \frac{v^{m-1}}{u^{n-1}} dx$$

$$3)\quad \int \frac{v^m}{u^n}\,dx = \frac{B + 2cv}{(n-1)\Delta\beta}\,\frac{v^m}{u^{n-1}} - \frac{2(m-2n+3)c}{(n-1)\Delta} \int \frac{v^m}{u^{n-1}}\,dx - \frac{Bm}{(n-1)\Delta} \int \frac{v^{m-1}}{u^{n-1}}$$

$$4)\quad \int \frac{u^n}{v^m}\,dx = \frac{1}{(m-2n-1)\beta}\,\frac{u^n}{v^{m-1}} - \frac{2nA}{(m-2n-1)\beta^2} \int \frac{u^{n-1}}{v^m}\,dx - \frac{nB}{(m-2n-1)\beta^2} \int \frac{u^{n-1}}{v^{m-1}}\,dx$$

$$5)\quad = -\frac{\beta}{(m-1)A}\,\frac{u^{n+1}}{v^{m-1}} - \frac{(m-n-2)B}{(m-1)A} \int \frac{u^n}{v^{m-1}}\,dx - \frac{(m-2n-3)c}{(m-1)A} \int \frac{u^n}{v^{m-2}}\,dx$$

$$6)\quad = -\frac{1}{(m-1)\beta}\,\frac{u^n}{v^{m-1}} + \frac{nB}{(m-1)\beta^2} \cdot \int \frac{u^{n-1}}{v^{m-1}}\,dx + \frac{2nc}{(m-1)\beta^2} \int \frac{u^{n-1}}{v^{m-2}}\,dx$$

$$7)\quad \int \frac{dx}{v^m u^n} = -\frac{\beta}{(m-1)A}\,\frac{1}{v^{m-1}u^{n-1}} - \frac{(m+n-2)B}{(m-1)A} \int \frac{dx}{v^{m-1}u^n} - \frac{(m+2n-3)c}{(m-1)A} \int \frac{1}{v^{m-2}u^n}\,dx$$

$$8)\quad = \frac{\beta}{2(n-1)A}\,\frac{1}{v^{m-1}u^{n-1}} - \frac{B}{2A} \int \frac{1}{v^{m-1}u^n}\,dx + \frac{(m+2n-3)\beta^2}{2(n+1)A} \int \frac{1}{v^m u^{n-1}}\,dx$$

Ist $A = 0$, so wird

$$9)\quad \int \frac{dx}{v^m u^n} = -\frac{\beta}{(m+n-1)B}\,\frac{1}{v^m u^{n-1}} - \frac{(m+2n-2)c}{(m+n-1)B} \int \frac{1}{v^{m-1}u^n}\,dx$$

§. 76.

Sei $a + bx = \omega$.

1) $$\int \frac{dx}{(a+bx)\sqrt{x}} = \pm \frac{2}{\sqrt{ab}} \operatorname{arctgn} \sqrt{\frac{bx}{a}} \quad a \text{ und } b \text{ gleich bezeichnet}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{-ab}} \log \frac{a - bx + 2\sqrt{x}\sqrt{-ab}}{\omega}$$

2) $$\int \frac{dx\sqrt{x}}{a+bx} = \frac{2\sqrt{x}}{b} - \frac{a}{b}\int \frac{dx}{\omega\sqrt{x}}$$

3) $$\int \frac{x\sqrt{x}\,dx}{a+bx} = \left(\frac{x}{3b} - \frac{a}{b^2}\right) 2\sqrt{x} + \frac{a^2}{b^2}\int \frac{dx}{\omega\sqrt{x}}$$

4) $$\int \frac{x^2\sqrt{x}\,dx}{a+bx} = \left(\frac{x^2}{5b} - \frac{ax}{3b^2} + \frac{a^2}{b^3}\right) 2\sqrt{x} - \frac{a^3}{b^3}\int \frac{dx}{\omega\sqrt{x}}$$

5) $$\int \frac{x^3\sqrt{x}\,dx}{a+bx} = \left(\frac{x^3}{7b} - \frac{ax^2}{5b^2} + \frac{a^2x}{3b^3} - \frac{a^3}{b^4}\right) 2\sqrt{x} + \frac{a^4}{b^4}\int \frac{dx}{\omega\sqrt{x}}$$

6) $$\int \frac{dx}{(a+bx)^2\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x}}{a\omega} + \frac{1}{2a}\int \frac{dx}{\omega\sqrt{x}}$$

7) $$\int \frac{dx\sqrt{x}}{(a+bx)^2} = -\frac{\sqrt{x}}{b\omega} + \frac{1}{2b}\int \frac{dx}{\omega\sqrt{x}}$$

8) $$\int \frac{x\sqrt{x}\,dx}{(a+bx)^2} = \frac{2x\sqrt{x}}{b\omega} - \frac{3a}{b}\int \frac{dx\sqrt{x}}{\omega^2}$$

9) $$\int \frac{x^2\sqrt{x}\,dx}{(a+bx)^2} = \left(\frac{x^2}{3b} - \frac{5ax}{3b^2}\right)\frac{2\sqrt{x}}{\omega} + \frac{5a^2}{b^2}\int \frac{dx\sqrt{x}}{\omega^2}$$

10) $$\int \frac{x^3\sqrt{x}\,dx}{(a+bx)^2} = \left(\frac{x^3}{5b} - \frac{7ax^2}{15b^2} + \frac{7a^2x}{3b^3}\right)\frac{2\sqrt{x}}{\omega} - \frac{7a^3}{b^3}\int \frac{dx\sqrt{x}}{\omega^2}$$

11) $$\int \frac{dx}{(a+bx)^3\sqrt{x}} = \left(\frac{1}{2a\omega^2} + \frac{3}{4a^2\omega}\right)\sqrt{x} + \frac{3}{8a^2}\int \frac{dx}{\omega\sqrt{x}}$$

12) $$\int \frac{dx\sqrt{x}}{(a+bx)^3} = \left(-\frac{1}{2b\omega^2} + \frac{1}{4ab\omega}\right)\sqrt{x} + \frac{1}{8ab}\int \frac{dx}{\omega\sqrt{x}}$$

13) $$\int \frac{x\sqrt{x}\,dx}{(a+bx)^3} = -\frac{2x\sqrt{x}}{b\,\omega^2} + \frac{3a}{b}\int\frac{dx\sqrt{x}}{\omega^3}$$

14) $$\int \frac{x^2\sqrt{x}\,dx}{(a+bx)^3} = \left(\frac{x^2}{b} + \frac{5ax}{b^2}\right)\frac{2\sqrt{x}}{\omega^2} - \frac{15a^2}{b^2}\int\frac{dx\sqrt{x}}{\omega^3}$$

15) $$\int \frac{x^3\sqrt{x}\,dx}{(a+bx)^3} = \left(\frac{x^3}{3b} - \frac{7ax^2}{3b^2} - \frac{35a^2x}{3b^3}\right)\frac{2\sqrt{x}}{\omega^2} + \frac{35a^3}{b^3}\int\frac{dx\sqrt{x}}{\omega^3}$$

§. 77.

Sei $a + bx^2 = \omega$. $\quad \varkappa = \sqrt[4]{\frac{a}{b}}, \quad \varkappa' = \sqrt[4]{-\frac{a}{b}}$.

1) $$\int \frac{dx}{(a+bx^2)\sqrt{x}} = \frac{1}{b\varkappa^3\sqrt{2}}\left[\log\frac{x+\varkappa\sqrt{2x}+\varkappa^2}{\sqrt{\omega}} + arctgn\frac{\varkappa\sqrt{2x}}{\varkappa^2-x}\right], \quad \frac{a}{b} > 0$$

$$= \frac{1}{2b\varkappa'^3}\left(\log\frac{\varkappa'-\sqrt{x}}{\varkappa'+\sqrt{x}} - 2\,arctgn\frac{\sqrt{x}}{\varkappa'}\right), \quad \frac{a}{b} < 0$$

2) $$\int \frac{dx\sqrt{x}}{a+bx^2} = \frac{1}{b\varkappa\sqrt{2}}\left[-\log\frac{x+\varkappa\sqrt{2x}+\varkappa^2}{\sqrt{\omega}} + arctgn\frac{\varkappa\sqrt{2x}}{\varkappa^2-x}\right], \quad \frac{a}{b} > 0$$

$$= \frac{1}{2b\varkappa'}\left\{\log\frac{\varkappa'-\sqrt{x}}{\varkappa'+\sqrt{x}} + 2\,arctgn\frac{\sqrt{x}}{\varkappa'}\right\}, \quad \frac{a}{b} < 0$$

3) $$\int \frac{x\,dx\sqrt{x}}{a+bx^2} = \frac{2\sqrt{x}}{b} - \frac{a}{b}\int\frac{dx}{\omega\sqrt{x}}$$

4) $$\int \frac{x^2\,dx\sqrt{x}}{a+bx^2} = \frac{2x\sqrt{x}}{3b} - \frac{a}{b}\int \frac{dx\sqrt{x}}{\omega}$$

5) $$\int \frac{x^3\,dx\sqrt{x}}{a+bx^2} = \left(\frac{x^2}{5b} - \frac{a}{b^2}\right) 2\sqrt{x} + \frac{a^2}{b^2}\int \frac{dx}{\omega\sqrt{x}}$$

6) $$\int \frac{dx}{(a+bx^2)^2\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x}}{2a\omega} + \frac{3}{4a}\int \frac{dx}{\omega\sqrt{x}}$$

7) $$\int \frac{dx\sqrt{x}}{(a+bx^2)^2} = \frac{x\sqrt{x}}{2a\omega} + \frac{1}{4a}\int \frac{dx\sqrt{x}}{\omega}$$

8) $$\int \frac{x\sqrt{x}\,dx}{(a+bx^2)^2} = -\frac{\sqrt{x}}{2b\omega} + \frac{1}{4b}\int \frac{dx}{\omega\sqrt{x}}$$

9) $$\int \frac{x^2\sqrt{x}\,dx}{(a+bx^2)^2} = -\frac{x\sqrt{x}}{2b\omega} + \frac{3}{4b}\int \frac{dx\sqrt{x}}{\omega}$$

10) $$\int \frac{x^3\sqrt{x}\,dx}{(a+bx^2)^2} = \left(\frac{2x^2}{b} + \frac{5a}{2b^2}\right)\frac{\sqrt{x}}{\omega} - \frac{5a}{4b^2}\int \frac{dx}{\omega\sqrt{x}}$$

11) $$\int \frac{dx}{(a+bx^2)^3\sqrt{x}} = \left(\frac{1}{4a\omega^2} + \frac{7}{16a^2\omega}\right)\sqrt{x} + \frac{21}{32a^2}\int \frac{dx}{\omega\sqrt{x}}$$

12) $$\int \frac{dx\sqrt{x}}{(a+bx^2)^3} = \left(\frac{1}{4a\omega^2} + \frac{5}{16a^2\omega}\right) x\sqrt{x} + \frac{5}{32a^2}\int \frac{dx\sqrt{x}}{\omega}$$

13) $$\int \frac{x\,dx\sqrt{x}}{(a+bx^2)^3} = \frac{(bx^2-3a)\sqrt{x}}{16ab\omega^2} + \frac{3}{32ab}\int \frac{dx}{\omega\sqrt{x}}$$

14) $$\int \frac{x^2\,dx\sqrt{x}}{(a+bx^2)^3} = -\frac{2x\sqrt{x}}{5b\omega^2} + \frac{3a}{5b}\int \frac{dx\sqrt{x}}{\omega^3}$$

15) $$\int \frac{x^3\,dx\sqrt{x}}{(a+bx^2)^3} = -\frac{2x^2\sqrt{x}}{3b\omega^2} + \frac{5a}{3b}\int \frac{x\,dx\sqrt{x}}{\omega^3}$$

§. 78.

Sei $a + bx = \omega$:

1) $$\int \frac{dx}{\sqrt{a+bx}} = \frac{2}{b}\sqrt{\omega}$$

2) $$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{a+bx}} = \left(\frac{1}{3}\,\omega - a\right)\frac{2\sqrt{\omega}}{b^2}$$

3) $$\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{a+bx}} = \left(\frac{1}{5}\,\omega^2 - \frac{2}{3}\,a\,\omega + a^2\right)\frac{2\sqrt{\omega}}{b^3}$$

4) $$\int \frac{x^3 dx}{\sqrt{a+bx}} = \left(\frac{1}{7}\,\omega^3 - \frac{3}{5}\,a\,\omega^2 + a^2\omega - a^3\right)\frac{2\sqrt{\omega}}{b^4}$$

5) $$\int \frac{x^4 dx}{\sqrt{a+bx}} = \left(\frac{1}{9}\omega^4 - \frac{4}{7}a\,\omega^3 + \frac{6}{5}a^2\omega^2 - \frac{4}{3}a^3\omega + a^4\right)\frac{2\sqrt{\omega}}{b^5}$$

6) $$\int \frac{x^5 dx}{\sqrt{a+bx}} = \left(\frac{1}{11}\,\omega^5 - \frac{5}{9}\,a\,\omega^4 + \frac{10}{7}\,a^2\omega^3 - 2\,a^3\omega^2 + \frac{5}{3}\,a^4\omega - a^5\right)\frac{2\sqrt{\omega}}{b^6}$$

7) $$\int \frac{dx}{x\sqrt{a+bx}} = \frac{1}{\sqrt{a}}\,log\,\frac{\sqrt{a+bx}-\sqrt{a}}{\sqrt{a+bx}+\sqrt{a}},\quad a > 0$$
$$= \frac{2}{\sqrt{-a}}\,arc\,tgn\,\frac{\sqrt{a+bx}}{\sqrt{-a}},\quad a < 0$$

8) $$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{a+bx}} = -\frac{\sqrt{\omega}}{ax} - \frac{b}{2a}\int\frac{dx}{x\sqrt{\omega}}$$

9) $$\int \frac{dx}{x^3\sqrt{a+bx}} = \left(-\frac{1}{2\,a\,x^2} + \frac{3\,b}{4\,a^2x}\right)\sqrt{\omega} + \frac{3\,b^2}{8\,a^2}\int\frac{dx}{x\sqrt{\omega}}$$

10) $$\int \frac{dx}{x^4\sqrt{a+bx}} = \left(-\frac{1}{3\,a\,x^3} + \frac{5\,b}{12\,a^2x^2} - \frac{5\,b^2}{8\,a^3x}\right)\sqrt{\omega} - \frac{5\,b^3}{16\,a^3}\int\frac{dx}{x\sqrt{\omega}}$$

11) $$\int \frac{dx}{x^5\sqrt{a+bx}} = \left(-\frac{1}{4ax^4} + \frac{7b}{24a^2x^3} - \frac{35b^2}{96a^3x^2} + \frac{35}{64a^4x}\right)\sqrt{\omega} + \frac{35b^4}{128a^4}\int\frac{dx}{x\sqrt{\omega}}$$

12) $$\int \frac{dx}{\sqrt{a+bx}^3} = -\frac{2}{b\sqrt{\omega}}$$

13) $$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{a+bx}^3} = (\omega + a)\frac{2}{b^2\sqrt{\omega}}$$

14) $$\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{a+bx}^3} = \left(\frac{1}{3}\omega^2 - 2a\omega - a^2\right)\frac{2}{b^3\sqrt{\omega}}$$

15) $$\int \frac{x^3\,dx}{\sqrt{a+bx}^3} = \left(\frac{1}{5}\omega^3 - a\omega^2 + 3a^2\omega + a^3\right)\frac{2}{b^4\sqrt{\omega}}$$

16) $$\int \frac{x^4\,dx}{\sqrt{a+bx}^3} = \left(\frac{1}{7}\omega^4 - \frac{4}{5}a\omega^3 + 2a^2\omega^2 - 4a^3\omega - a^4\right)\frac{2}{b^5\sqrt{\omega}}$$

17) $$\int \frac{x^5\,dx}{\sqrt{a+bx}^3} = \left(\frac{1}{9}\omega^5 - \frac{5}{7}a\omega^4 + \frac{10}{5}a^2\omega^3 - \frac{10}{3}a^3\omega^2 + 5a^4\omega + a^5\right)\frac{2}{b^6\sqrt{\omega}}$$

18) $$\int \frac{dx}{x\sqrt{a+bx}^3} = \frac{2}{a\sqrt{\omega}} + \frac{1}{a}\int\frac{dx}{x\sqrt{\omega}}$$

19) $$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{a+bx}^3} = \left(-\frac{1}{ax} - \frac{3b}{a^2}\right)\frac{1}{\sqrt{\omega}} - \frac{3b}{2a^2}\int\frac{dx}{x\sqrt{\omega}}$$

20) $$\int \frac{dx}{x^3\sqrt{a+bx}^3} = \left(-\frac{1}{2ax^2} + \frac{5b}{4a^2x} + \frac{15b^2}{4a^3}\right)\frac{1}{\sqrt{\omega}} + \frac{15b^2}{8a^3}\int\frac{dx}{x\sqrt{\omega}}$$

21) $$\int \frac{dx}{x^4\sqrt{a+bx}^3} = \left(-\frac{1}{3ax^3} + \frac{7b}{12a^2x^2} - \frac{35b^2}{24a^3x} - \frac{35b^3}{8a^4}\right)\frac{1}{\sqrt{\omega}} - \frac{35b^3}{16a^4}\int\frac{dx}{x\sqrt{\omega}}$$

22) $$\int \frac{dx}{x^5 \sqrt{a+bx}^3} = \left(-\frac{1}{4ax^4} + \frac{3b}{8a^2x^3} - \frac{21b^2}{32a^3x^2} + \frac{105b^3}{64a^4x} + \frac{315b^4}{64a^5}\right)\frac{1}{\sqrt{\omega}} + \frac{315b^4}{128a^5}\int \frac{dx}{x\sqrt{\omega}}$$

23) $$\int \frac{dx}{\sqrt{a+bx}^5} = -\frac{2}{3b\omega\sqrt{\omega}}$$

24) $$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{a+bx}^5} = \left(-\omega + \frac{a}{3}\right)\frac{2}{b^2\omega\sqrt{\omega}}$$

25) $$\int \frac{x^2dx}{\sqrt{a+bx}^5} = \left(\omega^2 + 2a\omega - \frac{1}{3}a^2\right)\frac{2}{b^3\omega\sqrt{\omega}}$$

26) $$\int \frac{dx}{x\sqrt{a+bx}^5} = \left(\frac{8}{3a} + \frac{2bx}{a^2}\right)\frac{1}{\omega\sqrt{\omega}} + \frac{1}{a^2}\int\frac{dx}{x\sqrt{\omega}}$$

27) $$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{a+bx}^5} = \left(-\frac{1}{ax} - \frac{20b}{3a^2} - \frac{5b^2x}{a^3}\right)\frac{1}{\omega\sqrt{\omega}} - \frac{5b}{2a^3}\int\frac{dx}{x\sqrt{\omega}}$$

28) $$\int dx\sqrt{a+bx} = \frac{2\omega\sqrt{\omega}}{3b}$$

29) $$\int x\,dx\sqrt{a+bx} = \left(\frac{1}{5}\omega - \frac{a}{3}\right)\frac{2\omega\sqrt{\omega}}{b^2}$$

30) $$\int x^2dx\sqrt{a+bx} = \left(\frac{1}{7}\omega^2 - \frac{2}{5}a\omega + \frac{1}{3}a^2\right)\frac{2\omega\sqrt{\omega}}{b^3}$$

31) $$\int x^3dx\sqrt{a+bx} = \left(\frac{1}{9}\omega^3 - \frac{3}{7}a\omega^2 + \frac{3}{5}a^2\omega - \frac{1}{3}a^3\right)\frac{2\omega\sqrt{\omega}}{b^4}$$

32) $$\int x^4dx\sqrt{a+bx} = \left(\frac{1}{11}\omega^4 - \frac{4}{9}a\omega^3 + \frac{6}{7}a^2\omega^2 - \frac{4}{5}a^3\omega + \frac{1}{3}a^4\right)\frac{2\omega\sqrt{\omega}}{b^5}$$

33) $$\int x^5dx\sqrt{a+bx} = \left(\frac{1}{13}\omega^5 - \frac{5}{11}a\omega^4 + \frac{10}{9}a^2\omega^3 - \frac{10}{7}a^3\omega^2 + a^4\omega - \frac{1}{3}a^5\right)\frac{2\omega\sqrt{\omega}}{b^6}$$

34) $$\int \frac{dx}{x} \sqrt{a+bx} = 2\sqrt{\omega} + a \int \frac{dx}{x\sqrt{\omega}}$$

35) $$\int \frac{dx}{x^2} \sqrt{a+bx} = -\frac{\sqrt{\omega}}{x} + \frac{b}{2} \int \frac{dx}{x\sqrt{\omega}}$$

36) $$\int \frac{dx}{x^3} \sqrt{a+bx} = -\frac{\omega\sqrt{\omega}}{2ax^2} + \frac{b\sqrt{\omega}}{4ax} - \frac{b^2}{8a} \int \frac{dx}{x\sqrt{\omega}}$$

37) $$\int \frac{dx}{x^4} \sqrt{a+bx} = \left(-\frac{1}{3ax^3} + \frac{b}{4a^2x^2}\right)\omega\sqrt{\omega} - \frac{b^2}{8a^2x}\sqrt{\omega} + \frac{b^3}{16a^2}\int \frac{dx}{x\sqrt{\omega}}$$

38) $$\int \frac{dx}{x^5} \sqrt{a+bx} = \left(-\frac{1}{4ax^4} + \frac{5b}{24a^2x^3} - \frac{5b^2}{32a^3x^2}\right)\omega\sqrt{\omega} + \frac{5b^3\sqrt{\omega}}{64a^3x} - \frac{5b^4}{128a^3}\int \frac{dx}{x\sqrt{\omega}}$$

39) $$\int dx \sqrt{a+bx}^3 = \frac{2\omega^2\sqrt{\omega}}{5b}$$

40) $$\int x\,dx \sqrt{a+bx}^3 = \left(\frac{1}{7}\omega - \frac{a}{5}\right)\frac{2\omega^2\sqrt{\omega}}{b^2}$$

41) $$\int x^2 dx \sqrt{a+bx}^3 = \left(\frac{1}{9}\omega^2 - \frac{2}{7}a\omega + \frac{1}{5}a^2\right)\frac{2\omega^2\sqrt{\omega}}{b^3}$$

42) $$\int x^3 dx \sqrt{a+bx}^3 = \left(\frac{1}{11}\omega^3 - \frac{1}{3}a\omega^2 + \frac{3}{7}a^2\omega - \frac{1}{5}a^3\right)\frac{2\omega^2\sqrt{\omega}}{b^4}$$

43) $$\int x^4 dx \sqrt{a+bx}^3 = \left(\frac{1}{13}\omega^4 - \frac{4}{11}a\omega^3 + \frac{6}{9}a^2\omega^2 - \frac{4}{7}a^3\omega + \frac{1}{5}a^4\right)\frac{2\omega^2\sqrt{\omega}}{b^5}$$

44) $$\int x^5 dx \sqrt{a+bx}^3 = \left(\frac{1}{15}\omega^5 - \frac{5}{13}a\omega^4 + \frac{10}{11}a^2\omega^3 - \frac{10}{9}a^3\omega^2 + \frac{5}{7}a^4\omega - \frac{1}{5}a^5\right)\frac{2\omega^2\sqrt{\omega}}{b^6}$$

45) $$\int \frac{dx}{x} \sqrt{a+bx}^3 = \left(\frac{1}{3}\omega + a\right)2\sqrt{\omega} + a^2\int \frac{dx}{x\sqrt{\omega}}$$

46) $\int \frac{dx}{x^2} \sqrt{\overline{a+bx}^3} = -\frac{\omega^2 \sqrt{\omega}}{ax} + \frac{3b}{2a} \int \frac{dx}{x} \sqrt{\omega^3}$

47) $\int \frac{dx}{x^3} \sqrt{\overline{a+bx}^3} = \left(-\frac{1}{2ax^2} - \frac{b}{4a^2x}\right) \omega^2 \sqrt{\omega}$
$$+ \frac{3b^2}{8a^2} \int \frac{dx}{x} \sqrt{\omega^3}$$

48) $\int \frac{dx}{x^4} \sqrt{\overline{a+bx}^3} = \left(-\frac{1}{3ax^3} + \frac{b}{12a^2x^2} + \frac{b^2}{24a^3x}\right) \omega^2 \sqrt{\omega}$
$$- \frac{b^3}{16a^3} \int \frac{dx}{x} \sqrt{\omega^3}$$

49) $\int \frac{dx}{x^5} \sqrt{\overline{a+bx}^3} = \left(-\frac{1}{4ax^4} + \frac{b}{8a^2x^3} - \frac{b^2}{32a^3x^2}\right.$
$$\left. - \frac{b^3}{64a^4x}\right) \omega^2 \sqrt{\omega} + \frac{3b^4}{128a^4} \int \frac{dx}{x} \sqrt{\omega^3}$$

50) $\int dx \sqrt{\overline{a+bx}^5} = \frac{2\omega^3 \sqrt{\omega}}{7b}$

51) $\int \frac{dx}{x} \sqrt{\overline{a+bx}^5} = \left(\frac{1}{5}\omega^2 + \frac{1}{3}a\omega + a^2\right) 2\sqrt{\omega} + a^3 \int \frac{dx}{x\sqrt{\omega}}$

52) $\int \frac{dx}{x^2} \sqrt{\overline{a+bx}^5} = -\frac{\omega^3 \sqrt{\omega}}{ax} + \frac{5b}{2a} \int \frac{dx}{x} \sqrt{\omega^5}$

53) $\int \frac{dx}{x^3} \sqrt{\overline{a+bx}^5} = \left(-\frac{1}{2ax^2} - \frac{3b}{4a^2x}\right) \omega^3 \sqrt{\omega}$
$$+ \frac{15b^2}{8a^2} \int \frac{dx}{x} \sqrt{\omega^5}$$

54) $\int x\,dx \sqrt{\overline{a+bx}^5} = \left(\frac{1}{9}\omega - \frac{1}{7}a\right) \frac{2\omega^3\sqrt{\omega}}{b^2}$

55) $\int x^2 dx \sqrt{\overline{a+bx}^5} = \left(\frac{1}{11}\omega^2 - \frac{2}{9}a\omega + \frac{1}{7}a^2\right) \frac{2\omega^3\sqrt{\omega}}{b^3}$

56) $\int x^3 dx \sqrt{\overline{a+bx}^5} = \left(\frac{1}{13}\omega^3 - \frac{3}{11}a\omega^2 + \frac{1}{3}a^2\omega\right.$
$$\left. - \frac{1}{7}a^3\right) \frac{2\omega^3\sqrt{\omega}}{b^4}$$

57) $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{a+bx}} = \frac{3\sqrt[3]{\omega^2}}{2b}$

58) $\int \frac{x\,dx}{\sqrt[3]{a+bx}} = \left(\frac{1}{5}\,\omega - \frac{1}{2}\,a\right)\frac{3\sqrt[3]{\omega^2}}{b^2}$

59) $\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt[3]{a+bx}} = \left(\frac{1}{3}\,\omega^2 - \frac{2}{5}\,a\,\omega + \frac{1}{2}\,a^2\right)\frac{3\sqrt[3]{\omega^2}}{b^3}$

60) $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(a+bx)^2}} = \frac{3\sqrt[3]{\omega}}{b}$

61) $\int \frac{x\,dx}{\sqrt[3]{(a+bx)^2}} = \left(\frac{1}{4}\,\omega - a\right)\frac{3\sqrt[3]{\omega}}{b^2}$

62) $\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt[3]{(a+bx)^2}} = \left(\frac{1}{7}\,\omega^2 - \frac{1}{2}\,a\,\omega + a^2\right)\frac{3\sqrt[3]{\omega}}{b^3}$

63) $\int \frac{dx}{x\sqrt[3]{a+bx}} = \frac{1}{\sqrt[3]{a}}\left\{\frac{3}{2}\log\frac{\sqrt[3]{\omega}-\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{x}}\right.$

$\left. + \sqrt{3}\,arc\,tgn\,\frac{\sqrt{3}\,\sqrt[3]{\omega}}{\sqrt[3]{\omega}+2\sqrt[3]{a}}\right\}$

64) $\int \frac{dx}{x^2\sqrt[3]{a+bx}} = -\frac{\sqrt[3]{\omega^2}}{ax} - \frac{b}{3a}\int \frac{dx}{x\sqrt[3]{\omega}}$

65) $\int \frac{dx}{x^3\sqrt[3]{a+bx}} = \left(-\frac{1}{2ax^2} + \frac{2b}{3a^2x}\right)\sqrt[3]{\omega^2} + \frac{2b^2}{9a^2}\int \frac{dx}{x\sqrt[3]{\omega}}$

66) $\int \frac{dx}{x\sqrt[3]{(a+bx)^2}} = \frac{1}{\sqrt[3]{a^2}}\left\{\frac{3}{2}\log\frac{\sqrt[3]{\omega}-\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{x}}\right.$

$- \sqrt{3}\,arc\,tgn\,\frac{\sqrt{3}\,\sqrt[3]{\omega}}{\sqrt[3]{\omega}+2\sqrt[3]{a}}$

67) $\int \frac{dx}{x^2\sqrt[3]{(a+bx)^2}} = -\frac{\sqrt[3]{\omega}}{ax} - \frac{2b}{3a}\int \frac{dx}{x\sqrt[3]{\omega^2}}$

68) $\int \frac{dx}{x^3\sqrt[3]{(a+bx)^2}} = \left(-\frac{1}{2ax^2} + \frac{5b}{6a^2x}\right)\sqrt[3]{\omega}$

$+ \frac{5b^2}{9a^2}\int \frac{dx}{x\sqrt[3]{\omega^2}}$

69) $\int d\sqrt[3]{a+bx} = \frac{3\,\omega\sqrt[3]{\omega}}{4b}$

$$46)\quad \int \frac{dx}{x^2}\sqrt{a+bx}^3 = -\frac{\omega^2\sqrt{\omega}}{ax} + \frac{3b}{2a}\int\frac{dx}{x}\sqrt{\omega^3}$$

$$47)\quad \int \frac{dx}{x^3}\sqrt{a+bx}^3 = \left(-\frac{1}{2ax^2} - \frac{b}{4a^2x}\right)\omega^2\sqrt{\omega} + \frac{3b^2}{8a^2}\int\frac{dx}{x}\sqrt{\omega^3}$$

$$48)\quad \int \frac{dx}{x^4}\sqrt{a+bx}^3 = \left(-\frac{1}{3ax^3} + \frac{b}{12a^2x^2} + \frac{b^2}{24a^3x}\right)\omega^2\sqrt{\omega} - \frac{b^3}{16a^3}\int\frac{dx}{x}\sqrt{\omega^3}$$

$$49)\quad \int \frac{dx}{x^5}\sqrt{a+bx}^3 = \left(-\frac{1}{4ax^4} + \frac{b}{8a^2x^3} - \frac{b^2}{32a^3x^2} - \frac{b^3}{64a^4x}\right)\omega^2\sqrt{\omega} + \frac{3b^4}{128a^4}\int\frac{dx}{x}\sqrt{\omega^3}$$

$$50)\quad \int dx\sqrt{a+bx}^5 = \frac{2\omega^3\sqrt{\omega}}{7b}$$

$$51)\quad \int \frac{dx}{x}\sqrt{a+bx}^5 = \left(\frac{1}{5}\omega^2 + \frac{1}{3}a\omega + a^2\right)2\sqrt{\omega} + a^3\int\frac{dx}{x\sqrt{\omega}}$$

$$52)\quad \int \frac{dx}{x^2}\sqrt{a+bx}^5 = -\frac{\omega^3\sqrt{\omega}}{ax} + \frac{5b}{2a}\int\frac{dx}{x}\sqrt{\omega^5}$$

$$53)\quad \int \frac{dx}{x^3}\sqrt{a+bx}^5 = \left(-\frac{1}{2ax^2} - \frac{3b}{4a^2x}\right)\omega^3\sqrt{\omega} + \frac{15b^2}{8a^2}\int\frac{dx}{x}\sqrt{\omega^5}$$

$$54)\quad \int x\,dx\sqrt{a+bx}^5 = \left(\frac{1}{9}\omega - \frac{1}{7}a\right)\frac{2\omega^3\sqrt{\omega}}{b^2}$$

$$55)\quad \int x^2dx\sqrt{a+bx}^5 = \left(\frac{1}{11}\omega^2 - \frac{2}{9}a\omega + \frac{1}{7}a^2\right)\frac{2\omega^3\sqrt{\omega}}{b^3}$$

$$56)\quad \int x^3dx\sqrt{a+bx}^5 = \left(\frac{1}{13}\omega^3 - \frac{3}{11}a\omega^2 + \frac{1}{3}a^2\omega - \frac{1}{7}a^3\right)\frac{2\omega^3\sqrt{\omega}}{b^4}$$

$$57)\quad \int\frac{dx}{\sqrt[3]{a+bx}} = \frac{3\sqrt[3]{\omega^2}}{2b}$$

58) $$\int \frac{x\,dx}{\sqrt[3]{a+bx}} = \left(\frac{1}{5}\,\omega - \frac{1}{2}\,a\right)\frac{3\sqrt[3]{\omega^2}}{b^2}$$

59) $$\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt[3]{a+bx}} = \left(\frac{1}{3}\,\omega^2 - \frac{2}{5}\,a\,\omega + \frac{1}{2}\,a^2\right)\frac{3\sqrt[3]{\omega^2}}{b^3}$$

60) $$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(a+bx)^2}} = \frac{3\sqrt[3]{\omega}}{b}$$

61) $$\int \frac{x\,dx}{\sqrt[3]{(a+bx)^2}} = \left(\frac{1}{4}\,\omega - a\right)\frac{3\sqrt[3]{\omega}}{b^2}$$

62) $$\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt[3]{(a+bx)^2}} = \left(\frac{1}{7}\,\omega^2 - \frac{1}{2}\,a\,\omega + a^2\right)\frac{3\sqrt[3]{\omega}}{b^3}$$

63) $$\int \frac{dx}{x\sqrt[3]{a+bx}} = \frac{1}{\sqrt[3]{a}}\left\{\frac{3}{2}\log\frac{\sqrt[3]{\omega}-\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{x}} + \sqrt{3}\,arc\,tgn\,\frac{\sqrt{3}\,\sqrt[3]{\omega}}{\sqrt[3]{\omega}+2\sqrt[3]{a}}\right\}$$

64) $$\int \frac{dx}{x^2\sqrt[3]{a+bx}} = -\frac{\sqrt[3]{\omega^2}}{ax} - \frac{b}{3a}\int\frac{dx}{x\sqrt[3]{\omega}}$$

65) $$\int \frac{dx}{x^3\sqrt[3]{a+bx}} = \left(-\frac{1}{2ax^2} + \frac{2b}{3a^2x}\right)\sqrt[3]{\omega^2} + \frac{2b^2}{9a^2}\int\frac{dx}{x\sqrt[3]{\omega}}$$

66) $$\int \frac{dx}{x\sqrt[3]{(a+bx)^2}} = \frac{1}{\sqrt[3]{a^2}}\left\{\frac{3}{2}\log\frac{\sqrt[3]{\omega}-\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{x}} - \sqrt{3}\,arc\,tgn\,\frac{\sqrt{3}\,\sqrt[3]{\omega}}{\sqrt[3]{\omega}+2\sqrt[3]{a}}\right.$$

67) $$\int \frac{dx}{x^2\sqrt[3]{(a+bx)^2}} = -\frac{\sqrt[3]{\omega}}{ax} - \frac{2b}{3a}\int\frac{dx}{x\sqrt[3]{\omega^2}}$$

68) $$\int \frac{dx}{x^3\sqrt[3]{(a+bx)^2}} = \left(-\frac{1}{2ax^2} + \frac{5b}{6a^2x}\right)\sqrt[3]{\omega} + \frac{5b^2}{9a^2}\int\frac{dx}{x\sqrt[3]{\omega^2}}$$

69) $$\int d\sqrt[3]{a+bx} = \frac{3\,\omega\sqrt[3]{\omega}}{4b}$$

$$70)\quad \int x\,dx\,\sqrt[3]{a+bx} = \left(\frac{1}{7}\,\omega - \frac{1}{4}\,a\right)\frac{3\,\omega\sqrt[3]{\omega}}{b^2}$$

$$71)\quad \int x^2\,dx\,\sqrt[3]{a+bx} = \left(\frac{1}{10}\,\omega^2 - \frac{2}{7}\,a\,\omega + \frac{1}{4}\,a^2\right)\frac{3\,\omega\sqrt[3]{\omega}}{b^3}$$

$$72)\quad \int dx\,\sqrt[3]{(a+bx)^2} = \frac{3\,\omega\sqrt[3]{\omega^2}}{5\,b}$$

$$73)\quad \int x\,dx\,\sqrt[3]{(a+bx)^2} = \left(\frac{1}{8}\,\omega - \frac{1}{5}\,a\right)\frac{3\,\omega\sqrt[3]{\omega^2}}{b^2}$$

$$74)\quad \int x^2\,dx\,\sqrt[3]{(a+bx)^2} = \left(\frac{1}{11}\,\omega^2 - \frac{1}{4}\,a\,\omega + \frac{1}{5}\,a^2\right)\frac{3\,\omega\sqrt[3]{\omega^2}}{b^3}$$

$$75)\quad \int \frac{dx}{x}\,\sqrt[3]{a+bx} = 3\sqrt[3]{\omega} + a\int\frac{dx}{x\sqrt[3]{\omega}}$$

$$76)\quad \int \frac{dx}{x^2}\,\sqrt[3]{a+bx} = -\frac{\omega\sqrt[3]{\omega}}{a\,x} + \frac{b}{3\,a}\int\frac{dx}{x}\sqrt[3]{\omega}$$

$$77)\quad \int \frac{dx}{x^3}\,\sqrt[3]{a+bx} = \left(-\frac{1}{2\,a\,x^2} + \frac{b}{3\,a^2\,x}\right)\omega\sqrt[3]{\omega} - \frac{b^2}{9\,a^2}\int\frac{dx}{x}\sqrt[3]{\omega}$$

$$78)\quad \int \frac{dx}{x}\,\sqrt[3]{(a+bx)^2} = \frac{3}{2}\sqrt[3]{\omega^2} + a\int\frac{dx}{x\sqrt[3]{\omega}}$$

$$79)\quad \int \frac{dx}{x^2}\,\sqrt[3]{(a+bx)^2} = -\frac{\omega\sqrt[3]{\omega^2}}{a\,x} + \frac{2\,b}{3\,a}\int\frac{dx}{x}\sqrt[3]{\omega^2}$$

$$80)\quad \int \frac{dx}{x^3}\,\sqrt[3]{(a+bx)^2} = \left(-\frac{1}{2\,a\,x^2} + \frac{b}{6\,a^2\,x}\right)\omega\sqrt[3]{\omega^2} - \frac{b^2}{9\,a^2}\int\frac{dx}{x}\sqrt[3]{\omega^2}$$

$$81)\quad \int \frac{dx}{\sqrt[5]{(a+bx)^2}} = \left(\frac{1}{3\,a\,\omega} + \frac{2}{3\,a^2}\right)\frac{x}{\sqrt{\omega}}$$

$$82)\quad \int \frac{dx}{\sqrt[7]{(a+bx)^2}} = \left(\frac{1}{5\,a\,\omega^2} + \frac{4}{15\,a^2\,\omega} + \frac{8}{15\,a^3}\right)\frac{x}{\sqrt{\omega}}$$

$$83)\quad \int \frac{dx}{\sqrt[9]{(a+bx)^2}} = \left(\frac{1}{7\,a\,\omega^3} + \frac{6}{35\,a^2\,\omega^2} + \frac{8}{35\,a^3\,\omega} + \frac{16}{35\,a^4}\right)\frac{x}{\sqrt{\omega}}$$

§. 79.

Integrale von der Form $\int f\left\{x^p, \sqrt{1-x^q}^r\right\}$.

Sei s eine positive ganze ungerade Zahl, so wird:

1) $$\int \frac{x^{2r}\,dx}{(\sqrt{1-x^2})^s} = -\frac{1}{(2r-s+1)(\sqrt{1-x^2})^{s-2}}$$

$$\sum_0^{2r-1}{}^{\varkappa} A_\varkappa x^{2r-\varkappa} + N\frac{x}{(\sqrt{1-x^2})^s}\sum_1^{\frac{s-1}{2}}{}^{\lambda} B_\lambda (1-x^2)^\lambda$$

$$\varkappa = 1, 3, 5, \ldots$$
$$\lambda = 0, 2, 4, \ldots$$

$$A_\varkappa = \frac{(2r-1)(2r-3)\ldots(2r-\varkappa)}{(2r-s-1)(2r-s-3)\ldots(2r-s-\varkappa)},\quad A_0 = 1$$

$$B_\lambda = \frac{(s-3)(s-5)\ldots(s-\lambda-1)}{(s-2)(s-4)\ldots(s-\lambda-2)}$$

$$N = \frac{(2r-1)(2r-3)\ldots 3.1}{(2r-s+1)(2r-s+3)\ldots(-s+3)}$$

2) $$\int \frac{x^{2r+1}\,dx}{(\sqrt{1-x^2})^s} = -\frac{1}{(2r-s+2)(\sqrt{1-x^2})^{s-2}}\sum_0^{2r-4}{}^{\lambda} A_\lambda x^{2r-\lambda-2}$$

$$+N\left\{\frac{x^2}{(\sqrt{1-x^2})^s}\left[(1-x^2)+(1-x^2)^2+(1-x^2)^{\frac{s-1}{2}}\right]-\sqrt{1-x^2}\right\}$$

$$\lambda = 0, 2, 4, 6 \ldots$$

$$A_\lambda = \frac{2r.2r-2\ldots 2r-\lambda}{(2r-s)(2r-s-2)\ldots(2r-s-\lambda)}\quad A_0 = 1$$

$$N = \frac{2r.2r-2\ldots 4.2}{(2r-s+2)(2r-s)(2r-s-2)\ldots(s-4)(s-2)}$$

3) $$\int \frac{x^{2r}}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = -\frac{\sqrt{1-x^2}}{2r}\sum_1^{2r-1}{}^{\varkappa} A_\varkappa x^{2r-\varkappa}$$

$$+\frac{(2r-1)(2r-3)\ldots 3.1}{2r.(2r-2)(2r-4)\ldots 4.2}\,arc\sin x$$

$$\varkappa = 1, 3, 5, \ldots$$

$$A_\varkappa = \frac{(2r-1)(2r-3)\ldots(2r-\varkappa)}{(2r-2)(2r-4)\ldots(2r-\varkappa-1)},\quad A_\varkappa = 1$$

$$4)\ \int \frac{x^{2r+1}\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{\sqrt{1-x^2}}{2r+1}\sum_0^{2r}{}^{\lambda} A_\lambda x^{2r-\lambda}$$

$$A_\lambda = \frac{2r.(2r-2)(2r-4)\ldots(2r+2-\lambda)}{(2r-1)(2r-3)\ldots(2r-\lambda+2-1)},\quad A_0 = 1$$

$$\lambda = 0, 2, 4, 6 \ldots$$

Sei s positiv und ganz

$$5)\ \int \frac{dx}{x^{2r}(\sqrt{1-x^2})^s} = -\frac{1}{(2r-1)x^{2r-1}(\sqrt{1-x^2})^{s-2}}\sum_0^{2(r-1)}{}^{\lambda} A_\lambda x^\lambda$$

$$+\frac{(2r+s-3)(2r+s-5)\ldots(s+1)}{(2r-1)(2r-3)\ldots5.3.1}\,\frac{x}{(\sqrt{1-x^2})^s}\sum_1^{\frac{s-1}{2}}(1-x^2)^\varkappa B_\varkappa$$

$$\lambda = 0, 2, 4, 6 \ldots$$

$$\varkappa = 1, 2, 3, 4, 5 \ldots$$

$$A_\lambda = \frac{(2r+s-3)(2r+s-5)\ldots(2r+s-\lambda-1)}{(2r-3)(2r-5)\ldots(2r-\lambda-1)}$$

$$B_{\varkappa+1} = \frac{(s-3)(s-5)\ldots(s-2\varkappa-1)}{(s-2)(s-4)\ldots(s-2\varkappa)},\ A_0=1,\ B_1=\frac{1}{s-2}$$

$$6)\ \int \frac{dx}{x^{2r+1}(\sqrt{1-x^2})^s} = -\frac{1}{2r.x^{2r}(\sqrt{1-x^2})^{s-2}}\sum_0^{2r-2}{}^{\lambda} A_\lambda x^\lambda$$

$$+\frac{(2r+s-2)(2r+s-4)\ldots(s+2)s}{2r.(2r-2)(2r-4)\ldots2}\,\frac{1}{(\sqrt{1-x^2})^s}\left\{\frac{1-x^2}{s-2}\right.$$

$$\left.+\frac{(1-x^2)^2}{s-4}+\cdots+\frac{(1-x^2)^{\frac{1}{2}(s-1)}}{1}\right\}$$

$$+\frac{(2r+s-2)(2r+s-4)\ldots(s+2)s}{(2r-2)(2r-4)\ldots4.2}\log\frac{\sqrt{1-x^2}-1}{x^2}$$

$$\lambda = 0, 2, 4, 6 \ldots$$

$$A_\lambda = \frac{(2r+s-2)(2r+s-4)\ldots(2r+s-\lambda)}{(2r-2)(2r-4)\ldots(2r-\lambda)},\ A_0 = 1$$

$$7)\ \int \frac{dx}{x^{2r}\sqrt{1-x^2}} = -\frac{\sqrt{1-x^2}}{(2r-1)x^{2r-1}}\left\{1+\frac{2r-2}{2r-3}x^2\right.$$

$$\left.+\frac{(2r-2)(2r-4)}{(2r-3)(2r-5)}x^4+\cdots+\frac{(2r-2)(2r-4)\ldots2}{(2r-3)(2r-5)\ldots3}x^{2r-2}\right\}$$

$$8)\ \int \frac{dx}{x^{2r+1}\sqrt{1-x^2}} = -\frac{\sqrt{1-x^2}}{2r.x^{2r}}\left\{1+\frac{2r-1}{2r-2}x^2+\cdots\right.$$

$$\left.+\frac{(2r-1)(2r-3)\ldots3}{(2r-2)(2r-4)\ldots2}x^{2r-2}\right\}+\frac{(2r-1)(2r-3)\ldots3.1}{2r.(2r-2)\ldots4.2}$$

$$\log\frac{\sqrt{1-x^2}-1}{x}$$

Sei s eine positive ganze und ungerade Zahl, so ist:

9) $$\int x^{2r}(\sqrt{1-x^2})^s\,dx = -\frac{(\sqrt{1-x^2})^{s+2}}{2r+s+1}\sum_1^{2r-1}{}^{\varkappa} A_\varkappa x^{2r-\varkappa}$$

$$+A_{2r-3}\,x\sqrt{1-x^2}\sum_0^{s+1}{}^{\lambda} B_\lambda (1-x^2)^{\frac{s-\lambda-1}{2}} + A_{2r-3}\,B_{\lambda+1}\,arc\sin x$$

$$\varkappa = 1, 3, 5, 7, \ldots$$
$$\lambda = 0, 2, 4, 6, \ldots$$

$$A_1 = 1, \quad A_\varkappa = \frac{(2r-1)(2r-3)\ldots(2r-\varkappa-2)}{(2r+s-1)(2r+s-3)\ldots(2r+s-\varkappa)}$$

$$B_0 = 1, \quad B_\lambda = \frac{s(s-2)(s-4)\ldots(s-\lambda)}{(s-1)(s-3)\ldots(s-\lambda-1)}$$

10) $$\int x^{2r+1}(\sqrt{1-x^2})^s\,dx = -\frac{(\sqrt{1-x^2})^{s+2}}{2r+s+2}\sum_0^{2r-2}{}^{\lambda} c_\lambda x^{2r-\lambda}$$

$$+c_{2r}\,x^2\sqrt{1-x^2}\left\{1+(1-x^2)+(1-x^2)^{\frac{s-1}{2}}+(1-x^2)^{\frac{s-3}{2}}\right.$$

$$\left.+(1-x^2)^{\frac{s-5}{2}}\right\} - \frac{2r.(2r-2)\ldots4.2}{(2r+s+2)(2r+s)\ldots(s+4)(s+2)}\sqrt{1-x^2}$$

Dabei ist

$$\lambda = 0, 2, 4, 6\ldots$$

$$C_\lambda = \frac{2r.2r-2\ldots2r-\lambda}{(2r+s)(2r+s-2)\ldots(2r+s-\lambda)}.$$

Sei n gerade, so ist;

11) $$\int\frac{x^n\,dx}{\sqrt{x^2-1}} = \sqrt{x^2-1}\sum_0^{\frac{n}{2}-1}{}^{\varkappa}\frac{(n-1)(n-3)\ldots(n-2\varkappa+1)}{n(n-2)\ldots(n-2\varkappa)}x^{n-2\varkappa+1}$$

$$+\frac{(n-1)(n-3)\ldots3.1}{n.(n-2)(n-4)\ldots4.2}\log(x+\sqrt{x^2-1}).$$

Ist dagegen n ungerade, so wird:

12) $$\int\frac{x^n}{\sqrt{x^2-1}} = \sqrt{x^2-1}\sum_0^{\frac{n-1}{2}}{}^{\varkappa}\frac{(n-1)(n-3)\ldots(n-2\varkappa+1)}{n(n-2)(n-4)\ldots(n-2\varkappa)}x^{n-2\varkappa+1}$$

Die Coefficienten für $\varkappa = 0$ sind $= 1$.

13) $$\int\frac{x^n\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{x^{n-1}\sqrt{1-x^2}}{n}+\frac{n-1}{n}\int\frac{x^{n-2}\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

14) $$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\sqrt{1-x^2}$$

15) $$\int \frac{x^n\,dx}{\sqrt{x^2-1}} = \frac{x^{n-1}\sqrt{x^2-1}}{n} + \frac{n-1}{n}\int \frac{x^{n-2}\,dx}{\sqrt{x^2-1}}$$

16) $$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{x^2-1}} = \sqrt{x^2-1}$$

17) $$\int \frac{x^n\,dx}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{x^{n-1}\sqrt{1+x^2}}{n} - \frac{(n-1)}{n}\int \frac{x^{n-2}\,dx}{\sqrt{1+x^2}}$$

18) $$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{1+x^2}} = \sqrt{1+x^2}$$

19) $$\int \frac{dx}{x^n\sqrt{1-x^2}} = -\frac{\sqrt{1-x^2}}{(n-1)\,x^{n-1}} + \frac{n-2}{n-1}\int \frac{dx}{x^{n-2}\sqrt{1-x^2}}$$

20) $$\int \frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}} = -\log\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}$$

21) $$\int \frac{dx}{x^n\sqrt{x^2-1}} = \frac{\sqrt{x^2-1}}{(n-1)\,x^{n-1}} + \frac{n-2}{n-1}\int \frac{dx}{x^{n-2}\sqrt{x^2-1}}$$

22) $$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = \arccos\frac{1}{x}$$

23) $$\int \frac{dx}{x^n\sqrt{1+x^2}} = -\frac{1}{n-1}\,\frac{\sqrt{1+x^2}}{x^{n-1}} - \frac{n-2}{n-1}\int \frac{dx}{x^{n-2}\sqrt{1+x^2}}$$

24) $$\int \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}} = -\log\frac{1+\sqrt{1+x^2}}{x^2}$$

25) $$\int x^n\sqrt{1-x^2}\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+2}\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{n+2}\int \frac{n^n\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

26) $$\int x\sqrt{1-x^2}\,dx = \frac{1}{3}\,(x^2-1)\sqrt{1-x^2}$$

27) $$\int x^n\sqrt{x^2-1}\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+2}\sqrt{x^2-1} - \frac{1}{n+2}\int \frac{x^n\,dx}{\sqrt{x^2-1}}$$

28) $\int x \sqrt{x^2 - 1}\, dx = \frac{1}{3}(x^2 - 1)\sqrt{x^2 - 1}$

29) $\int x^n \sqrt{1 + x^2}\, dx = \frac{x^{n+1}}{n+2}\sqrt{1+x^2} + \frac{1}{n+2}\int \frac{x^n\, dx}{\sqrt{1+x^2}}$

30) $\int x \sqrt{1 + x^2}\, dx = \frac{1}{3}(x^2 + 1)\sqrt{1 + x^2}$

31) $\int \frac{dx}{x^n}\sqrt{1 - x^2} = -\frac{\sqrt{1-x^2}}{(n-2)x^{n-1}} - \frac{1}{n-2}\int \frac{dx}{x^n\sqrt{1-x^2}}$

32) $\int \frac{dx}{x}\sqrt{1 - x^2} = \sqrt{1 - x^2} + \log\frac{1 - \sqrt{1 - x^2}}{x}$

33) $\int \frac{dx}{x^n}\sqrt{x^2 - 1} = -\frac{\sqrt{x^2-1}}{(n-2)x^{n-1}} + \frac{1}{n-2}\int \frac{dx}{x^n\sqrt{x^2-1}}$

34) $\int \frac{dx}{x}\sqrt{x^2 - 1} = \sqrt{x^2 - 1} - \mathit{arc\,cos}\,\frac{1}{x}$

35) $\int \frac{dx}{x^n}\sqrt{1 + x^2} = -\frac{\sqrt{1+x^2}}{(n-2)x^{n-1}} - \frac{1}{n-2}\int \frac{dx}{x^n\sqrt{1+x^2}}$

36) $\int \frac{dx}{x}\sqrt{1 + x^2} = \sqrt{1 + x^2} - \log\frac{1 + \sqrt{1 + x^2}}{x}$

37) $\int dx\sqrt{1 + x^2} = \frac{x}{2}\sqrt{1+x^2} + \frac{1}{2}\log(x + \sqrt{1+x^2})$

38) $\int dx\sqrt{x^2 - 1} = \frac{x}{2}\sqrt{x^2-1} + \frac{1}{2}\log(\sqrt{x^2-1} + x)$

39) $\int dx\sqrt{1 - x^2} = \frac{x}{2}\sqrt{1 - x^2} + \frac{1}{2}\mathit{arc\,sin}\,x.$

§. 80.

Sei $a + b x^2 = \omega$.

1) $$\int \frac{dx}{\sqrt{a + b x^2}} = \frac{1}{\sqrt{b}} \log \{x\sqrt{b} + \sqrt{a + b x^2}\}, \quad b > 0$$
$$= \frac{1}{\sqrt{-b}} \arcsin x \sqrt{-\frac{b}{a}}, \quad b < 0$$

2) $$\int \frac{dx}{\sqrt{1 + x^2}} = \log \{x + \sqrt{1 + x^2}\}$$

3) $$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 1}} = \log \{x + \sqrt{x^2 - 1}\}$$

4) $$\int \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} = \arcsin x$$

5) $$\int \frac{dx}{\sqrt{(a + b x^2)^3}} = \frac{x}{a\sqrt{\omega}}$$

6) $$\int \frac{dx}{\sqrt{(a + b x^2)^5}} = \left(\frac{1}{3 a \omega} + \frac{2}{3 a^2}\right) \frac{x}{\sqrt{\omega}}$$

7) $$\int \frac{dx}{\sqrt{(a + b x^2)^7}} = \left(\frac{1}{5 a \omega^2} + \frac{4}{15 a^2 \omega} + \frac{8}{15 a^3}\right) \frac{x}{\sqrt{\omega}}$$

8) $$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{a + b x^2}} = \frac{\sqrt{\omega}}{b}$$

9) $$\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{a + b x^2}} = \frac{x\sqrt{\omega}}{2b} - \frac{a}{2b} \int \frac{dx}{\sqrt{\omega}}$$

10) $$\int \frac{x^3\,dx}{\sqrt{a + b x^2}} = \left(\frac{x^2}{3b} - \frac{2a}{3b^2}\right) \sqrt{\omega}$$

11) $$\int \frac{x^4\,dx}{\sqrt{a + b x^2}} = \left(\frac{x^3}{4b} - \frac{3ax}{8b^2}\right) \sqrt{\omega} + \frac{3a^2}{8b^3} \int \frac{dx}{\sqrt{\omega}}$$

12) $$\int \frac{x^5\,dx}{\sqrt{a + b x^2}} = \left(\frac{x^4}{5b} - \frac{4ax^2}{15b^2} + \frac{8a^2}{15b^3}\right) \sqrt{\omega}$$

13) $$\int \frac{dx}{x\sqrt{a+bx^2}} = \frac{1}{2\sqrt{a}} \log \frac{\sqrt{a+bx^2}-\sqrt{a}}{\sqrt{a+bx^2}+\sqrt{a}}, \quad a > 0$$
$$= \frac{1}{\sqrt{-a}} \operatorname{arc\,sec} x \sqrt{-\frac{b}{a}}, \quad a < 0$$

14) $$\int \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}} = \log \frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}$$

15) $$\int \frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}} = \log \frac{\sqrt{1-x^2}-1}{x}$$

16) $$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = \operatorname{arc\,sec} x = \operatorname{arc\,cos} \frac{1}{x}$$

17) $$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{a+bx^2}} = -\frac{\sqrt{\omega}}{ax}$$

18) $$\int \frac{dx}{x^3\sqrt{a+bx^2}} = -\frac{\sqrt{\omega}}{2ax^2} - \frac{b}{2a}\int \frac{dx}{x\sqrt{\omega}}$$

19) $$\int \frac{dx}{x^4\sqrt{a+bx^2}} = \left(-\frac{1}{3ax^3} + \frac{2b}{3a^2x}\right)\sqrt{\omega}$$

20) $$\int \frac{dx}{x^5\sqrt{a+bx^2}} = \left(-\frac{1}{4ax^4} + \frac{3b}{8a^2x^2}\right)\sqrt{\omega} + \frac{3b^2}{8a^2}\int \frac{dx}{x\sqrt{\omega}}$$

21) $$\int \frac{dx}{\sqrt{a+bx^2}^3} = \frac{x}{a\sqrt{\omega}}$$

22) $$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{a+bx^2}^3} = -\frac{1}{b\sqrt{\omega}}$$

23) $$\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{a+bx^2}^3} = -\frac{x}{b\sqrt{\omega}} + \frac{1}{b}\int \frac{dx}{\sqrt{\omega}}$$

24) $$\int \frac{x^3\,dx}{\sqrt{a+bx^2}^3} = \left(\frac{x^2}{b} + \frac{2a}{b^2}\right)\frac{1}{\sqrt{\omega}}$$

25) $$\int \frac{x^4\,dx}{\sqrt{a+bx^2}^3} = \left(\frac{x^3}{2b} + \frac{3ax}{2b^2}\right)\frac{1}{\sqrt{\omega}} - \frac{3a}{2b^2}\int \frac{dx}{\sqrt{\omega}}$$

26) $$\int \frac{x^5\,dx}{\sqrt{a+bx^2}^3} = \left(\frac{x^4}{3b} - \frac{4ax^2}{3b^2} - \frac{8a^2}{3b^3}\right)\frac{1}{\sqrt{\omega}}$$

46) $\int \frac{dx}{x^2} \sqrt{a+bx}^3 = -\frac{\omega^2 \sqrt{\omega}}{ax} + \frac{3b}{2a} \int \frac{dx}{x} \sqrt{\omega^3}$

47) $\int \frac{dx}{x^3} \sqrt{a+bx}^3 = \left(-\frac{1}{2ax^2} - \frac{b}{4a^2x}\right) \omega^2 \sqrt{\omega}$
$+ \frac{3b^2}{8a^2} \int \frac{dx}{x} \sqrt{\omega^3}$

48) $\int \frac{dx}{x^4} \sqrt{a+bx}^3 = \left(-\frac{1}{3ax^3} + \frac{b}{12a^2x^2} + \frac{b^2}{24a^3x}\right) \omega^2 \sqrt{\omega}$
$- \frac{b^3}{16a^3} \int \frac{dx}{x} \sqrt{\omega^3}$

49) $\int \frac{dx}{x^5} \sqrt{a+bx}^3 = \left(-\frac{1}{4ax^4} + \frac{b}{8a^2x^3} - \frac{b^2}{32a^3x^2}\right.$
$\left.- \frac{b^3}{64a^4x}\right) \omega^2 \sqrt{\omega} + \frac{3b^4}{128a^4} \int \frac{dx}{x} \sqrt{\omega^3}$

50) $\int dx \sqrt{a+bx}^5 = \frac{2\omega^3 \sqrt{\omega}}{7b}$

51) $\int \frac{dx}{x} \sqrt{a+bx}^5 = \left(\frac{1}{5}\omega^2 + \frac{1}{3}a\omega + a^2\right) 2\sqrt{\omega} + a^3 \int \frac{dx}{x\sqrt{\omega}}$

52) $\int \frac{dx}{x^2} \sqrt{a+bx}^5 = -\frac{\omega^3 \sqrt{\omega}}{ax} + \frac{5b}{2a} \int \frac{dx}{x} \sqrt{\omega^5}$

53) $\int \frac{dx}{x^3} \sqrt{a+bx}^5 = \left(-\frac{1}{2ax^2} - \frac{3b}{4a^2x}\right) \omega^3 \sqrt{\omega}$
$+ \frac{15b^2}{8a^2} \int \frac{dx}{x} \sqrt{\omega^5}$

54) $\int x\,dx \sqrt{a+bx}^5 = \left(\frac{1}{9}\omega - \frac{1}{7}a\right) \frac{2\omega^3 \sqrt{\omega}}{b^2}$

55) $\int x^2 dx \sqrt{a+bx}^5 = \left(\frac{1}{11}\omega^2 - \frac{2}{9}a\omega + \frac{1}{7}a^2\right) \frac{2\omega^3 \sqrt{\omega}}{b^3}$

56) $\int x^3 dx \sqrt{a+bx}^5 = \left(\frac{1}{13}\omega^3 - \frac{3}{11}a\omega^2 + \frac{1}{3}a^2\omega\right.$
$\left.- \frac{1}{7}a^3\right) \frac{2\omega^3 \sqrt{\omega}}{b^4}$

57) $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{a+bx}} = \frac{3\sqrt[3]{\omega^2}}{2b}$

$$58)\quad \int \frac{x\,dx}{\sqrt[3]{a+bx}} = \left(\frac{1}{5}\,\omega - \frac{1}{2}\,a\right)\frac{3\sqrt[3]{\omega^2}}{b^2}$$

$$59)\quad \int \frac{x^2\,dx}{\sqrt[3]{a+bx}} = \left(\frac{1}{3}\,\omega^2 - \frac{2}{5}\,a\,\omega + \frac{1}{2}\,a^2\right)\frac{3\sqrt[3]{\omega^2}}{b^3}$$

$$60)\quad \int \frac{dx}{\sqrt[3]{(a+bx)^2}} = \frac{3\sqrt[3]{\omega}}{b}$$

$$61)\quad \int \frac{x\,dx}{\sqrt[3]{(a+bx)^2}} = \left(\frac{1}{4}\,\omega - a\right)\frac{3\sqrt[3]{\omega}}{b^2}$$

$$62)\quad \int \frac{x^2\,dx}{\sqrt[3]{(a+bx)^2}} = \left(\frac{1}{7}\,\omega^2 - \frac{1}{2}\,a\,\omega + a^2\right)\frac{3\sqrt[3]{\omega}}{b^3}$$

$$63)\quad \int \frac{dx}{x\sqrt[3]{a+bx}} = \frac{1}{\sqrt[3]{a}}\left\{\frac{3}{2}\log\frac{\sqrt[3]{\omega}-\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{x}} + \sqrt{3}\,arc\,tgn\,\frac{\sqrt{3}\sqrt[3]{\omega}}{\sqrt[3]{\omega}+2\sqrt[3]{a}}\right\}$$

$$64)\quad \int \frac{dx}{x^2\sqrt[3]{a+bx}} = -\frac{\sqrt[3]{\omega^2}}{ax} - \frac{b}{3a}\int\frac{dx}{x\sqrt[3]{\omega}}$$

$$65)\quad \int \frac{dx}{x^3\sqrt[3]{a+bx}} = \left(-\frac{1}{2ax^2} + \frac{2b}{3a^2x}\right)\sqrt[3]{\omega^2} + \frac{2b^2}{9a^2}\int\frac{dx}{x\sqrt[3]{\omega}}$$

$$66)\quad \int \frac{dx}{x\sqrt[3]{(a+bx)^2}} = \frac{1}{\sqrt[3]{a^2}}\left\{\frac{3}{2}\log\frac{\sqrt[3]{\omega}-\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{x}} - \sqrt{3}\,arc\,tgn\,\frac{\sqrt{3}\sqrt[3]{\omega}}{\sqrt[3]{\omega}+2\sqrt[3]{a}}\right.$$

$$67)\quad \int \frac{dx}{x^2\sqrt[3]{(a+bx)^2}} = -\frac{\sqrt[3]{\omega}}{ax} - \frac{2b}{3a}\int\frac{dx}{x\sqrt[3]{\omega^2}}$$

$$68)\quad \int \frac{dx}{x^3\sqrt[3]{(a+bx)^2}} = \left(-\frac{1}{2ax^2} + \frac{5b}{6a^2x}\right)\sqrt[3]{\omega} + \frac{5b^2}{9a^2}\int\frac{dx}{x\sqrt[3]{\omega^2}}$$

$$69)\quad \int d\sqrt[3]{a+bx} = \frac{3\,\omega\sqrt[3]{\omega}}{4b}$$

$$70)\quad \int x\,dx\sqrt[3]{a+bx} = \left(\frac{1}{7}\,\omega - \frac{1}{4}\,a\right)\frac{3\,\omega\sqrt[3]{\omega}}{b^2}$$

$$71)\quad \int x^2dx\sqrt[3]{a+bx} = \left(\frac{1}{10}\omega^2 - \frac{2}{7}a\,\omega + \frac{1}{4}a^2\right)\frac{3\,\omega\sqrt[3]{\omega}}{b^3}$$

$$72)\quad \int dx\sqrt[3]{(a+bx)^2} = \frac{3\,\omega\sqrt[3]{\omega^2}}{5\,b}$$

$$73)\quad \int x\,dx\sqrt[3]{(a+bx)^2} = \left(\frac{1}{8}\,\omega - \frac{1}{5}\,a\right)\frac{3\,\omega\sqrt[3]{\omega^2}}{b^2}$$

$$74)\quad \int x^2dx\sqrt[3]{(a+bx)^2} = \left(\frac{1}{11}\omega^2 - \frac{1}{4}a\,\omega + \frac{1}{5}a^2\right)\frac{3\,\omega\sqrt[3]{\omega^2}}{b^3}$$

$$75)\quad \int \frac{dx}{x}\sqrt[3]{a+bx} = 3\sqrt[3]{\omega} + a\int\frac{dx}{x\sqrt[3]{\omega}}$$

$$76)\quad \int \frac{dx}{x^2}\sqrt[3]{a+bx} = -\frac{\omega\sqrt[3]{\omega}}{a\,x} + \frac{b}{3\,a}\int\frac{dx}{x}\sqrt[3]{\omega}$$

$$77)\quad \int \frac{dx}{x^3}\sqrt[3]{a+bx} = \left(-\frac{1}{2\,a\,x^2} + \frac{b}{3\,a^2x}\right)\omega\sqrt[3]{\omega} - \frac{b^2}{9\,a^2}\int\frac{dx}{x}\sqrt[3]{\omega}$$

$$78)\quad \int \frac{dx}{x}\sqrt[3]{(a+bx)^2} = \frac{3}{2}\sqrt[3]{\omega^2} + a\int\frac{dx}{x\sqrt[3]{\omega}}$$

$$79)\quad \int \frac{dx}{x^2}\sqrt[3]{(a+bx)^2} = -\frac{\omega\sqrt[3]{\omega^2}}{a\,x} + \frac{2\,b}{3\,a}\int\frac{dx}{x}\sqrt[3]{\omega^2}$$

$$80)\quad \int \frac{dx}{x^3}\sqrt[3]{(a+bx)^2} = \left(-\frac{1}{2\,a\,x^2} + \frac{b}{6\,a^2x}\right)\omega\sqrt[3]{\omega^2} - \frac{b^2}{9\,a^2}\int\frac{dx}{x}\sqrt[3]{\omega^2}$$

$$81)\quad \int \frac{dx}{\sqrt[5]{(a+bx)^2}} = \left(\frac{1}{3\,a\,\omega} + \frac{2}{3\,a^2}\right)\frac{x}{\sqrt{\omega}}$$

$$82)\quad \int \frac{dx}{\sqrt[7]{(a+bx)^2}} = \left(\frac{1}{5\,a\,\omega^2} + \frac{4}{15\,a^2\,\omega} + \frac{8}{15\,a^3}\right)\frac{x}{\sqrt{\omega}}$$

$$83)\quad \int \frac{dx}{\sqrt[9]{(a+bx)^2}} = \left(\frac{1}{7\,a\,\omega^3} + \frac{6}{35\,a^2\,\omega^2} + \frac{8}{35\,a^3\,\omega} + \frac{16}{35\,a^4}\right)\frac{x}{\sqrt{\omega}}$$

§. 79.

Integrale von der Form $\int f\left\{x^p, \sqrt{1-x^q}^r\right\}$.

Sei s eine positive ganze ungerade Zahl, so wird:

$$1)\quad \int \frac{x^{2r}\,dx}{(\sqrt{1-x^2})^s} = -\frac{1}{(2r-s+1)(\sqrt{1-x^2})^{s-2}}$$

$$\sum_0^{2r-1}{}_{\varkappa} A_\varkappa x^{2r-\varkappa} + N\frac{x}{(\sqrt{1-x^2})^s}\sum_1^{\frac{s-1}{2}}{}_\lambda B_\lambda(1-x^2)^\lambda$$

$$\varkappa = 1, 3, 5, \ldots$$

$$\lambda = 0, 2, 4, \ldots$$

$$A_\varkappa = \frac{(2r-1)(2r-3)\ldots(2r-\varkappa)}{(2r-s-1)(2r-s-3)\ldots(2r-s-\varkappa)},\quad A_0 = 1$$

$$B_\lambda = \frac{(s-3)(s-5)\ldots(s-\lambda-1)}{(s-2)(s-4)\ldots(s-\lambda-2)}$$

$$N = \frac{(2r-1)(2r-3)\ldots 3.1}{(2r-s+1)(2r-s+3)\ldots(-s+3)}$$

$$2)\quad \int \frac{x^{2r+1}\,dx}{(\sqrt{1-x^2})^s} = -\frac{1}{(2r-s+2)(\sqrt{1-x^2})^{s-2}}\sum_0^{2r-4}{}_\lambda A_\lambda x^{2r-\lambda-2}$$

$$+N\left\{\frac{x^2}{(\sqrt{1-x^2})^s}\left[(1-x^2)+(1-x^2)^2+(1-x^2)^{\frac{s-1}{2}}\right]-\sqrt{1-x^2}\right\}$$

$$\lambda = 0, 2, 4, 6\ \ldots$$

$$A_\lambda = \frac{2r.2r-2\ldots 2r-\lambda}{(2r-s)(2r-s-2)\ldots(2r-s-\lambda)}\quad A_0 = 1$$

$$N = \frac{2r.2r-2\ldots 4.2}{(2r-s+2)(2r-s)(2r-s-2)\ldots(s-4)(s-2)}$$

$$3)\quad \int \frac{x^{2r}}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = -\frac{\sqrt{1-x^2}}{2r}\sum_1^{2r-1}{}_\varkappa A_\varkappa x^{2r-\varkappa}$$

$$+\frac{(2r-1)(2r-3)\ldots 3.1}{2r.(2r-2)(2r-4)\ldots 4.2}\,arc\sin x$$

$$\varkappa = 1, 3, 5, \ldots$$

$$A_\varkappa = \frac{(2r-1)(2r-3)\ldots(2r-\varkappa)}{(2r-2)(2r-4)\ldots(2r-\varkappa-1)},\quad A_\varkappa = 1$$

4) $$\int \frac{x^{2r+1}\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{\sqrt{1-x^2}}{2r+1}\sum_0^{2r}{}^{\lambda} A_\lambda x^{2r-\lambda}$$

$$A_\lambda = \frac{2r.(2r-2)(2r-4)\ldots(2r+2-\lambda)}{(2r-1)(2r-3)\ldots(2r-\lambda+2-1)}, \quad A_0 = 1$$

$$\lambda = 0, 2, 4, 6 \ldots$$

Sei s positiv und ganz

5) $$\int \frac{dx}{x^{2r}(\sqrt{1-x^2})^s} = -\frac{1}{(2r-1)x^{2r-1}(\sqrt{1-x^2})^{s-2}}\sum_0^{2(r-1)}{}^{\lambda} A_\lambda x^\lambda$$

$$+\frac{(2r+s-3)(2r+s-5)\ldots(s+1)}{(2r-1)(2r-3)\ldots5.3.1}\frac{x}{(\sqrt{1-x^2})^s}\sum_1^{\frac{s-1}{2}}(1-x^2)^\varkappa B_\varkappa$$

$$\lambda = 0, 2, 4, 6 \ldots$$

$$\varkappa = 1, 2, 3, 4, 5 \ldots$$

$$A_\lambda = \frac{(2r+s-3)(2r+s-5)\ldots(2r+s-\lambda-1)}{(2r-3)(2r-5)\ldots(2r-\lambda-1)}$$

$$B_{\varkappa+1} = \frac{(s-3)(s-5)\ldots(s-2\varkappa-1)}{(s-2)(s-4)\ldots(s-2\varkappa)}, \; A_0 = 1, \; B_1 = \frac{1}{s-2}$$

6) $$\int \frac{dx}{x^{2r+1}(\sqrt{1-x^2})^s} = -\frac{1}{2r.x^{2r}(\sqrt{1-x^2})^{s-2}}\sum_0^{2r-2}{}^{\lambda} A_\lambda x^\lambda$$

$$+\frac{(2r+s-2)(2r+s-4)\ldots(s+2)s}{2r.(2r-2)(2r-4)\ldots2}\frac{1}{(\sqrt{1-x^2})^s}\left\{\frac{1-x^2}{s-2}\right.$$

$$\left.+\frac{(1-x^2)^2}{s-4}+\cdots+\frac{(1-x^2)^{\frac{1}{2}(s-1)}}{1}\right\}$$

$$+\frac{(2r+s-2)(2r+s-4)\ldots(s+2)s}{(2r-2)(2r-4)\ldots4.2}\log\frac{\sqrt{1-x^2}-1}{x^2}$$

$$\lambda = 0, 2, 4, 6 \ldots$$

$$A_\lambda = \frac{(2r+s-2)(2r+s-4)\ldots(2r+s-\lambda)}{(2r-2)(2r-4)\ldots(2r-\lambda)}, \; A_0 = 1$$

7) $$\int \frac{dx}{x^{2r}\sqrt{1-x^2}} = -\frac{\sqrt{1-x^2}}{(2r-1)x^{2r-1}}\left\{1+\frac{2r-2}{2r-3}x^2\right.$$

$$\left.+\frac{(2r-2)(2r-4)}{(2r-3)(2r-5)}x^4+\cdots+\frac{(2r-2)(2r-4)\ldots2}{(2r-3)(2r-5)\ldots3}x^{2r-2}\right\}$$

8) $$\int \frac{dx}{x^{2r+1}\sqrt{1-x^2}} = -\frac{\sqrt{1-x^2}}{2r.x^{2r}}\left\{1+\frac{2r-1}{2r-2}x^2+\cdots\right.$$

$$\left.+\frac{(2r-1)(2r-3)\ldots3}{(2r-2)(2r-4)\ldots2}x^{2r-2}\right\}+\frac{(2r-1)(2r-3)\ldots3.1}{2r.(2r-2)\ldots4.2}$$

$$\log\frac{\sqrt{1-x^2}-1}{x}$$

Sei s eine positive ganze und ungerade Zahl, so ist:

9) $$\int x^{2r}(\sqrt{1-x^2})^s\,dx = -\frac{(\sqrt{1-x^2})^{s+2}}{2r+s+1}\sum_1^{2r-1}{}^{\varkappa} A_\varkappa x^{2r-\varkappa}$$

$$+ A_{2r-3}\,x\sqrt{1-x^2}\sum_0^{s+1}{}^{\lambda} B_\lambda (1-x^2)^{\frac{s-\lambda-1}{2}} + A_{2r-3}\,B_{\lambda+1}\,arc\sin x$$

$$\varkappa = 1, 3, 5, 7, \ldots$$
$$\lambda = 0, 2, 4, 6, \ldots$$

$$A_1 = 1,\quad A_\varkappa = \frac{(2r-1)(2r-3)\ldots(2r-\varkappa-2)}{(2r+s-1)(2r+s-3)\ldots(2r+s-\varkappa)}$$

$$B_0 = 1,\quad B_\lambda = \frac{s(s-2)(s-4)\ldots(s-\lambda)}{(s-1)(s-3)\ldots(s-\lambda-1)}$$

10) $$\int x^{2r+1}(\sqrt{1-x^2})^s\,dx = -\frac{(\sqrt{1-x^2})^{s+2}}{2r+s+2}\sum_0^{2r-2}{}^{\lambda} c_\lambda x^{2r-\lambda}$$

$$+ c_{2r}\,x^2\sqrt{1-x^2}\left\{1+(1-x^2)+(1-x^2)^{\frac{s-1}{2}}+(1-x^2)^{\frac{s-3}{2}}\right.$$

$$\left.+(1-x^2)^{\frac{s-5}{2}}\right\} - \frac{2r.(2r-2)\ldots4.2}{(2r+s+2)(2r+s)\ldots(s+4)(s+2)}\sqrt{1-x^2}$$

Dabei ist

$$\lambda = 0, 2, 4, 6\ldots$$

$$C_\lambda = \frac{2r.2r-2\ldots2r-\lambda}{(2r+s)(2r+s-2)\ldots(2r+s-\lambda)}.$$

Sei n gerade, so ist;

11) $$\int\frac{x^n\,dx}{\sqrt{x^2-1}} = \sqrt{x^2-1}\sum_0^{\frac{n}{2}-1}{}^{\varkappa}\frac{(n-1)(n-3)\ldots(n-2\varkappa+1)}{n(n-2)\ldots(n-2\varkappa)}x^{n-2\varkappa+1}$$

$$+\frac{(n-1)(n-3)\ldots3.1}{n.(n-2)(n-4)\ldots4.2}\log(x+\sqrt{x^2-1}).$$

Ist dagegen n ungerade, so wird:

12) $$\int\frac{x^n}{\sqrt{x^2-1}} = \sqrt{x^2-1}\sum_0^{\frac{n-1}{2}}{}^{\varkappa}\frac{(n-1)(n-3)\ldots(n-2\varkappa+1)}{n(n-2)(n-4)\ldots(n-2\varkappa)}x^{n-2\varkappa+1}$$

Die Coefficienten für $\varkappa = 0$ sind $= 1$.

13) $$\int\frac{x^n\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{x^{n-1}\sqrt{1-x^2}}{n}+\frac{n-1}{n}\int\frac{x^{n-2}\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

14) $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\sqrt{1-x^2}$

15) $\int \frac{x^n\,dx}{\sqrt{x^2-1}} = \frac{x^{n-1}\sqrt{x^2-1}}{n} + \frac{n-1}{n}\int \frac{x^{n-2}\,dx}{\sqrt{x^2-1}}$

16) $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{x^2-1}} = \sqrt{x^2-1}$

17) $\int \frac{x^n\,dx}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{x^{n-1}\sqrt{1+x^2}}{n} - \frac{(n-1)}{n}\int \frac{x^{n-2}\,dx}{\sqrt{1+x^2}}$

18) $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{1+x^2}} = \sqrt{1+x^2}$

19) $\int \frac{dx}{x^n\sqrt{1-x^2}} = -\frac{\sqrt{1-x^2}}{(n-1)\,x^{n-1}} + \frac{n-2}{n-1}\int \frac{dx}{x^{n-2}\sqrt{1-x^2}}$

20) $\int \frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}} = -\log\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}$

21) $\int \frac{dx}{x^n\sqrt{x^2-1}} = \frac{\sqrt{x^2-1}}{(n-1)\,x^{n-1}} + \frac{n-2}{n-1}\int \frac{dx}{x^{n-2}\sqrt{x^2-1}}$

22) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = arc\cos\frac{1}{x}$

23) $\int \frac{dx}{x^n\sqrt{1+x^2}} = -\frac{1}{n-1}\,\frac{\sqrt{1+x^2}}{x^{n-1}} - \frac{n-2}{n-1}\int \frac{dx}{x^{n-2}\sqrt{1+x^2}}$

24) $\int \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}} = -\log\frac{1+\sqrt{1+x^2}}{x^2}$

25) $\int x^n\sqrt{1-x^2}\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+2}\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{n+2}\int \frac{n^n\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$

26) $\int x\sqrt{1-x^2}\,dx = \frac{1}{3}\,(x^2-1)\sqrt{1-x^2}$

27) $\int x^n\sqrt{x^2-1}\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+2}\sqrt{x^2-1} - \frac{1}{n+2}\int \frac{x^n\,dx}{\sqrt{x^2-1}}$

28) $\int x\sqrt{x^2-1}\,dx = \frac{1}{3}(x^2-1)\sqrt{x^2-1}$

29) $\int x^n\sqrt{1+x^2}\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+2}\sqrt{1+x^2} + \frac{1}{n+2}\int\frac{x^n\,dx}{\sqrt{1+x^2}}$

30) $\int x\sqrt{1+x^2}\,dx = \frac{1}{3}(x^2+1)\sqrt{1+x^2}$

31) $\int\frac{dx}{x^n}\sqrt{1-x^2} = -\frac{\sqrt{1-x^2}}{(n-2)x^{n-1}} - \frac{1}{n-2}\int\frac{dx}{x^n\sqrt{1-x^2}}$

32) $\int\frac{dx}{x}\sqrt{1-x^2} = \sqrt{1-x^2} + log\,\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x}$

33) $\int\frac{dx}{x^n}\sqrt{x^2-1} = -\frac{\sqrt{x^2-1}}{(n-2)x^{n-1}} + \frac{1}{n-2}\int\frac{dx}{x^n\sqrt{x^2-1}}$

34) $\int\frac{dx}{x}\sqrt{x^2-1} = \sqrt{x^2-1} - arc\,cos\,\frac{1}{x}$

35) $\int\frac{dx}{x^n}\sqrt{1+x^2} = -\frac{\sqrt{1+x^2}}{(n-2)x^{n-1}} - \frac{1}{n-2}\int\frac{dx}{x^n\sqrt{1+x^2}}$

36) $\int\frac{dx}{x}\sqrt{1+x^2} = \sqrt{1+x^2} - log\,\frac{1+\sqrt{1+x^2}}{x}$

37) $\int dx\sqrt{1+x^2} = \frac{x}{2}\sqrt{1+x^2} + \frac{1}{2}\,log\,(x+\sqrt{1+x^2})$

38) $\int dx\sqrt{x^2-1} = \frac{x}{2}\sqrt{x^2-1} + \frac{1}{2}\,log\,(\sqrt{x^2-1}+x)$

39) $\int dx\sqrt{1-x^2} = \frac{x}{2}\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{2}\,arc\,sin\,x.$

§. 80.

Sei $a + b x^2 = \omega$.

$$1)\ \int \frac{dx}{\sqrt{a + b x^2}} = \frac{1}{\sqrt{b}} \log \{x\sqrt{b} + \sqrt{a + b x^2}\}, \quad b > 0$$

$$= \frac{1}{\sqrt{-b}} \arcsin x \sqrt{-\frac{b}{a}}, \qquad b < 0$$

$$2)\ \int \frac{dx}{\sqrt{1 + x^2}} = \log \{x + \sqrt{1 + x^2}\}$$

$$3)\ \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 1}} = \log \{x + \sqrt{x^2 - 1}\}$$

$$4)\ \int \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} = \arcsin x$$

$$5)\ \int \frac{dx}{\sqrt{(a + b x^2)^3}} = \frac{x}{a\sqrt{\omega}}$$

$$6)\ \int \frac{dx}{\sqrt{(a + b x^2)^5}} = \left(\frac{1}{3 a \omega} + \frac{2}{3 a^2}\right) \frac{x}{\sqrt{\omega}}$$

$$7)\ \int \frac{dx}{\sqrt{(a + b x^2)^7}} = \left(\frac{1}{5 a \omega^2} + \frac{4}{15 a^2 \omega} + \frac{8}{15 a^3}\right) \frac{x}{\sqrt{\omega}}$$

$$8)\ \int \frac{x\,dx}{\sqrt{a + b x^2}} = \frac{\sqrt{\omega}}{b}$$

$$9)\ \int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{a + b x^2}} = \frac{x\sqrt{\omega}}{2b} - \frac{a}{2b} \int \frac{dx}{\sqrt{\omega}}$$

$$10)\ \int \frac{x^3\,dx}{\sqrt{a + b x^2}} = \left(\frac{x^2}{3b} - \frac{2a}{3b^2}\right) \sqrt{\omega}$$

$$11)\ \int \frac{x^4\,dx}{\sqrt{a + b x^2}} = \left(\frac{x^3}{4b} - \frac{3 a x}{8 b^2}\right) \sqrt{\omega} + \frac{3 a^2}{8 b^3} \int \frac{dx}{\sqrt{\omega}}$$

$$12)\ \int \frac{x^5\,dx}{\sqrt{a + b x^2}} = \left(\frac{x^4}{5b} - \frac{4 a x^2}{15 b^2} + \frac{8 a^2}{15 b^3}\right) \sqrt{\omega}$$

13) $$\int \frac{dx}{x\sqrt{a+bx^2}} = \frac{1}{2\sqrt{a}} \log \frac{\sqrt{a+bx^2}-\sqrt{a}}{\sqrt{a+bx^2}+\sqrt{a}}, \quad a > 0$$

$$= \frac{1}{\sqrt{-a}} \, arc \sec x \sqrt{-\frac{b}{a}}, \quad a < 0$$

14) $$\int \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}} = \log \frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}$$

15) $$\int \frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}} = \log \frac{\sqrt{1-x^2}-1}{x}$$

16) $$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = arc \sec x = arc \cos \frac{1}{x}$$

17) $$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{a+bx^2}} = -\frac{\sqrt{\omega}}{ax}$$

18) $$\int \frac{dx}{x^3\sqrt{a+bx^2}} = -\frac{\sqrt{\omega}}{2ax^2} - \frac{b}{2a}\int \frac{dx}{x\sqrt{\omega}}$$

19) $$\int \frac{dx}{x^4\sqrt{a+bx^2}} = \left(-\frac{1}{3ax^3} + \frac{2b}{3a^2x}\right)\sqrt{\omega}$$

20) $$\int \frac{dx}{x^5\sqrt{a+bx^2}} = \left(-\frac{1}{4ax^4} + \frac{3b}{8a^2x^2}\right)\sqrt{\omega} + \frac{3b^2}{8a^2}\int \frac{dx}{x\sqrt{\omega}}$$

21) $$\int \frac{dx}{\sqrt{a+bx^2}^3} = \frac{x}{a\sqrt{\omega}}$$

22) $$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{a+bx^2}^3} = -\frac{1}{b\sqrt{\omega}}$$

23) $$\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{a+bx^2}^3} = -\frac{x}{b\sqrt{\omega}} + \frac{1}{b}\int \frac{dx}{\sqrt{\omega}}$$

24) $$\int \frac{x^3\,dx}{\sqrt{a+bx^2}^3} = \left(\frac{x^2}{b} + \frac{2a}{b^2}\right)\frac{1}{\sqrt{\omega}}$$

25) $$\int \frac{x^4\,dx}{\sqrt{a+bx^2}^3} = \left(\frac{x^3}{2b} + \frac{3ax}{2b^2}\right)\frac{1}{\sqrt{\omega}} - \frac{3a}{2b^2}\int \frac{dx}{\sqrt{\omega}}$$

26) $$\int \frac{x^5\,dx}{\sqrt{a+bx^2}^3} = \left(\frac{x^4}{3b} - \frac{4ax^2}{3b^2} - \frac{8a^2}{3b^3}\right)\frac{1}{\sqrt{\omega}}$$

27) $\int \frac{dx}{x\sqrt{a+bx^2}^3} = \frac{1}{a\sqrt{\omega}} + \frac{1}{a}\int \frac{dx}{x\sqrt{\omega}}$

28) $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{a+bx^2}^3} = \left(-\frac{1}{ax} - \frac{2bx}{a^2}\right)\frac{1}{\sqrt{\omega}}$

29) $\int \frac{dx}{x^3\sqrt{a+bx^2}^3} = \left(-\frac{1}{2ax^2} - \frac{3b}{2a^2}\right)\frac{1}{\sqrt{\omega}} - \frac{3b}{2a^2}\int \frac{dx}{x\sqrt{\omega}}$

30) $\int \frac{dx}{x^4\sqrt{a+bx^2}^3} = \left(-\frac{1}{3ax^3} + \frac{4b}{3a^2x} + \frac{8b^2x}{3a^3}\right)\frac{1}{\sqrt{\omega}}$

31) $\int \frac{dx}{x^5\sqrt{a+bx^2}^3} = \left(-\frac{1}{4ax^4} + \frac{5b}{8a^2x^2} + \frac{15b^2}{8a^3}\right)\frac{1}{\sqrt{\omega}}$
$+ \frac{15b^2}{a^3}\int \frac{dx}{x\sqrt{\omega}}$

32) $\int \frac{dx}{\sqrt{a+bx^2}^5} = \left(\frac{2bx^3}{3a^2} + \frac{x}{a}\right)\frac{1}{\omega\sqrt{\omega}}$

33) $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{a+bx^2}^5} = -\frac{1}{3b\omega\sqrt{\omega}}$

34) $\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{a+bx^2}^5} = \frac{x^3}{3a\omega\sqrt{\omega}}$

35) $\int \frac{x^3\,dx}{\sqrt{a+bx^2}^5} = \left(-\frac{x^2}{b} - \frac{2a}{3b^2}\right)\frac{1}{\omega\sqrt{\omega}}$

36) $\int \frac{dx}{x\sqrt{a+bx^2}^5} = \left(\frac{4}{3a} + \frac{bx^2}{a^2}\right)\frac{1}{\omega\sqrt{\omega}} + \frac{1}{a^2}\int \frac{dx}{\omega\sqrt{\omega}}$

37) $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{a+bx^2}^5} = -\frac{1}{ax\omega\sqrt{\omega}} - \frac{4b}{a}\int \frac{dx}{\sqrt{\omega^5}}$

38) $\int \frac{dx}{x^3\sqrt{a+bx^2}^5} = -\frac{1}{2ax^2\omega\sqrt{\omega}} - \frac{5b}{2a}\int \frac{dx}{\omega\sqrt{\omega^5}}$

39) $\int dx\sqrt{a+bx^2} = \frac{x\sqrt{\omega}}{2} + \frac{a}{2}\int \frac{dx}{\sqrt{\omega}}$

40) $\int x\,dx\sqrt{a+bx^2} = \frac{\omega\sqrt{\omega}}{3b}$

41) $\int x^2\,dx\sqrt{a+bx^2} = \frac{x\omega\sqrt{\omega}}{4b} - \frac{a}{4b}\int dx\sqrt{\omega}$

42) $\int x^3 dx \sqrt{a+bx^2} = \left(\frac{x^2}{3b} - \frac{2a}{15b^2}\right) \omega\sqrt{\omega}$

43) $\int x^4 dx \sqrt{a+bx^2} = \left(\frac{x^3}{6b} - \frac{ax}{8b^2}\right) \omega\sqrt{\omega} + \frac{a^2}{8b^2}\int ax\sqrt{\omega}$

44) $\int x^5 dx \sqrt{a+bx^2} = \left(\frac{x^4}{7b} - \frac{4ax^2}{35b^2} + \frac{8a^2}{105b^3}\right) \omega\sqrt{\omega}$

45) $\int \frac{dx}{x} \sqrt{a+bx^2} = \sqrt{\omega} + a\int \frac{dx}{x\sqrt{\omega}}$

46) $\int \frac{dx}{x^2} \sqrt{a+bx^2} = -\frac{\sqrt{\omega}}{x} + b\int \frac{dx}{\sqrt{\omega}}$

47) $\int \frac{dx}{x^3} \sqrt{a+bx^2} = -\frac{\sqrt{\omega}}{2x^2} + \frac{b}{2}\int \frac{dx}{x\sqrt{\omega}}$

48) $\int \frac{dx}{x^4} \sqrt{a+bx^2} = -\frac{\omega\sqrt{\omega}}{3ax^3}$

49) $\int \frac{dx}{x^5} \sqrt{a+bx^2} = -\frac{\omega\sqrt{\omega}}{4ax^4} + \frac{b\sqrt{\omega}}{8ax^2} - \frac{b^2}{8a}\int \frac{dx}{x\sqrt{\omega}}$

50) $\int dx \sqrt{a+bx^2}^3 = \left(\frac{\omega}{4} + \frac{3a}{8}\right) x\sqrt{\omega} + \frac{3a^2}{8}\int \frac{dx}{\sqrt{\omega}}$

51) $\int x dx \sqrt{a+bx^2}^3 = \frac{\omega^2\sqrt{\omega}}{5b}$

52) $\int x^2 dx \sqrt{a+bx^2}^3 = \frac{x\omega^2\sqrt{\omega}}{6b} - \frac{a}{6b}\int dx\sqrt{\omega^3}$

53) $\int x^3 dx \sqrt{a+bx^2}^3 = \left(\frac{x^2}{7b} - \frac{2a}{35b^2}\right) \omega^2\sqrt{\omega}$

54) $\int x^4 dx \sqrt{a+bx^2}^3 = \left(\frac{x^3}{8b} - \frac{ax}{16b^2}\right) \omega^2\sqrt{\omega}$
$$+ \frac{a^2}{16b^2}\int dx\sqrt{\omega^3}$$

55) $\int x^5 dx \sqrt{a+bx^2}^3 = \left(\frac{x^4}{9b} - \frac{4ax^2}{63b^2} + \frac{8a^2}{315b^3}\right) \omega^2\sqrt{\omega}$

56) $\int \frac{dx}{x} \sqrt{a+bx^2}^3 = \left(\frac{\omega}{3} + a\right) \sqrt{\omega} + a^2\int \frac{dx}{x\sqrt{\omega}}$

57) $\int \frac{dx}{x^2} \sqrt{a+bx^2}^3 = -\frac{\omega^2 \sqrt{\omega}}{ax} + \frac{4b}{a} \int dx \sqrt{\omega^3}$

58) $\int \frac{dx}{x^3} \sqrt{a+bx^2}^3 = -\frac{\omega^2 \sqrt{\omega}}{2ax^2} + \frac{3b}{2a} \int \frac{dx}{x} \sqrt{\omega^3}$

59) $\int \frac{dx}{x^4} \sqrt{a+bx^2}^3 = \left(-\frac{1}{3ax^3} - \frac{2b}{3a^2x}\right) \omega^2 \sqrt{\omega}$

$$+ \frac{8b^2}{3a^2} \int dx \sqrt{\omega^3}$$

60) $\int \frac{dx}{x^5} \sqrt{a+bx^2}^3 = \left(-\frac{1}{4ax^4} - \frac{b}{8a^2x^2}\right) \omega^2 \sqrt{\omega}$

$$+ \frac{3b^2}{8a^2} \int \frac{dx}{x} \sqrt{\omega^3}$$

61) $\int dx \sqrt{a+bx^2}^5 = \left(\frac{\omega^2}{6} + \frac{3a\omega}{24} + \frac{5a^2}{16}\right) x \sqrt{\omega} + \frac{5a^3}{16} \int \frac{dx}{\sqrt{\omega}}$

62) $\int x\,dx \sqrt{a+bx^2}^5 = \frac{\omega^3 \sqrt{\omega}}{7b}$

63) $\int x^2 dx \sqrt{a+bx^2}^5 = \frac{x\omega^3 \sqrt{\omega}}{8b} - \frac{a}{8b} \int dx \sqrt{\omega^5}$

64) $\int x^3 dx \sqrt{a+bx^2}^5 = \left(\frac{x^2}{9b} - \frac{2a}{63b^2}\right) \omega^3 \sqrt{\omega}$

65) $\int \frac{dx}{x} \sqrt{a+bx^2}^5 = \left(\frac{\omega^2}{5} + \frac{a\omega}{3} + a^2\right) \sqrt{\omega} + a^3 \int \frac{dx}{x\sqrt{\omega}}$

66) $\int \frac{dx}{x^2} \sqrt{a+bx^2}^5 = -\frac{\omega^3 \sqrt{\omega}}{ax} + \frac{6b}{a} \int dx \sqrt{\omega^5}$

67) $\int \frac{dx}{x^3} \sqrt{a+bx^2}^5 = -\frac{\omega^3 \sqrt{\omega}}{2ax^2} + \frac{5b}{2a} \int \frac{dx}{x} \sqrt{\omega^5}.$

§. 81.

Sei $ax + bx^2 = \omega$.

1) $$\int \frac{dx}{\sqrt{ax+bx^2}^n} = -\frac{2(a+2bx)}{(n-2)a^2\sqrt{\omega^{n-2}}} - \frac{4(n-3)b}{(n-2)a^2}\int \frac{dx}{\sqrt{\omega^{n-2}}}$$

2) $$\int x^m \sqrt{ax+bx^2}^n dx = \frac{x^{m-1}\sqrt{\omega^{n+2}}}{b(m+n+1)} + \frac{a}{b}\cdot\frac{m+\frac{1}{2}n}{m+n+1}\int x^{m-1}\sqrt{\omega^n}\,dx$$

3) $$\int \frac{\sqrt{ax+bx^2}^n}{x^m}dx = -\frac{1}{x^m}\frac{\sqrt{\omega^{n+2}}}{a\left(m-\frac{n}{2}-1\right)} + \frac{b(2-m+n)}{a\left(m-\frac{n}{2}-1\right)}\int \frac{\sqrt{\omega^n}}{x^{m-1}}dx$$

4) $$\int \sqrt{ax+bx^2}^n dx = \frac{(a+2bx)\sqrt{\omega^n}}{2(n+1)b} - \frac{na^2}{4(n+1)b}\int \sqrt{\omega^{n-2}}\,dx.$$

Diese Integrale führen auf

5) $$\int \frac{dx}{\sqrt{ax+bx^2}} = \frac{1}{\sqrt{b}}\log\left(a+2bx+2\sqrt{b}\sqrt{ax+bx^2}\right),$$

oder auf

6) $$\int \frac{dx}{\sqrt{ax-bx^2}} = \frac{1}{\sqrt{b}}\arcsin\frac{2bx-a}{a}$$

7) $$\int \frac{x^m dx}{\sqrt{2rx-x^2}} = -\frac{x^{m-1}\sqrt{2rx-x^2}}{m} + \frac{r}{m}(2m-1)\int \frac{x^{m-1}dx}{\sqrt{2rx-x^2}}$$

8) $$\int \frac{dx}{x^m \sqrt{2rx - x^2}} = \frac{\sqrt{2rx - x^2}}{m x^{m-1}} + \frac{r}{m}(2m+1) \int \frac{dx}{x^{m-1}\sqrt{2rx - x^2}}$$

9) $$\int x^m \sqrt{2rx - x^2}\, dx = -\frac{x^{m-1}\sqrt{2rx - x^2}^3}{m+2} + \frac{r(2m+1)}{m+2} \int x^{m-1}\sqrt{2rx - x^2}\, dx$$

10) $$\int \frac{dx}{x^m} \sqrt{2rx - x^2}\, dx = \frac{\sqrt{2rx - x^2}^3}{(m-2)x^{m-1}} + r\frac{2m-1}{m-2} \int \frac{dx}{x^{m-1}} \sqrt{2rx - x^2}\, dx$$

11) $$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{ax + bx^2}} = \frac{\sqrt{\omega}}{b} - \frac{a}{2b} \int \frac{dx}{\sqrt{\omega}}$$

12) $$\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{ax + bx^2}} = \left(\frac{x}{2b} - \frac{3a}{4b^2}\right)\sqrt{\omega} + \frac{3a^2}{8b^2} \int \frac{dx}{\sqrt{\omega}}$$

13) $$\int \frac{x^3\,dx}{\sqrt{ax + bx^2}} = \left(\frac{x^2}{3b} - \frac{5ax}{12b^2} + \frac{5a^2}{8b^3}\right)\sqrt{\omega} - \frac{5a^3}{16b^3} \int \frac{dx}{\sqrt{\omega}}$$

14) $$\int \frac{x^4\,dx}{\sqrt{ax + bx^2}} = \left(\frac{x^3}{4b} - \frac{7ax^2}{24b^2} + \frac{35a^2x}{96b^3} - \frac{35a^3}{64b^4}\right)\sqrt{\omega} + \frac{35a^4}{128b^4} \int \frac{dx}{\sqrt{\omega}}$$

15) $$\int \frac{x^5\,dx}{\sqrt{ax + bx^2}} = \left(\frac{x^4}{5b} - \frac{9ax^3}{40b^2} + \frac{21a^2x^2}{80b^3} - \frac{21a^3x}{64b^4} + \frac{63a^4}{128b^5}\right)\sqrt{\omega} - \frac{63a^5}{256b^5} \int \frac{dx}{\sqrt{\omega}}$$

16) $$\int \frac{dx}{x\sqrt{ax + bx^2}} = -\frac{2\sqrt{\omega}}{ax}$$

17) $$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{ax + bx^2}} = \left(-\frac{1}{3ax^2} + \frac{2b}{3a^2x}\right) 2\sqrt{\omega}$$

18) $$\int \frac{dx}{x^3\sqrt{ax + bx^2}} = \left(-\frac{1}{5ax^3} + \frac{4b}{15a^2x^2} - \frac{8b^2}{15a^3x}\right) 2\sqrt{\omega}$$

19) $$\int \frac{dx}{x^4\sqrt{ax+bx^2}} = \left(-\frac{1}{7ax^4} + \frac{6b}{35a^2x^3} - \frac{8b^2}{35a^3x^2} + \frac{16b^3}{35a^4x}\right) 2\sqrt{\omega}$$

20) $$\int \frac{dx}{x^5\sqrt{ax+bx^2}} = \left(-\frac{1}{9ax^5} + \frac{8b}{63a^2x^4} - \frac{16b^2}{105a^3x^3} + \frac{64b^3}{315a^4x^2} - \frac{128b^4}{315a^5x}\right) 2\sqrt{\omega}$$

21) $$\int \frac{dx}{\sqrt{ax+bx^2}^3} = -\frac{2(2bx+a)}{a^2\sqrt{\omega}}$$

22) $$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{ax+bx^2}^3} = +\frac{2x}{b\sqrt{\omega}}$$

23) $$\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{ax+bx^2}^3} = -\frac{2x}{b\sqrt{\omega}} + \frac{1}{b}\int \frac{dx}{\sqrt{\omega}}$$

24) $$\int \frac{x^3\,dx}{\sqrt{ax+bx^2}^3} = \left(\frac{x^2}{b} + \frac{3ax}{b^2}\right)\frac{1}{\sqrt{\omega}} - \frac{3a}{2b^2}\int \frac{dx}{\sqrt{\omega}}$$

25) $$\int \frac{x^4\,dx}{\sqrt{ax+bx^2}^3} = \left(\frac{x^3}{2b} - \frac{5ax^2}{4b^2} - \frac{15a^2x}{4b^3}\right)\frac{1}{\sqrt{\omega}} + \frac{15a^2}{8b^3}\int \frac{dx}{\sqrt{\omega}}$$

26) $$\int \frac{x^5\,dx}{\sqrt{ax+bx^2}^3} = \left(\frac{x^4}{3b} - \frac{7ax^3}{12b^2} + \frac{35a^2x^2}{24b^3} + \frac{35a^3x}{8b^4}\right)\frac{1}{\sqrt{\omega}} - \frac{35a^3}{16b^4}\int \frac{dx}{\sqrt{\omega}}$$

27) $$\int \frac{dx}{x\sqrt{ax+bx^2}^3} = -\frac{2}{3ax\sqrt{\omega}} - \frac{4b}{3a}\int \frac{dx}{\sqrt{\omega^3}}$$

28) $$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{ax+bx^2}^3} = \left(-\frac{1}{5ax^2} + \frac{2b}{5a^2x}\right)\frac{2}{\sqrt{\omega}} + \frac{8b^2}{5a^2}\int \frac{dx}{\sqrt{\omega^3}}$$

29) $$\int \frac{dx}{x^3\sqrt{ax+bx^2}^3} = \left(-\frac{1}{7ax^3} + \frac{8b}{35a^2x^2} - \frac{16b^2}{35a^3x}\right)\frac{2}{\sqrt{\omega}} - \frac{64b^3}{35a^3}\int \frac{dx}{\sqrt{\omega^3}}$$

30) $$\int \frac{dx}{x^4\sqrt{ax+bx^2}^3} = \left(-\frac{1}{9ax^4} + \frac{10b}{63a^2x^3} - \frac{16b^2}{63a^3x^2} + \frac{32b^3}{63a^4x}\right)\frac{2}{\sqrt{\omega}} + \frac{128b^4}{63a^4}\int \frac{dx}{\sqrt{\omega^3}}$$

$$31)\quad \int \frac{dx}{x^5\sqrt{ax+bx^2}^3} = \left(-\frac{1}{11ax^5} + \frac{4b}{33a^2x^4} - \frac{40b^2}{231a^3x^3}\right.$$
$$\left. + \frac{64b^3}{231a^4x^2} - \frac{128b^4}{231a^5x}\right)\frac{2}{\sqrt{\omega}} - \frac{512b^5}{231a^5}\int\frac{dx}{\sqrt{\omega^3}}$$

$$32)\quad \int \frac{dx}{\sqrt{ax+bx^2}^5} = \left(-\frac{2}{3\omega} + \frac{16b}{3a^2}\right)\frac{2bx+a}{a^2\sqrt{\omega}}$$

$$33)\quad \int \frac{x\,dx}{\sqrt{ax+bx^2}^5} = \left\{\frac{1}{a+bx} - \frac{4(2bx+a)}{a^2}\right\}\frac{2}{3a\sqrt{\omega}}$$

$$34)\quad \int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{ax+bx^2}^5} = \left(\frac{x}{a+bx} + \frac{2x}{a}\right)\frac{2}{3a\sqrt{\omega}}$$

$$35)\quad \int \frac{x^3\,dx}{\sqrt{ax+bx^2}^5} = \frac{2x^3}{3a\omega\sqrt{\omega}}$$

$$36)\quad \int \frac{dx}{x\sqrt{ax+bx^2}^5} = -\frac{2}{5ax\omega\sqrt{\omega}} - \frac{8b}{5a}\int\frac{dx}{\sqrt{\omega^5}}$$

$$37)\quad \int \frac{dx}{x^2\sqrt{ax+bx^2}^5} = \left(-\frac{1}{7ax^2} + \frac{2b}{7a^2x}\right)\frac{2}{\omega\sqrt{\omega}}$$
$$+ \frac{16b^2}{7a^2}\int\frac{dx}{\sqrt{\omega^5}}$$

$$38)\quad \int \frac{dx}{x^3\sqrt{ax+bx^2}^5} = \left(-\frac{1}{9ax^3} + \frac{4b}{21a^2x^2} - \frac{8b^2}{21a^3x}\right)\frac{2}{\omega\sqrt{\omega}}$$
$$- \frac{64b^3}{21a^3}\int\frac{dx}{\sqrt{\omega^5}}$$

$$39)\quad \int dx\sqrt{ax+bx^2} = \left(\frac{x}{2} + \frac{a}{4b}\right)\sqrt{\omega} - \frac{a^2}{8b}\int\frac{dx}{\sqrt{\omega}}$$

$$40)\quad \int x\,dx\sqrt{ax+bx^2} = \frac{\omega\sqrt{\omega}}{3b} - \frac{a}{2b}\int dx\sqrt{\omega}$$

$$41)\quad \int x^2dx\sqrt{ax+bx^2} = \left(\frac{x}{4b} - \frac{5a}{24b^2}\right)\omega\sqrt{\omega} + \frac{5a^2}{16b^2}\int dx\sqrt{\omega}$$

$$42)\quad \int x^3dx\sqrt{ax+bx^2} = \left(\frac{x^2}{5b} - \frac{7ax}{40b^2} + \frac{7a^2}{48b^3}\right)\omega\sqrt{\omega}$$
$$- \frac{7a^3}{32b^3}\int dx\sqrt{\omega}$$

43) $$\int x^4\,dx\sqrt{ax+bx^2} = \left(\frac{x^3}{6b} - \frac{3ax^2}{20b^2} + \frac{21a^2x}{160b^3} - \frac{7a^3}{64b^4}\right)\omega\sqrt{\omega} + \frac{21a^4}{128b^4}\int dx\sqrt{\omega}$$

44) $$\int x^5\,dx\sqrt{ax+bx^2} = \left(\frac{x^4}{7b} - \frac{11ax^3}{84b^2} + \frac{33a^2x^2}{280b^3} - \frac{33a^3x}{320b^4} + \frac{11a^4}{128b^5}\right)\omega\sqrt{\omega} - \frac{33a^5}{256b^5}\int dx\sqrt{\omega}$$

45) $$\int\frac{dx}{x}\sqrt{ax+bx^2} = \sqrt{\omega} + \frac{a}{2}\int\frac{dx}{\sqrt{\omega}}$$

46) $$\int\frac{dx}{x^2}\sqrt{ax+bx^2} = -\frac{2\sqrt{\omega}}{x} + b\int\frac{dx}{\sqrt{\omega}}$$

47) $$\int\frac{dx}{x^3}\sqrt{ax+bx^2} = -\frac{2\omega\sqrt{\omega}}{3ax^3}$$

48) $$\int\frac{dx}{x^4}\sqrt{ax+bx^2} = \left(-\frac{1}{5ax^4} + \frac{2b}{15a^2x^3}\right)2\omega\sqrt{\omega}$$

49) $$\int\frac{dx}{x^5}\sqrt{ax+bx^2} = \left(-\frac{1}{7ax^5} + \frac{4b}{35a^2x^4} - \frac{8b^2}{105a^3x^3}\right)2\omega\sqrt{\omega}$$

50) $$\int dx\sqrt{ax+bx^2}^{\,3} = \left(\frac{\omega}{b} - \frac{3a^2}{8b^2}\right)\frac{2bx+a}{8}\sqrt{\omega} + \frac{3a^4}{128b^2}\int\frac{dx}{\sqrt{\omega}}$$

51) $$\int x\,dx\sqrt{ax+bx^2}^{\,3} = \frac{\omega^2\sqrt{\omega}}{5b} - \frac{a}{2b}\int dx\sqrt{\omega^3}$$

52) $$\int x^2\,dx\sqrt{ax+bx^2}^{\,3} = \left(\frac{x}{6b} - \frac{7a}{60b^2}\right)\omega^2\sqrt{\omega} + \frac{7a^2}{24b^2}\int dx\sqrt{\omega^3}$$

53) $$\int x^3\,dx\sqrt{ax+bx^2}^{\,3} = \left(\frac{x^2}{7b} - \frac{3ax}{28b^2} + \frac{3a^2}{40b^3}\right)\omega^2\sqrt{\omega} - \frac{3a^3}{16b^3}\int dx\sqrt{\omega^3}$$

54) $$\int x^4\,dx\sqrt{ax+bx^2}^{\,3} = \left(\frac{x^3}{8b} - \frac{11ax^2}{112b^2} + \frac{33a^2x}{448b^3} - \frac{33a^3}{640b^4}\right)\omega^2\sqrt{\omega} + \frac{33a^4}{256b^4}\int dx\sqrt{\omega^3}$$

55) $$\int x^5\,dx\sqrt{ax+bx^2}^{\,3} = \left(\frac{x^4}{9b} - \frac{13ax^3}{144b^2} + \frac{143a^2x^2}{2016b^3} - \frac{143a^3x}{2688b^4} + \frac{143a^4}{3840b^5}\right)\omega^2\sqrt{\omega} - \frac{143a^5}{1536b^5}\int dx\sqrt{\omega^3}$$

56) $$\int \frac{dx}{x}\sqrt{ax+bx^2}^{\,3} = \frac{\omega\sqrt{\omega}}{3} + \frac{a}{2}\int dx\sqrt{\omega}$$

57) $$\int \frac{dx}{x^2}\sqrt{ax+bx^2}^{\,3} = \frac{\omega\sqrt{\omega}}{2x} + \frac{3a}{4}\sqrt{\omega} + \frac{3a^2}{8}\int\frac{dx}{\sqrt{\omega}}$$

58) $$\int \frac{dx}{x^3}\sqrt{ax+bx^2}^{\,3} = \left(b - \frac{2a}{x}\right)\sqrt{\omega} + \frac{3ab}{2}\int\frac{dx}{\sqrt{\omega}}$$

59) $$\int \frac{dx}{x^4}\sqrt{ax+bx^2}^{\,3} = -\left(\frac{2a}{3x^2} + \frac{8b}{3x}\right)\sqrt{\omega} + b^2\int\frac{dx}{\sqrt{\omega}}$$

60) $$\int \frac{dx}{x^5}\sqrt{ax+bx^2}^{\,3} = -\frac{2(a+bx)^2\sqrt{\omega}}{5ax^3}$$

61) $$\int dx\sqrt{ax+bx^2}^{\,5} = \left(\frac{\omega^2}{b} - \frac{5a^2\omega}{16b^2} + \frac{15a^4}{128b^3}\right)\frac{2bx+a}{12}\sqrt{\omega} - \frac{5a^6}{1024b^3}\int\frac{dx}{\sqrt{\omega}}$$

62) $$\int x\,dx\sqrt{ax+bx^2}^{\,5} = \frac{\omega^3\sqrt{\omega}}{7b} - \frac{a}{2b}\int dx\sqrt{\omega^5}$$

63) $$\int x^2\,dx\sqrt{ax+bx^2}^{\,5} = \left(\frac{x}{8b} - \frac{9a}{112b^2}\right)\omega^3\sqrt{\omega} - \frac{11a^3}{32b^2}\int dx\sqrt{\omega^5}$$

64) $$\int x^3\,dx\sqrt{ax+bx^2}^{\,5} = \left(\frac{x^2}{9b} - \frac{11ax}{144b^2} + \frac{11a^2}{224b^3}\right)\omega^3\sqrt{\omega} - \frac{11a^3}{64b^3}\int dx\sqrt{\omega^5}$$

65) $$\int \frac{dx}{x}\sqrt{ax+bx^2}^{\,5} = \frac{\omega^2\sqrt{\omega}}{5} + \frac{a}{2}\int dx\sqrt{\omega^3}$$

66) $$\int \frac{dx}{x^2}\sqrt{ax+bx^2}^{\,5} = \left(\frac{\omega^2}{4x} + \frac{5a\omega}{24}\right)\sqrt{\omega} + \frac{5a^2}{16}\int dx\sqrt{\omega}$$

67) $$\int \frac{dx}{x^3}\sqrt{ax+bx^2}^{\,5} = \left(\frac{11a^2}{8} + \frac{13abx}{12} + \frac{5a^2}{8}\right)\sqrt{\omega} + \frac{5a^3}{16}\int\frac{dx}{\sqrt{\omega}}.$$

§. 82.

Sei $a x^{\varkappa} + b x^{\varkappa+n} = \omega.$

1) $\int x^m (a^{\varkappa} + b x^{\varkappa+n})^p \, dx$

$$= \frac{x^{m+1}\,\omega^p}{m+p\varkappa+1} - \frac{p\,n\,b}{m+p\varkappa+1}\int x^{m+\varkappa+n}\,\omega^{p-1}\,dx$$

$$= \frac{x^{m-\varkappa-n+1}\,\omega^{p+1}}{(m+p\varkappa+np+1)\,b} - \frac{(m+p\varkappa-n+1)\,a}{(m+p\varkappa+np+1)\,b}\int x^{m-1}\,\omega^p\,dx$$

$$= \frac{x^{m+1}\,\omega^p}{(m+p\varkappa+np+1)} + \frac{p\,n\,a}{m+p\varkappa+np+1}\int x^{m+\varkappa}\,\omega^{p-1}\,dx$$

2) $\int \frac{x^m\,dx}{(a x^{\varkappa} + b x^{\varkappa+n})^p}$

$$= -\frac{x^{m-\varkappa-n+1}}{(p-1)\,n\,b\,\omega^{p-1}} + \frac{m-p\varkappa-n+1}{(p-1)\,n\,b}\int \frac{x^{m-\varkappa-n}}{\omega^{p-1}}\,dx$$

$$= \frac{x^{m-\varkappa-n+1}}{(m-p\varkappa-np+1)\,b\,\omega^{p-1}} - \frac{(m-p\varkappa-n+1)\,a}{(m-p\varkappa-np+1)\,b}\int \frac{x^{m-n}}{\omega^p}\,dx$$

$$= \frac{x^{m-\varkappa+1}}{(p-1)\,n\,a\,\omega^{p-1}} - \frac{m+n-p\varkappa-np+1}{(p-1)\,n\,a}\int \frac{x^{n-\varkappa}}{\omega^{p-1}}\,dx$$

3) $\int \frac{(a x^{\varkappa} + b x^{\varkappa+n})^p}{x^m}\,dx$

$$= -\frac{\omega^p}{(m-p\varkappa-np-1)\,x^{m-1}} - \frac{p\,n\,a}{(m-p\varkappa-np-1)}\int \frac{dx\,\omega^{p-1}}{x^{m-\varkappa}}$$

$$= -\frac{\omega^{p-1}}{(m-p\varkappa-1)\,a\,x^{m+\varkappa-1}} - \frac{(m-n-p\varkappa-np-1)}{(m-p\varkappa-1)\,a}\int \frac{dx\,\omega^p}{x^{m-n}}$$

4) $\int \frac{dx}{x^m\,(a x^{\varkappa} + b x^{\varkappa+n})^p}$

$$= -\frac{1}{(m+p\varkappa-1)\,a\,x^{m+\varkappa-1}\,\omega^{p-1}} - \frac{(m-n+p\varkappa+np-1)\,b}{(m+p\varkappa-1)\,a}\int \frac{dx}{x^{m-n}\,\omega^p}$$

$$= \frac{1}{(p-1)\,n\,a\,x^{m+\varkappa-1}\,\omega^{p-1}} + \frac{m-n+p\varkappa+np-1}{(p-1)\,n\,a}\int \frac{dx}{x^{m+\varkappa}\,\omega^{p-1}}$$

5) $$\int \frac{dx}{(ax^{\varkappa}+bx^{\varkappa+n})^p}$$

$$=\frac{1}{(p-1)nax^{\varkappa-1}\omega^{p-1}}+\frac{p\varkappa+np-n-1}{(p-1)na}\int\frac{dx}{x^{\varkappa}\omega^{p-1}}$$

6) $$\int dx(ax^{\varkappa}+bx^{\varkappa+n})^p$$

$$=\frac{x\omega^p}{p\varkappa+np+1}+\frac{pna}{p\varkappa+np+1}\int x^{\varkappa}\omega^{p-1}dx.$$

§. 83.

Sei $u=a+bx, \quad v=\alpha+\beta x, \quad \Delta=a\beta-b\alpha,$

so wird:

1) $$\int\frac{u^n v^m}{\sqrt{u}}dx=\frac{2}{(2m+2n+1)\beta}v^{m+1}u^{n-1}\sqrt{u}$$
$$+\frac{(2n-1)\Delta}{(2m+2n+1)\beta}\int\frac{v^m u^{n-1}}{\sqrt{u}}dx$$

2) $$\int\frac{v^m}{u^n\sqrt{u}}dx=\frac{2}{(2n-1)\Delta}\frac{v^{m+1}}{u^n}\sqrt{u}-\frac{(2m-2n+3)\beta}{(2n-1)\Delta}$$
$$\int\frac{v^m}{u^{n-1}\sqrt{u}}dx$$
$$=-\frac{2}{(2n-1)b}\frac{v^m}{u^n}\sqrt{u}+\frac{2m\beta}{(2n-1)b}\int\frac{v^{m-1}}{u^{n-1}\sqrt{u}}dx$$

3) $$\int\frac{u^n}{v^m\sqrt{u}}dx=-\frac{2}{(2m-2n-1)\beta}\cdot\frac{u^{n-1}}{v^{m-1}}\sqrt{u}$$
$$-\frac{(2n-1)\Delta}{(2m-2n-1)\beta}\int\frac{u^{n-1}}{v^m\sqrt{u}}dx$$
$$=-\frac{1}{(m-1)\beta}\frac{u^{n-1}}{v^{m-1}}\sqrt{u}+\frac{(2n-1)\beta}{2(m-1)\beta}$$
$$\int\frac{u^{n-1}}{v^{m-1}\sqrt{u}}dx$$

4) $$\int \frac{dx}{u^n v^m \sqrt{u}} = \frac{2}{(2n-1)\Delta} \cdot \frac{\sqrt{u}}{v^{m-1} u^n} + \frac{(2m+2n-3)\beta}{(2n-1)\Delta} \int \frac{dx}{v^m u^{n-1} \sqrt{u}}$$

5) $$\int v^m \sqrt{u}\, dx = \frac{2}{(2m+3)\beta} v^{m+1} \sqrt{u} + \frac{\Delta}{(2m+3)\beta} \int \frac{v^m}{\sqrt{u}} dx$$

6) $$\int \frac{v^m}{\sqrt{u}} dx = \frac{2}{(2m+1)b} v^m \sqrt{u} - \frac{2m\Delta}{(2m+1)b} \int \frac{v^{m-1}}{\sqrt{u}} dx$$

7) $$\int \frac{1}{v^m \sqrt{u}} dx = -\frac{1}{(m-1)\Delta} \frac{\sqrt{u}}{v^{m-1}} - \frac{(2m-3)b}{2(m-1)\Delta} \int \frac{1}{v^{m-1}\sqrt{u}} dx.$$

§. 84.

Sei $a + bx + cx^2 = \omega$.

Es ist

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a+bx+cx^2}} = \frac{1}{2\sqrt{c}} \log \frac{b + 2cx + 2\sqrt{c\omega}}{b + 2cx - 2\sqrt{c\omega}}$$

für $c > 0$

$$= \frac{1}{\sqrt{-c}} \arcsin \frac{-(b+2cx)}{\sqrt{b^2 - 4ac}}$$

für $c < 0$

1) $$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{a+bx+cx^2}} = \frac{\sqrt{\omega}}{c} - \frac{b}{2c} \int \frac{dx}{\sqrt{\omega}}$$

2) $$\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{a+bx+cx^2}} = \left(\frac{x}{2c} - \frac{3b}{4c^2}\right)\sqrt{\omega} + \left(\frac{3b^2}{8c^2} - \frac{a}{2c}\right) \int \frac{dx}{\sqrt{\omega}}$$

3) $$\int \frac{x^3 dx}{\sqrt{a+bx+cx^2}} = \left(\frac{x^2}{3c} - \frac{5bx}{12c^2} + \frac{5b^2}{8c^3} - \frac{2a}{3c^2}\right)\sqrt{\omega} - \left(\frac{5b^3}{16e^3} - \frac{3ab}{4c^2}\right) \int \frac{dx}{\sqrt{\omega}}$$

4) $$\int \frac{x^4 dx}{\sqrt{a+bx+cx^2}} = \left\{\frac{x^3}{4c} - \frac{7bx^2}{24c^2} + x\left[\frac{35b^2}{96c^3} - \frac{3a}{8c^2}\right]x - \frac{35b^3}{64c^4} + \frac{55ab}{48c^3}\right\}\sqrt{\omega} + \left(\frac{35b^4}{128c^4} - \frac{15ab^2}{16c^3} + \frac{3a^2}{8c^2}\right) \int \frac{dx}{\sqrt{\omega}}$$

5) $$\int \frac{x^5\,dx}{\sqrt{a+bx+cx^2}} = \frac{x^4\sqrt{\omega}}{5c} - \frac{4a}{5c}\int\frac{x^3\,dx}{\sqrt{\omega}} - \frac{9b}{10c}\int\frac{x^4\,dx}{\sqrt{\omega}}$$

6) $$\int \frac{dx}{x\sqrt{a+bx+cx^2}} = -\frac{1}{\sqrt{a}}\log\frac{2a+bx+2\sqrt{a}\sqrt{\omega}}{x},\ a>1$$
$$= \frac{1}{\sqrt{-a}}\ arc\,tgn\ \frac{2a+bx}{2\sqrt{-a}.\sqrt{\omega}},\ a<1$$

7) $$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{a+bx+cx^2}} = -\frac{\sqrt{\omega}}{ax} - \frac{b}{2a}\int\frac{dx}{x\sqrt{\omega}}$$

8) $$\int \frac{dx}{x^3\sqrt{a+bx+cx^2}} = \left(-\frac{1}{2ax^2} + \frac{3b}{4a^2x}\right)\sqrt{\omega} + \left(\frac{3b^2}{8a^2} - \frac{c}{2a}\right)\int\frac{dx}{x\sqrt{\omega}}$$

9) $$\int \frac{dx}{x^4\sqrt{a+bx+cx^2}} = \left\{-\frac{1}{3ax^3} + \frac{5b}{12a^2x^2} - \left[\frac{5b^2}{8a^3} - \frac{2c}{3a^2}\right]\frac{1}{x}\right\}\sqrt{\omega} - \left(\frac{5b^3}{16a^3} - \frac{3bc}{4a^2}\right)\int\frac{dx}{x\sqrt{\omega}}$$

10) $$\int \frac{dx}{x^5\sqrt{a+bx+cx^2}} = \left\{-\frac{1}{4ax^4} + \frac{7b}{24a^2x^3} - \left(\frac{35b^2}{96a^3} - \frac{3c}{8a^2}\right)\frac{1}{x^2} + \left(\frac{35b^3}{64a^4} - \frac{55bc}{48a^3}\right)\frac{1}{x}\right\}\sqrt{\omega} + \left(\frac{35b^4}{128a^4} - \frac{15b^2c}{16a^3} + \frac{3c^2}{8a^2}\right)\int\frac{dx}{x\sqrt{\omega}}.$$

Sei $4ac - b^2 = \varkappa$.

11) $$\int \frac{dx}{\sqrt{a+bx+cx^2}^3} = \frac{2(2cx+b)}{\varkappa\sqrt{\omega}}$$

12) $$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{a+bx+cx^2}^3} = -\frac{2(2a+bx)}{\varkappa\sqrt{\omega}}$$

13) $$\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{a+bx+cx^2}^3} = -\frac{(4ac-2b^2)x-2ab}{c\varkappa\sqrt{\omega}} + \frac{1}{c}\int\frac{dx}{\sqrt{\omega}}$$

$$14)\quad \int \frac{x^3\,dx}{\sqrt{a+bx+cx^2}^3} = \frac{x^2}{c\sqrt{\omega}} - \frac{2a}{c}\int\frac{x\,dx}{\sqrt{\omega^3}} - \frac{3b}{2c}\int\frac{x^2\,dx}{\sqrt{\omega^3}}$$

$$15)\quad \int \frac{x^4\,dx}{\sqrt{a+bx+cx^2}^3} = \left(\frac{x^3}{2c} - \frac{5bx^2}{4c^2}\right)\frac{1}{\sqrt{\omega}} + \frac{5ab}{2c^2}\int\frac{x\,dx}{\sqrt{\omega^3}}$$
$$+\left(\frac{15b^2}{8c^2} - \frac{3a}{2c}\right)\int\frac{x^2\,dx}{\sqrt{\omega^3}}$$

$$16)\quad \int \frac{x^5\,dx}{\sqrt{a+bx+cx^2}^3} = \left\{\frac{x^4}{3c} - \frac{7bx^3}{12c^2} + \left(\frac{35b^2}{24c^3} - \frac{4a}{3c^2}\right)x\right\}\cdot$$
$$\frac{1}{\sqrt{\omega}} - \left(\frac{15ab^2}{12c^3} - \frac{8a^2}{3c^2}\right)\int\frac{x\,dx}{\sqrt{\omega^3}} - \left(\frac{35b^3}{16c^3} - \frac{15ab}{4c^2}\right)\int\frac{x^2\,dx}{\sqrt{\omega^3}}$$

$$17)\quad \int \frac{dx}{x\sqrt{a+bx+cx^2}^3} = \frac{1}{a\sqrt{\omega}} - \frac{b}{2a}\int\frac{dx}{\sqrt{\omega^3}} + \frac{1}{a}\int\frac{dx}{x\sqrt{\omega}}$$

$$18)\quad \int \frac{dx}{x^2\sqrt{a+bx+cx^2}^3} = \left(-\frac{1}{ax} - \frac{3b}{2a^2}\right)\frac{1}{\sqrt{\omega}}$$
$$+\left(\frac{3b^2}{4a^2} - \frac{2c}{a}\right)\int\frac{dx}{\sqrt{\omega^3}} - \frac{3b}{2a^2}\int\frac{dx}{x\sqrt{\omega}}$$

$$19)\quad \int \frac{dx}{x^3\sqrt{a+bx+cx^2}^3} = \left(-\frac{1}{2ax^2} + \frac{5b}{4a^2x}\right.$$
$$\left.+\frac{15b^2}{8a^3} - \frac{3c}{2a^2}\right)\frac{1}{\sqrt{\omega}} - \left(\frac{15b^3}{16a^3} - \frac{13bc}{4a^2}\right)\int\frac{dx}{\sqrt{\omega^3}}$$
$$+\left(\frac{15b^2}{8a^3} - \frac{3c}{2a^2}\right)\int\frac{dx}{x\sqrt{\omega}}$$

$$20)\quad \int \frac{dx}{x^4\sqrt{a+bx+cx^2}^3} = \left(-\frac{1}{3ax^3} + \frac{7b}{12a^2x^2}\right.$$
$$\left.-\left\{\frac{35b^2}{24a^3} - \frac{4c}{3a^2}\right\}\frac{1}{x} - \left(\frac{35b^3}{16a^4} - \frac{15bc}{4a^3}\right)\right)\int\frac{1}{\sqrt{\omega}}$$
$$+\left(\frac{35b^4}{32a^4} - \frac{115b^2c}{24a^3} + \frac{8c^2}{3a^2}\right)\int\frac{dx}{\sqrt{\omega^3}}$$
$$-\left(\frac{35b^3}{16a^4} - \frac{15bc}{4a^3}\right)\int\frac{dx}{x\sqrt{\omega}}$$

$$21)\quad \int \frac{dx}{x^5\sqrt{a+bx+cx^2}^3} = -\frac{1}{4ax^4\sqrt{\omega}} - \frac{9b}{8a}\int\frac{dx}{x^4\sqrt{\omega^3}}$$
$$-\frac{5c}{4a}\int\frac{dx}{x^3\sqrt{\omega^3}}$$

22) $$\int \frac{dx}{\sqrt{a+bx+cx^2}^5} = \left\{\frac{1}{3\varkappa\omega} + \frac{8c}{3\varkappa^2}\right\} \frac{2(2cx+b)}{\sqrt{\omega}}$$

23) $$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{a+bx+cx^2}^5} = -\frac{1}{3c\omega\sqrt{\omega}} - \frac{b}{2c}\int \frac{dx}{\sqrt{\omega^5}}$$

24) $$\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{a+bx+cx^2}^5} = \left(-\frac{x}{2c} + \frac{b}{12c^2}\right)\frac{1}{\omega\sqrt{\omega}} + \left(\frac{b^2}{8c^2} + \frac{a}{2c}\right)\int \frac{dx}{\sqrt{\omega^5}}$$

25) $$\int \frac{x^3\,dx}{\sqrt{a+bx+cx^2}^5} = \left(-\frac{x^2}{c} - \frac{bx}{4c^2} + \frac{b^2}{24c^3} - \frac{2a}{3c^2}\right)\frac{1}{\omega\sqrt{\omega}} + \left(\frac{b^3}{16c^3} - \frac{3ab}{4c^2}\right)\int \frac{dx}{\sqrt{\omega^5}}$$

26) $$\int \frac{dx}{x\sqrt{a+bx+cx^2}^5} = \left(\frac{1}{3a\omega} + \frac{1}{a^2}\right)\frac{1}{\sqrt{\omega}} - \frac{b}{2a}\int \frac{dx}{\sqrt{\omega^5}} + \frac{1}{a^2}\int \frac{dx}{x\sqrt{\omega}}$$

27) $$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{a+bx+cx^2}^5} = -\frac{1}{ax\omega\sqrt{\omega}} - \frac{5b}{2a}\int \frac{dx}{x\sqrt{\omega^5}} - \frac{4c}{a}\int \frac{dx}{\sqrt{\omega^5}}$$

28) $$\int \frac{dx}{x^3\sqrt{a+bx+cx^2}^5} = \left\{-\frac{1}{2ax^2} + \frac{7b}{4a^2x}\right\}\frac{1}{\omega\sqrt{\omega}} + \left(\frac{35b^2}{8a^2} - \frac{5c}{2a}\right)\int \frac{dx}{x\sqrt{\omega^5}} + \frac{7bc}{a}\int \frac{dx}{\sqrt{\omega^5}}$$

29) $$\int dx\sqrt{a+bx+cx^2} = \frac{(2cx+b)\sqrt{\omega}}{4c} + \frac{4ac-b^2}{8c}\int \frac{dx}{\sqrt{\omega}}$$

30) $$\int x\,dx\sqrt{a+bx+cx^2} = \frac{\omega\sqrt{\omega}}{3c} - \frac{b}{2c}\int dx\sqrt{\omega}$$

31) $$\int x^2\,dx\sqrt{a+bx+cx^2} = \left(\frac{x}{4c} - \frac{5b}{24c^2}\right)\omega\sqrt{\omega} + \left(\frac{5b^2}{16c^2} - \frac{a}{4c}\right)\int dx\sqrt{\omega}$$

$$32)\quad \int x^3 dx\sqrt{a+bx+cx^2} = \left(\frac{x^2}{5c} - \frac{7bx}{40c^2} + \frac{7b^2}{48c^3} - \frac{2a}{15c^2}\right)\omega\sqrt{\omega} - \left(\frac{7b^3}{32c^3} - \frac{3ab}{8c^2}\right)\int dx\sqrt{\omega}$$

$$33)\quad \int x^4 dx\sqrt{a+bx+cx^2} = \left\{\frac{x^3}{6c} - \frac{3bx^2}{20c^2} + \left(\frac{21b^2}{160c^3} - \frac{a}{8c^2}\right)x - \frac{7b^3}{64c^4} + \frac{49ab}{240c^3}\right\}\omega\sqrt{\omega} + \left(\frac{21b^4}{128c^4} - \frac{7ab^2}{16c^3} + \frac{a^2}{8c^2}\right)\int dx\sqrt{\omega}$$

$$34)\quad \int x^5 dx\sqrt{a+bx+cx^2} = \frac{x^4\omega\sqrt{\omega}}{7c} - \frac{4a}{7c}\int x^3 dx\sqrt{\omega} - \frac{11b}{14c}\int x^4 dx\sqrt{\omega}$$

$$35)\quad \int \frac{dx}{x}\sqrt{a+bx+cx^2} = \sqrt{\omega} + a\int\frac{dx}{x\sqrt{\omega}} + \frac{b}{2}\int\frac{dx}{\sqrt{\omega}}$$

$$36)\quad \int \frac{dx}{x^2}\sqrt{a+bx+cx^2} = -\frac{\sqrt{\omega}}{x} + \frac{b}{2}\int\frac{dx}{x\sqrt{\omega}} + c\int\frac{dx}{\sqrt{\omega}}$$

$$37)\quad \int \frac{dx}{x^3}\sqrt{a+bx+cx^2} = -\left(\frac{1}{2x^2} + \frac{b}{4ax}\right)\sqrt{\omega} - \left(\frac{b^2}{8a} - \frac{c}{2}\right)\int\frac{dx}{x\sqrt{\omega}}$$

$$38)\quad \int \frac{dx}{x^4}\sqrt{a+bx+cx^2} = -\frac{\omega\sqrt{\omega}}{3ax^3} + \left(\frac{b}{4ax^2} + \frac{b^2}{8a^2x}\right)\sqrt{\omega} + \left(\frac{b^3}{16a^2} - \frac{bc}{4a}\right)\int\frac{dx}{x\sqrt{\omega}}$$

$$39)\quad \int \frac{dx}{x^5}\sqrt{a+bx+cx^2} = \left(-\frac{1}{4ax^4} + \frac{5b}{24a^2x^3}\right)\omega\sqrt{\omega} - \left\{\left(\frac{5b^2}{32a^2} - \frac{c}{8a}\right)\frac{1}{x^2} + \left(\frac{5b^3}{64a^3} - \frac{bc}{16a^2}\right)\frac{1}{x}\right\}\sqrt{\omega} - \left\{\frac{5b^4}{128a^3} - \frac{3b^2c}{16a^2} + \frac{c^2}{8a}\right\}\int\frac{dx}{x\sqrt{\omega}}$$

$$40)\quad \int dx\sqrt{a+bx+cx^2}^3 = \left(\frac{\omega}{8c} + \frac{3\varkappa}{64c^2}\right)(2cx+b)\sqrt{\omega} + \frac{3\varkappa^2}{128c^2}\int\frac{dx}{\sqrt{\omega}}$$

41) $\int x\,dx\sqrt{a+bx+cx^2}^3 = \frac{\omega\sqrt{\omega}}{5c} - \frac{b}{2c}\int dx\sqrt{\omega^3}$

42) $\int x^2dx\sqrt{a+bx+cx^2}^3 = \left(\frac{x}{6c} - \frac{7b}{60c^2}\right)\omega^2\sqrt{\omega}$
$$+ \left(\frac{7b^2}{24c^2} - \frac{a}{6c}\right)\int dx\sqrt{\omega^3}$$

43) $\int x^3dx\sqrt{a+bx+cx^2}^3 = \left(\frac{x^2}{7c} - \frac{3bx}{28c^2} + \frac{3b^2}{40c^3}\right.$
$$\left. - \frac{2a}{35c^2}\right)\omega^2\sqrt{\omega} - \left(\frac{3b^3}{16c^3} - \frac{ab}{4c^2}\right)\int dx\sqrt{\omega^3}$$

44) $\int x^4dx\sqrt{a+bx+cx^2}^3 = \left\{\frac{x^3}{8c} - \frac{11bx^2}{112c^2} + \left(\frac{33b^2}{448c^3}\right.\right.$
$$\left.\left. - \frac{a}{16c^2}\right)x - \frac{33b^3}{640c^4} + \frac{93ab}{1120c^3}\right\}\omega^2\sqrt{\omega}$$
$$+ \left\{\frac{33b^4}{256c^4} - \frac{9ab^2}{32c^3} + \frac{a^2}{16c^2}\right\}\int dx\sqrt{\omega^3}$$

45) $\int x^5dx\sqrt{a+bx+cx^2}^3 = \frac{x^4\omega^2\sqrt{\omega}}{9c} - \frac{4a}{9c}\int x^3dx\sqrt{\omega^3}$
$$- \frac{13b}{18c}\int x^4dx\sqrt{\omega^3}$$

46) $\int \frac{dx}{x}\sqrt{a+bx+cx^2}^3 = \left(\frac{\omega}{3} + a\right)\sqrt{\omega} + a^2\int\frac{dx}{\omega\sqrt{\omega}}$
$$+ \frac{ab}{2}\int\frac{dx}{\sqrt{\omega}} + \frac{b}{2}\int dx\sqrt{\omega}$$

47) $\int \frac{dx}{x^2}\sqrt{a+bx+cx^2}^3 = -\frac{\omega^2\sqrt{\omega}}{ax} + \frac{3b}{2a}\int\frac{dx}{x}\sqrt{\omega^3}$
$$+ \frac{4c}{a}\int dx\sqrt{\omega^3}$$

48) $\int \frac{dx}{x^3}\sqrt{a+bx+cx^2}^3 = \left(-\frac{1}{2ax^2} - \frac{b}{4a^2x}\right)\omega^2\sqrt{\omega}$
$$+ \left(\frac{3b^2}{8a^2} + \frac{3c}{2a}\right)\int\frac{dx}{x}\sqrt{\omega^3} + \frac{bc}{a^2}\int dx\sqrt{\omega^3}$$

49) $$\int \frac{dx}{x^4}\sqrt{a+bx+cx^2}^3 = \left\{-\frac{1}{3ax^3}+\frac{b}{12a^2x^2}\right.$$
$$\left.+\left(\frac{b^2}{24a^3}-\frac{2c}{3a^2}\right)\frac{1}{x}\right\}\omega^2\sqrt{\omega}-\left(\frac{b^3}{16a^3}-\frac{3bc}{4a^2}\right)\int\frac{dx}{x}\sqrt{\omega^3}$$
$$-\left(\frac{b^2c}{6a^3}-\frac{8c^2}{3a^2}\right)\int dx\sqrt{\omega^3}$$

50) $$\int \frac{dx}{x^5}\sqrt{a+bx+cx^2}^3 = \left\{-\frac{1}{4ax^4}+\frac{b}{8a^2x^3}\right.$$
$$\left.-\left(\frac{b^2}{32a^3}+\frac{c}{8a^2}\right)\frac{1}{x^2}-\left(\frac{b^3}{64a^4}-\frac{3bc}{16a^3}\right)\frac{1}{x}\right\}\omega^2\sqrt{\omega}$$
$$+\left(\frac{3b^4}{128a^4}-\frac{3b^2c}{16a^3}+\frac{3c^2}{8a^2}\right)\int\frac{dx}{x}\sqrt{\omega^3}$$
$$+\left(\frac{b^3c}{16a^4}-\frac{3bc^2}{4a^3}\right)\int dx\sqrt{\omega^3}$$

51) $$\int dx\sqrt{a+bx+cx^2}^5 = \left(\frac{\omega^2}{12c}+\frac{5\varkappa\omega}{192c^2}+\frac{5\varkappa^2}{512c^3}\right)$$
$$(2cx+b)\sqrt{\omega}+\frac{5\varkappa^3}{1024c^3}\int\frac{dx}{\sqrt{\omega}}$$

52) $$\int x\,dx\sqrt{a+bx+cx^2}^5 = \frac{\omega^3\sqrt{\omega}}{7c}-\frac{b}{2c}\int dx\sqrt{\omega^5}$$

53) $$\int x^2dx\sqrt{a+bx+cx^2}^5 = \left(\frac{x}{8c}-\frac{9b}{112c^2}\right)\omega^3\sqrt{\omega}$$
$$+\left(\frac{9b^2}{32c^2}-\frac{a}{8c}\right)\int dx\sqrt{\omega^5}$$

54) $$\int x^3dx\sqrt{a+bx+cx^2}^5 = \left(\frac{x^2}{9c}-\frac{11bx}{144c^2}+\frac{11b^2}{224c^3}\right.$$
$$\left.-\frac{2a}{63c^2}\right)\omega^3\sqrt{\omega}-\left(\frac{11b^3}{64c^3}-\frac{3ab}{16c^2}\right)\int dx\sqrt{\omega^5}$$

55) $$\int\frac{dx}{x}\sqrt{a+bx+cx^2}^5 = \left(\frac{\omega^2}{5}+\frac{a\omega}{3}+a^2\right)\sqrt{\omega}$$
$$+a^3\int\frac{dx}{x\sqrt{\omega}}+\frac{a^2b}{2}\int\frac{dx}{\sqrt{\omega}}+\frac{ab}{2}\int dx\sqrt{\omega}$$
$$+\frac{b}{2}\int dx\sqrt{\omega^3}$$

56) $$\int \frac{dx}{x^2}\sqrt{a+bx+cx^2}^5 = -\frac{\omega^3\sqrt{\omega}}{ax} + \frac{5b}{2a}\int\frac{dx}{x}\sqrt{\omega^5} + \frac{6c}{a}\int dx\sqrt{\omega^5}$$

57) $$\int \frac{dx}{x^3}\sqrt{a+bx+cx^2}^5 = \left(-\frac{1}{2ax^2} - \frac{3b}{4a^2x}\right)\omega^3\sqrt{\omega} + \left(\frac{15b^2}{8a^2} + \frac{5c}{2a}\right)\int\frac{dx}{x}\sqrt{\omega^5} + \frac{9bc}{2a^2}\int dx\sqrt{\omega^5}.$$

§. 85.

Sei $u = a + bx + cx^2$, $v = \alpha + \beta x$,

$A = a\beta^2 - b\beta\alpha + c\alpha^2$, $B = b\beta - 2c\alpha$.

1) $$\int \frac{u^n}{v^m\sqrt{u}}\,dx = -\frac{\beta}{(m-1)A}\frac{u^n}{v^{m-1}}\sqrt{u} - \frac{(2m-2n-3)B}{2(m-1)A}\int\frac{u^n}{v^{m-1}\sqrt{u}}\,dx - \frac{(m-2n-2)c}{(m-1)A}\int\frac{u^n}{v^{m-2}\sqrt{u}}\,dx$$

$$= -\frac{1}{(m-2n)\beta}\frac{u^{n-1}}{v^{m-1}}\sqrt{u} - \frac{(2n-1)A}{(m-2n)\beta^2}\int\frac{u^{n-1}}{v^m\sqrt{u}}\,dx - \frac{(2n-1)B}{2(m-2n)\beta^2}\int\frac{u^{n-1}}{v^{m-1}\sqrt{u}}\,dx$$

$$= -\frac{1}{(m-1)\beta}\frac{u^{n-1}}{v^{m-1}}\sqrt{u} + \frac{(2n-1)B}{2(m-1)\beta^2}\int\frac{u^{n-1}}{v^{m-1}\sqrt{u}}\,dx + \frac{(2n-1)c}{(m-1)\beta^2}\int\frac{u^{n-1}}{v^{m-2}\sqrt{u}}\,dx$$

2) $$\int \frac{dx}{v^m u^n \sqrt{u}} = -\frac{\beta}{(m-1)A}\frac{\sqrt{u}}{v^{m-1}u^n} - \frac{(2m+2n-3)B}{2(m-1)A}\cdot \int \frac{dx}{v^{m-1}u^n\sqrt{u}} - \frac{(m+2n-2)c}{(m-1)A}\cdot \int \frac{dx}{v^{m-2}u^n\sqrt{u}}$$

$$= \frac{\beta}{(2n-1)A}\frac{\sqrt{u}}{v^{m-1}u^n} - \frac{B}{2A}\int \frac{dx}{v^{m-1}u^n\sqrt{u}} + \frac{(m+2n-2)\beta^2}{(2n-1)A}\int \frac{dx}{v^m u^{n-1}\sqrt{u}}$$

Ist $A = 0$, so wird

3) $$\int \frac{dx}{v^m u^n \sqrt{u}} = -\frac{2\beta}{(2m+2n-1)B}\frac{\sqrt{u}}{v^m u^n} - \frac{2(m+2n-1)c}{(2m+2n-1)B}\int \frac{dx}{v^{m-1}u^n\sqrt{u}}$$

4) $$\int v^m \sqrt{u}\,dx = \frac{\beta}{(m+2)c} v^{m-1}u\sqrt{u} - \frac{(2m+1)B}{2(m+2)c}\cdot \int v^{m-1}\sqrt{u}\,dx - \frac{(m-1)A}{(m+2)c}\int v^{m-2}\sqrt{u}\,dx$$

5) $$\int \frac{\sqrt{u}}{v^m}\,dx = -\frac{\beta}{(m-1)A}\frac{u\sqrt{u}}{v^{m-1}} - \frac{(2m-5)B}{2(m-1)A}\int \frac{\sqrt{u}}{v^{m-1}}\,dx - \frac{(m-4)c}{(m-1)A}\int \frac{\sqrt{u}}{v^{m-2}}\,dx$$

6) $$\int \frac{v^m}{\sqrt{u}}\,dx = \frac{\beta}{mc} v^{m-1}\sqrt{u} - \frac{(2m-1)B}{2mc}\int \frac{v^{m-1}}{\sqrt{u}}\,dx - \frac{(m-1)A}{mc}\int \frac{v^{m-2}}{\sqrt{u}}\,dx$$

7) $$\int \frac{dx}{v^m\sqrt{u}} = -\frac{\beta}{(m-1)A}\frac{\sqrt{u}}{v^{m-1}} - \frac{(2m-3)B}{2(m-1)A}\int \frac{dx}{v^{m-1}\sqrt{u}} - \frac{(m-2)c}{(m-1)A}\int \frac{dx}{v^{m-2}\sqrt{u}}$$

Ist $A = 0$, so wird:

8) $$\int \frac{dx}{v^m\sqrt{u}} = -\frac{2\beta}{(2m-1)B}\frac{\sqrt{u}}{v^{m-1}} - \frac{2(m-1)c}{(2m-1)B}\int \frac{dx}{v^{m-1}\sqrt{u}}$$

§. 86.

Integrale von der Form

$$\int \frac{dx}{(\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \cdots)\sqrt{a + bx + cx^2}}.$$

1) $J = \int \dfrac{dx}{(x+p)\sqrt{a + 2bx + cx^2}}$

$m^2 = a - 2bp + cp^2, \quad n = 2bp - a - cp^2,$

I. $a + cp^2 > 2bp, \quad J = -\dfrac{1}{m} \log \left\{ \dfrac{\sqrt{a + 2bx + cx^2} + m}{x+p} + \dfrac{b - cp}{m} \right\}$

II. $a + cp^2 < 2bp, \quad J = \dfrac{1}{m} \arcsin \dfrac{(b - cp)(x+p) + m^2}{(x+p)\sqrt{b^2 - ac}}$

III. $a + cp^2 = 2bp, \quad J = -\dfrac{\sqrt{a + 2bx + cx^2}}{(b - cp)(x+p)}$

2) $\int \dfrac{dx}{(x+p)\sqrt{1 - x^2}}$

$$= -\frac{1}{\sqrt{1-p^2}} \log \left\{ \frac{1 + px + \sqrt{1-p^2}\sqrt{1-x^2}}{x+p} \right\}, p^2 < 1$$

$$= \frac{1}{\sqrt{p^2 - 1}} \arcsin \frac{1+x}{x+p}, \quad p^2 > 1$$

3) $\int \dfrac{dx}{(x+p)\sqrt{x^2 - 1}}$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-p^2}} \arccos \frac{1+px}{x+p}, \quad p^2 < 1$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{p^2-1}} \log \frac{1 + px + \sqrt{p^2-1}\sqrt{x^2-1}}{x+p}, \; p^2 > 1$$

4) $\int \dfrac{dx}{(x \pm p)\sqrt{1 + x^2}}$

$$= \frac{1}{\sqrt{1+p^2}} \log \frac{x \pm p - \sqrt{1+x^2} + \sqrt{1+p^2}}{x \pm p - \sqrt{1+x^2} - \sqrt{1+p^2}}$$

5) $\int \frac{dx}{(x-p)\sqrt{1-x^2}}$

$$= -\frac{1}{\sqrt{1-p^2}} \log \left\{ \frac{1-px+\sqrt{1-p^2}\sqrt{1-x^2}}{x-p} \right\}, \ p^2 < 1$$

$$= \frac{1}{\sqrt{p^2-1}} \arcsin \frac{1-px}{x-p}, \quad p^2 > 1$$

6) $\int \frac{dx}{(x-p)\sqrt{x^2-1}}$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-p^2}} \arccos \frac{1-px}{x-p}, \quad p^2 < 1$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{p^2-1}} \log \frac{1-px+\sqrt{p^2-1}\sqrt{x^2-1}}{x-p}, \ p^2 > 1$$

7) $\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{1-x^2}} = -\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$

8) $\int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{1-x^2}} = -\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$

9) $\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2-1}} = \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$

10) $\int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2-1}} = -\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$

11) $\int \frac{dx}{(1+x)\sqrt{1+x^2}} = -\frac{1}{2\sqrt{2}} \log \frac{1-x+\sqrt{2(1+x^2)}}{1-x-\sqrt{2(1+x^2)}}$

12) $\int \frac{dx}{(1-x)\sqrt{1+x^2}} = -\frac{1}{2\sqrt{2}} \log \frac{1+x-\sqrt{2(1+x^2)}}{1+x+\sqrt{2(1+x^2)}}$

Um das Integral

13) $\int \frac{dx}{(\alpha+\beta x+\gamma x^2+\cdots)\sqrt{a+2bx+cx^2}}$

zu bestimmen, zerlege man

$$\frac{1}{\alpha+\beta x+\gamma x^2+\cdots}$$

in Partialbrüche und bediene sich der vorhergehenden oder der nachfolgenden Integrale.

14) Sei

$$\sqrt{a - cp^2 - 2bpi} = \alpha + \beta i$$

$$\frac{b - cpi}{\sqrt{a - cp^2 - 2bpi}} = \gamma + \delta i \qquad i = \sqrt{-1}$$

$$\frac{x\sqrt{a + 2bx + cx^2} + \alpha x + \beta p}{x^2 + p^2} + \gamma = \varrho \cos \varphi$$

$$\frac{-p\sqrt{a + 2bx + cx^2} - \alpha p + \beta x}{x^2 + p^2} + \delta = \varrho \sin \varphi,$$

so wird

$$\int \frac{dx}{(x+pi)\sqrt{a+2bx+cx^2}} = \frac{-\alpha+\beta i}{\alpha^2+\beta^2} \log \{\varrho(\cos\varphi + i \sin\varphi)\}$$

15) $$\int \frac{dx}{(x^2 + p^2)\sqrt{a + 2bx + cx^2}}$$

$$= \frac{1}{(\alpha^2 + \beta^2)p} \{\alpha\varphi - \beta \log \varrho\}, \quad p^2 < 1$$

$$= -\frac{1}{\alpha^2 + \beta^2} \{\beta\varphi + \alpha \log \varrho\}, \quad p^2 > 1$$

16) $$\int \frac{dx}{(x^2 - p^2)\sqrt{1 - x^2}}$$

$$= \frac{1}{p\sqrt{1 - p^2}} \log \frac{p\sqrt{1 - x^2}\sqrt{1 - p^2}}{\sqrt{x^2 - p^2}}, \quad p^2 < 1$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{p^2 - 1}} \arcsin \frac{2px\sqrt{p^2 - 1}\sqrt{1 - x^2}}{\sqrt{x^2 - p^2}}, \quad p^2 > 1$$

17) $$\int \frac{dx}{(x^2 - p^2)\sqrt{x^2 - 1}}$$

$$= \frac{1}{2p\sqrt{1 - p^2}} \arccos \frac{x^2(1 - p^2) - p^2(x^2 - 1)}{(1 - p^2) + (x^2 - 1)}, \quad p^2 < 1$$

$$= \frac{1}{p\sqrt{p^2 - 1}} \log \frac{x\sqrt{x^2 - 1} - p\sqrt{x^2 - 1}}{\sqrt{x^2 - p^2}}, \quad p^2 > 1$$

18) $$\int \frac{dx}{(x^2 - p^2)\sqrt{1 + x^2}}$$

$$= \frac{1}{2p\sqrt{1 + p^2}} \log \frac{(x - \sqrt{1 + x^2})^2 - (p - \sqrt{1 + p^2})^2}{(x - \sqrt{1 + x^2})^2 - (p + \sqrt{1 + p^2})^2}$$

19) $$\int \frac{dx}{(x^2+p^2)\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{p\sqrt{1+p^2}} \operatorname{arc\,tgn} \frac{p\sqrt{1-x^2}}{x\sqrt{1+p^2}}$$

20) $$\int \frac{dx}{(x^2+p^2)\sqrt{x^2-1}}$$
$$= -\frac{1}{p\sqrt{1+p^2}} \log \frac{x\sqrt{p^2+1}-p\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{p^2+x^2}}$$

21) $$\int \frac{dx}{(x^2+p^2)\sqrt{1+x^2}}$$
$$= \frac{1}{p\sqrt{1-p^2}} \operatorname{arc\,tgn} \frac{p\sqrt{1-p^2}}{p^2+x^2-x\sqrt{1+x^2}}, \quad p^2<1$$
$$= -\frac{1}{2p\sqrt{p^2-1}} \log \frac{\{x-\sqrt{1+x^2}\}^2+\{p-\sqrt{p^2-1}\}^2}{\{x-\sqrt{1+x^2}\}^2+\{p+\sqrt{p^2-1}\}^2}, \; p^2>1$$

22) $$\int \frac{x\,dx}{(x^2+p^2)\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{2\sqrt{1+p^2}} \log \frac{\sqrt{1+p^2}+\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1+p^2}-\sqrt{1-x^2}}$$

23) $$\int \frac{x\,dx}{(x^2+p^2)\sqrt{x^2-1}} = \frac{1}{\sqrt{1+p^2}} \operatorname{arc\,tgn} \frac{\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{1+p^2}}$$

24) $$\int \frac{dx}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}} = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

25) $$\int \frac{x\,dx}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

26) $$\int \frac{dx}{(x^2-1)\sqrt{x^2-1}} = -\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$$

27) $$\int \frac{dx}{(x^2-1)\sqrt{1-x^2}} = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

28) $$\int \frac{dx}{(x^2+1)\sqrt{x^2-1}} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \log \frac{x\sqrt{2}-\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^2+1}}$$

§. 87.

Trigonometrische Integrale.

1) $\int FR(\sin x, \cos x)\, dx.$

Setze $tgn\, \frac{x}{2} = z$, also $\sin x = \frac{2z}{1+z^2}$, $\cos x = \frac{1-z^2}{1+z^2}$,

$$dx = \frac{2\,dz}{1+z^2},\quad tgn\, x = \frac{2z}{1-z^2},\quad cotg\, x = \frac{1-z^2}{2z}.$$

2) $\int \frac{\sin x\, FR(\sin^2 x)}{\sqrt{1-\varkappa^2 \sin^2 x}}\, dx$, $(\sin^2 x = z) = \int \frac{FR(z)\, dz}{2\sqrt{(1-z)(1-\varkappa^2 z)}}$

Dieselbe Substitution giebt:

3) $\int \frac{\cos x\, FR(\cos^2 x)}{\sqrt{1-\varkappa^2 \sin^2 x}}\, dx = \int \frac{FR(1-z)\, dz}{2\sqrt{z\,(1-\varkappa^2 z)}}$

4) $\int \frac{tgn\, x\, FR(tgn^2 x)}{\sqrt{1-\varkappa^2 \sin^2 x}}\, dx = \int \frac{FR\left(\frac{z}{1-z}\right) dz}{2(1-z)\sqrt{1-\varkappa^2 z}}$

5) Sei $a < b$ und $a = b\cos\alpha$, so folgt:

$$\int \frac{dx}{a + b\cos x} = \frac{1}{b\sin\alpha} \log \frac{\cos\frac{1}{2}(\alpha - x)}{\cos\frac{1}{2}(\alpha + x)}$$

$$\int \frac{dx}{a - b\cos x} = \frac{1}{b\sin\alpha} \log \frac{\sin\frac{1}{2}(\alpha - x)}{\sin\frac{1}{2}(\alpha + x)}$$

Sei $b < a$, $b = a\cos\beta$,

$$\int \frac{dx}{a + b\cos x} = \frac{2}{a\sin\beta}\, arctg\, \{tgn\tfrac{1}{2}\beta\, tgn\tfrac{1}{2}x\}$$

$$\int \frac{dx}{a - b\cos x} = \frac{2}{a\sin\beta}\, arctg\, \{cotg\tfrac{1}{2}\beta\, tgn\tfrac{1}{2}x\}$$

6) $\int \frac{\cos x\, dx}{a \pm b\cos x} = \pm\frac{x}{b} \mp \frac{a}{b}\int \frac{dx}{a \pm b\cos x}$

7) $\int \frac{dx}{1+\cos x} = tgn\, \frac{x}{2}$

$$\int \frac{dx}{1-\cos x} = -\, cotgn\, \frac{x}{2}$$

8) Ist $a > b$ und $b = a \sin \alpha$, so wird

$$\int \frac{dx}{a \pm b \sin x} = \pm \frac{2}{\cos \alpha} \operatorname{arctgn} \left\{ \operatorname{tgn}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right) \operatorname{tgn}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right) \right\}$$

Ist $b > a$, $a = b \sin \alpha$, so wird

$$\int \frac{dx}{a + b \sin x} = \frac{1}{\cos \alpha} \log \frac{\sin \frac{1}{2}(x + \alpha)}{\cos \frac{1}{2}(x - \alpha)}$$

$$\int \frac{dx}{a - b \sin x} = -\frac{1}{\cos \alpha} \log \frac{\sin \frac{1}{2}(\alpha - x)}{\cos \frac{1}{2}(\alpha + x)}$$

9) Sei $a < b$, $b \cos \alpha = a$,

$$\int \frac{dx}{a^2 - b^2 \cos^2 x} = \frac{1}{2ab \sin \alpha} \log \frac{\sin(\alpha - x)}{\sin(\alpha + x)}.$$

$$b < a, \quad b = a \cos \beta,$$

$$\int \frac{dx}{a^2 - b^2 \cos^2 x} = \frac{1}{a^2 \sin \beta} \operatorname{arctgn} \frac{\operatorname{tgn} x}{\sin \beta}$$

10) $$\int \frac{\alpha + \beta \cos x}{(a + b \cos x)^2} dx = \frac{a\beta - b\alpha}{a^2 - b^2} \frac{\sin x}{a + b \cos x} + \frac{a\alpha - b\beta}{a^2 - b^2} \int \frac{dx}{a + b \cos x}$$

11) $$(n-1)(1-c^2) \int \frac{dx}{(1 + c \cos x)^n} = -\frac{c \sin x}{(1 + c \cos x)^{n-1}} + (2n-3) \int \frac{dx}{(1 + c \cos x)^{n-1}} - (n-2) \int \frac{dx}{(1 + c \cos x)^{n-2}}$$

12) $$\int \frac{dx}{\sin x + \cos x} = \frac{1}{\sqrt{2}} \log \operatorname{tgn}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{8}\right)$$

13) $$\int \frac{\sin^2 x \, dx}{a + b \cos^2 x} = \frac{\sqrt{a+b}}{b\sqrt{a}} \operatorname{arctgn} \frac{\sqrt{a} \operatorname{tgn} x}{\sqrt{a+b}} - \frac{x}{b}$$

14) $$\int \frac{x + \sin x}{1 + \cos x} dx = x \operatorname{tgn} \frac{x}{2}$$

15) Ist $a^2 < b^2 + c^2$, so ist:

$$J = \int \frac{dx}{a + b \cos x + c \sin x} = \frac{1}{\sqrt{b^2 + c^2 - a^2}} \cdot \log \frac{\sqrt{b^2 + c^2 - a^2} - c + (b - a) \operatorname{tgn} \frac{x}{2}}{\sqrt{b^2 + c^2 - a^2} + c - (b - a) \operatorname{tgn} \frac{x}{2}}$$

Ist $a^2 = b^2 + c^2$,

$$J = \frac{1}{c + (a - b)\,tgn\,\frac{x}{2}}$$

Ist $a^2 > b^2 + c^2$,

$$J = \frac{2}{\sqrt{a^2 - b^2 - c^2}}\,arc\,tgn\,\frac{c + (a - b)\,tgn\,\frac{x}{2}}{\sqrt{a^2 - b^2 - c^2}}$$

Ist $a = b$,

$$J = \frac{1}{c}\log\left(a + c\,tgn\,\frac{x}{2}\right)$$

16) $$\int \frac{(\cos x + a)\,dx}{\sin x + b\cos x + c} = \cos\varphi\,\{y + \cot g\,\varphi\,.\log[\sin y + c\cos\varphi]\} + \left(\frac{a}{\sin\varphi} - c\cos\varphi\right)\int\frac{dy}{\sin y + c\cos\varphi},$$

wenn

$$b = tgn\,\varphi \quad \text{und} \quad x + \varphi = y$$

gesetzt wird.

17) $$\int \frac{dx}{(a + b\cos x)^n} = \frac{A\sin x}{(a + b\cos x)^{n-1}} + \int \frac{B + C\cos x}{(a + b\cos x)^{n-1}}\,dx$$

$$A = \frac{1}{n-1}\,\frac{b}{b^2 - a^2},\quad B = \frac{a}{a^2 - b^2},\quad C = \frac{n-2}{n-1}\,\frac{b}{b^2 - a^2}$$

18) Sei $1 + \sqrt{-1}\,tgn\,n x = u^n$, so wird:

$$\int \frac{(\cos x + \sqrt{-1}\sin x)}{\sqrt[n]{\cos n x}}\,dx = -\sqrt{-1}\int\frac{du}{2 - u^n}$$

19) Sei $\cos x + \sqrt{-1}\sin x = z$, so wird:

$$\int \frac{\cos p x + \sqrt{-1}\sin p x}{\cos n x}\,dx = \frac{2}{\sqrt{-1}}\int\frac{z^{p+n}\,dz}{z(1 + z^{2n})}$$

20) Sei $\cos x + \sqrt{-1}\sin x = z$, so wird

$$\int \frac{\cos p x + \sqrt{-1}\sin p x}{\sin n x}\,dx = \int\frac{z^{p+n-1}\,dz}{1 - z^{2n}}$$

21) Sei

$$A = \frac{a\alpha - b\beta}{a^2 - b^2},\quad B = \frac{n-2}{n-1}\cdot\frac{a\beta - \alpha b}{a^2 - b^2},\quad C = \frac{1}{n-1}\cdot\frac{a\beta - b\alpha}{a^2 - b^2}$$

so wird:

$$\int \frac{\alpha + \beta \cos x}{(a + b \cos x)^n} dx = \frac{C \sin x}{(a + b \cos x)^{n-1}} + \int \frac{A + B \cos x}{(a + b \cos x)^{n-1}} dx$$

22) Sei

$$A = \frac{\beta}{n+1}, \; B = a\alpha + \frac{n}{n+1} b\beta, \; C = b\alpha + \frac{n}{n+1} a\beta,$$

so wird

$$\int (a + b \cos x)^n (\alpha + \beta \cos x) dx = A \sin x (a + b \cos x)^n + \int (A + B \cos x)(a + b \cos x)^{n-1} dx$$

23) $$\int \frac{\alpha + \beta \cos x}{\sin x (a + b \cos x)} dx = \frac{b\alpha - a\beta}{a^2 - b^2} \log (a + b \cos x) - \frac{\alpha - \beta}{a - b} \log \cos \frac{x}{2} + \frac{\alpha + \beta}{a + b} \log \sin \frac{x}{2}$$

24) $$\int \frac{\alpha + \beta \cos x}{\cos x (a + b \cos x)} dx = \frac{\alpha}{a} \log tgn \left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right) + \frac{a\beta - b\alpha}{a} \int \frac{dx}{a + b \cos \alpha}.$$

25) Das Integral

$$\int \frac{dx}{(a + b \cos x + c \sin x)^n}$$

geht durch die Substitution $b = r \cos \alpha$, $c = r \sin \alpha$ in

$$\int \frac{dx}{[a + r \cos (x - \alpha)]^n}$$

über.

§. 88.

Sinus-Integrale.

1) $$\int \sin (px + q) dx = -\frac{1}{p} \cos (px + q)$$

2) $$\int \sin^{2n} x \, dx = \frac{1}{2^{2n}} \binom{2n}{n} x + \frac{(-1)^n}{2^{2n-1}} \sum_0^{n-1} {}^{\varkappa} (-1)^{\varkappa} \binom{2n}{\varkappa} \frac{\sin (2n - 2\varkappa) x}{2n - 2\varkappa}$$

3) $$\int sin^{2n+1} x\, dx = \frac{1}{2^{2n}}(-1)^{n+1} \sum_0^n{}^{\varkappa} (-1)^{\varkappa} \binom{2n+1}{\varkappa} \frac{cos(2n+1-2\varkappa)x}{2n+1-2\varkappa}$$

In den letzten beiden Formeln ist n positiv und ganz.

4) $$\int f(sin\, x)\, dx = \int \frac{f(z)\, dz}{\sqrt{1-z^2}},$$ wenn $z = sin\, x$ gesetzt wird.

5) $$\int sin^n x\, dx = -\frac{sin^{n-1} x \cos x}{n} + \frac{n-1}{n}\int sin^{n-2} x\, dx$$

6) $$\int \frac{dx}{sin^n x} = -\frac{cos\, x}{(n-1) sin^{n-1} x} + \frac{n-2}{n-1}\int \frac{dx}{sin^{n-2} x}$$

7) $$\int \frac{sin\, m x}{sin^n x}\, dx = 2\int \frac{cos\,(m-1)\, x}{sin^{n-1} x}\, dx + \int \frac{sin\,(m-2) x}{sin^n x}\, dx$$

8) $$\int x^n sin\, x\, dx = -x^n cos\, x + n\int x^{n-1} cos\, x\, dx$$
$$= -x^n cos\, x + n x^{n-1} sin\, x - n(n-1)\int x^{n-2} sin\, x\, dx$$

9) $$\int \frac{sin\, x\, dx}{x^n} = -\frac{sin\, x}{(n-1) x^{n-1}} + \frac{1}{n-1}\int \frac{cos\, x}{x^{n-1}}\, dx$$
$$= -\frac{sin\, x}{(n-1) x^{n-1}} - \frac{cos\, x}{(n-1)(n-2) x^{n-2}} - \frac{1}{(n-1)(n-2)}\int \frac{sin\, x}{x^{n-2}}\, dx$$

10) $$\int \frac{x\, dx}{sin^n x} = -\frac{sin\, x + (n-2) x \cos x}{(n-2)(n-1) sin^{n-1} x} + \frac{n-2}{n-1}\int \frac{x\, dx}{sin^{n-2} x}$$

11) $$n^2 \int x^m sin^n x\, dx = x^{m-1} sin^{n-1} x \{m\, sin\, x - n\, x\, cos\, x\}$$
$$+ n(n-1)\int x^m sin^{n-2} x\, dx - m(m-1)\int x^{m-2} sin^n x\, dx$$

12) $$(n-1)(n-2)\int \frac{x^m}{sin^n x}\, dx = -\frac{x^{m-1}}{sin^{n-1} x}\{m\, sin\, x$$
$$+ (n-x)\, x\, cos\, x\} + (n-2)^2 \int \frac{x^m}{sin^{n-2} x} + m(m-1)\int \frac{x^{m-2}}{sin^{n-2} x}\, dx$$

13) $$\int \frac{sin^n x}{x^m}\, dx = -\frac{sin^{n-1} x}{x^{m-1}}\left\{\frac{(m-2)\, sin\, x + n\, x\, cos\, x}{(m-1)(m-2)}\right\}$$
$$- n^2 \int \frac{sin^n x}{x^{m-2}}\, dx + n(n-1)\int \frac{sin^{n-2} x}{x^{m-2}}\, dx$$

14) $\int \sin px \sin qx\, dx = \frac{\sin(p-q)x}{2(p-q)} - \frac{\sin(p+q)x}{2(p+q)}$

15) $\int \sin ax \sin bx \sin cx\, dx = -\frac{1}{4}\left\{\frac{\cos(a-b+c)x}{a-b+c}\right.$

$\left. + \frac{\cos(-a+b+c)x}{-a+b+c} + \frac{\cos(a+b-c)x}{a+b-c} - \frac{\cos(a+b+c)x}{a+b+c}\right\}$

16) $\int \sin^2 x\, dx = -\frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{2}x$

17) $\int \sin^3 x\, dx = \frac{1}{12}\cos 3x - \frac{3}{4}\cos x$

18) $\int \sin^4 x\, dx = \frac{1}{32}\sin 4x - \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{3}{8}x$

19) $\int \sin^5 x\, dx = -\frac{1}{80}\cos 5x + \frac{5}{48}\cos 3x - \frac{5}{8}\cos x$

20) $\int \frac{dx}{\sin x} = \log tgn \frac{x}{2}$

21) $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\cot g\, x$

22) $\int \frac{dx}{\sin^3 x} = -\frac{1}{2}\cdot\frac{\cos x}{\sin^2 x} + \frac{1}{2}\log tgn \frac{x}{2}$

23) $\int \frac{dx}{\sin^4 x} = -\frac{1}{3}\cdot\frac{\cos x}{\sin^3 x} - \frac{2}{3}\cot g\, x$

24) $\int \frac{dx}{\sin^5 x} = -\frac{1}{4}\cdot\frac{\cos x}{\sin^4 x} - \frac{3}{8}\,\frac{\cos x}{\sin^2 x} + \frac{3}{8}\log tgn \frac{x}{2}$

25) $\int x \sin x\, dx = \sin x - x\cos x$

26) $\int x^2 \sin x\, dx = 2x\sin x - (x^2 - 2)\cos x$

27) $\int x^3 \sin x\, dx = (3x^2 - 6)\sin x - (x^3 - 6x)\cos x$

28) $\int x^4 \sin x\, dx = (4x^3 - 24x)\sin x - (x^4 - 12x^2 + 24)\cos x$

29) $\int x^5 \sin x\, dx = (5x^4 - 60x^2 + 120)\sin x - (x^5 - 20x^3 + 120x)\cos x$

30) $\int \frac{\sin x}{x}\, dx$ vide: Sinus-Integral.

31) $\int \frac{\sin x}{x^2} dx = -\frac{\sin x}{x} + \int \frac{\cos x}{x} dx$

32) $\int \frac{\sin x}{x^3} dx = -\frac{\sin x}{2x^2} - \frac{\cos x}{2x} - \frac{1}{2}\int \frac{\sin x}{x} dx$

33) $\int \frac{\sin x}{x^4} dx = -\frac{\sin x}{3x^3} - \frac{\cos x}{6x^2} + \frac{\sin x}{6x} - \frac{1}{6}\int \frac{\cos x}{x} dx$

34) $\int \frac{\sin x}{x^5} dx = -\frac{\sin x}{4x^4} - \frac{\cos x}{12x^3} + \frac{\sin x}{24x^2} + \frac{\cos x}{24x} + \frac{1}{24}\int \frac{\sin x}{x} dx$

35) $\int \frac{x}{\sin x} dx$. Nur durch Reihen darstellbar.

36) $\int \frac{x}{\sin^2 x} dx = x \operatorname{cotg} x + \log \sin x$

37) $\int \frac{x}{\sin^3 x} dx = -\frac{\sin x + x\cos x}{2\sin^2 x} + \frac{1}{2}\int \frac{x}{\sin x} dx$

38) $\int \frac{x}{\sin^4 x} dx = -\frac{\sin x + 2x\cos x}{6\sin^3 x} - \frac{2}{3}\left\{x \operatorname{cotg} x - \log \sin x\right\}$

39) $\int \frac{x}{\sin^5 x} dx = -\frac{\sin x + 3x\cos x}{12\sin^4 x} - \frac{3(\sin x + x\cos x)}{8\sin^2 x} + \frac{3}{8}\int \frac{x\,dx}{\sin x}$

Siehe auch „Sinus-Cosinus-Integrale“.

§. 89.

Cosinus-Integrale.

1) $\int \cos(px+q)\,dx = \frac{1}{p}\sin(px+q)$

2) $\int \cos^{2n} x\,dx = \frac{1}{2^{2n}}\binom{2n}{n} x + \frac{1}{2^{2n-1}}\sum_{0}^{n-1}{}_{\varkappa} \binom{2n}{\varkappa}\frac{\sin(2n-2\varkappa)x}{2n-2\varkappa}$

$$3)\quad \int cos^{2n+1} x\, dx = \frac{1}{2^{2n}} \sum_{0}^{n} {}_{\varkappa} \binom{2n+1}{\varkappa} \frac{sin\,(2n+1-2\varkappa)\,x}{2n+1-2\varkappa}$$

In den beiden letzten Formeln ist n positiv und ganz.

$$4)\quad \int f(cos\, x)\, dx = -\int \frac{f(x_1)\, dx_1}{\sqrt{1-x_1^2}}, \quad cos\, x = x_1$$

$$5)\quad \int cos^n x\, dx = \frac{sin\, x\, cos^{n-1} x}{n} + \frac{n-1}{n} \int cos^{n-2} x\, dx$$

$$6)\quad \int \frac{dx}{cos^n x} = \frac{sin\, x}{(n-1)\, cos^{n-1} x} + \frac{n-2}{n-1} \int \frac{dx}{cos^{n-2} x}$$

$$7)\quad \int \frac{cos\, m x}{cos^n x}\, dx = \sum_{0}^{\leqq \frac{1}{2} m} {}_{\varkappa} (-1)^{\varkappa} \frac{m}{m-\varkappa}\, 2^{m-2\varkappa-1} \binom{m-\varkappa}{\varkappa} \int cos^{m-2\varkappa-n} x\, dx$$

$$8)\quad \int x^n cos\, x\, dx = x^n sin\, x - n \int x^{n-1} sin\, x\, dx$$
$$= x^n sin\, x + n x^{n-1} cos\, x - n(n-1) \int x^{n-2} cos\, x\, dx$$

$$9)\quad \int \frac{cos\, x\, dx}{x^n} = -\frac{cos\, x}{(n-1)\, x^{n-1}} - \frac{1}{n-1} \int \frac{sin\, x}{x^{n-1}}\, dx$$
$$= -\frac{cos\, x}{(n-1)\, x^{n-1}} + \frac{sin\, x}{(n-1)(n-2)\, x^{n-2}} - \frac{1}{(n-1)(n-2)} \int \frac{cos\, x}{x^{n-2}}\, dx$$

$$10)\quad \int \frac{x}{cos^n x}\, dx = \frac{(n-2)\, x\, sin\, x - cos\, x}{(n-2)(n-1)\, cos^{n-1} x} + \frac{n-2}{n-1} \int \frac{x\, dx}{cos^{n-2} x}$$

$$11)\quad n^2 \int x^m cos^n x\, dx = x^{m-1} cos^{n-1} x\, \{m\, cos\, x + n\, x\, sin\, x\}$$
$$+ n(n-1) \int x^m cos^{n-2} x\, dx - m(m-1) \int x^{m-2} cos^n x\, dx$$

$$12)\quad (n-1)(n-2) \int \frac{x^m}{cos^n x}\, dx = -\frac{x^{m-1}}{cos^{n-1} x} \{m\, cos\, x$$
$$- (n-2)\, x\, sin\, x\} + (n-2)^2 \int \frac{x^m}{cos^{n-2} x}\, dx + m(m-1) \int \frac{x^{m-2}}{cos^{n-2} x}\, dx$$

$$13)\quad \int \frac{\cos^n x}{x^m}\,dx = -\frac{\cos^{n-1} x}{x^{m-1}}\frac{\{(m-2)\cos x - n x \cos x\}}{(m-1)(m-2)}$$
$$-n^2\int\frac{\cos^n x}{x^{m-2}}\,dx + n(n-1)\int\frac{\cos^{n-2} x}{x^{m-2}}\,dx$$

$$14)\quad \int \cos p x \cos q x\,dx = \frac{\sin(p+q)x}{2(p+q)} + \frac{\sin(p-q)x}{2(p-q)}$$

$$15)\quad \int \cos a x \cos b x \cos c x\,dx = \frac{1}{4}\left\{\frac{\sin(a+b+c)x}{a+b+c}\right.$$
$$\left.+\frac{\sin(-a+b+c)x}{-a+b+c}+\frac{\sin(a-b+c)x}{a-b+c}+\frac{\sin(a+b-c)x}{a+b-c}\right\}$$

$$16)\quad \int \frac{\cos^m x}{\cos n x}\,dx = \frac{1}{n}\sum_0^{n-1}{}^{\varkappa}(-1)^{\varkappa}\left\{\cos\frac{(2\varkappa+1)}{2n}\pi\right\}^m$$
$$\log\frac{\sin\left\{\frac{2\varkappa+1}{4n}\pi+\frac{x}{2}\right\}}{\sin\left\{\frac{2\varkappa+1}{4n}\pi-\frac{x}{2}\right\}}$$

$$17)\quad \int \cos^2 x\,dx = \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{x}{2}$$

$$18)\quad \int \cos^3 x\,dx = \frac{1}{12}\sin 3x + \frac{3}{4}\sin x$$

$$19)\quad \int \cos^4 x\,dx = \frac{1}{32}\sin 4x + \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{3}{8}x$$

$$20)\quad \int \cos^5 x\,dx = \frac{1}{80}\sin 5x + \frac{5}{48}\sin 3x + \frac{5}{8}\sin x$$

$$21)\quad \int \frac{dx}{\cos x} = \log tgn\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right) = \log\sqrt{\frac{1+\sin x}{1-\sin x}}$$

$$22)\quad \int \frac{dx}{\cos^2 x} = tgn\, x$$

$$23)\quad \int \frac{dx}{\cos^3 x} = \frac{1}{2}\frac{\sin x}{\cos^2 x} + \frac{1}{2}\log tgn\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)$$

$$24)\quad \int \frac{dx}{\cos^4 x} = \frac{1}{3}\frac{\sin x}{\cos^3 x} + \frac{2}{3}tgn\, x = tgn\, x + \frac{1}{3}tgn^3 x$$

$$25)\quad \int \frac{dx}{\cos^5 x} = \frac{1}{4}\frac{\sin x}{\cos^4 x} + \frac{3}{8}\frac{\sin x}{\cos^2 x} + \frac{3}{8}\log tgn\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2}\right)$$

26) $\int x\cos x\,dx = \cos x + x\sin x$

27) $\int x^2\cos x\,dx = 2x\cos x + (x^2 - 2)\sin x$

28) $\int x^3\cos x\,dx = (3x^2 - 6)\cos x + (x^3 - 6)\sin x$

29) $\int x^4\cos x\,dx = (4x^3 - 24x)\cos x + (x^4 - 12x^2 + 24)\sin x$

30) $\int x^5\cos x\,dx = (5x^4 - 60x^2 + 120)\cos x + (x^5 - 20x^3 + 120x)\sin x$

31) $\int \frac{\cos x}{x}\,dx =$ vide Cosinus-Integral.

32) $\int \frac{\cos x}{x^2}\,dx = -\frac{\cos x}{x} - \int \frac{\sin x}{x}\,dx$

33) $\int \frac{\cos x}{x^3}\,dx = -\frac{\cos x}{2x^2} + \frac{\sin x}{2x} - \frac{1}{2}\int \frac{\cos x}{x}\,dx$

34) $\int \frac{\cos x}{x^4}\,dx = -\frac{\cos x}{3x^3} + \frac{\sin x}{6x^2} + \frac{\cos x}{6x} + \frac{1}{6}\int \frac{\sin x}{x}\,dx$

35) $\int \frac{\cos x}{x^5}\,dx = -\frac{\cos x}{4x^4} + \frac{\sin x}{12x^3} + \frac{\cos x}{24x^2} - \frac{\sin x}{24x} + \frac{1}{24}\int \frac{\cos x}{x}\,dx$

36) $\int \frac{x\,dx}{\cos x}$. Nur durch Reihen darstellbar.

37) $\int \frac{x}{\cos^2 x}\,dx = x\,tg\,x + \log\cos x$

38) $\int \frac{x}{\cos^3 x}\,dx = \frac{x\sin x - \cos x}{2\cos^2 x} + \frac{1}{2}\int \frac{x}{\cos x}\,dx$

39) $\int \frac{x}{\cos^4 x}\,dx = \frac{2x\sin x - \cos x}{6\cos^3 x} + \frac{2}{3}(x\,tg\,x + \log\cos x)$

40) $\int \frac{x}{\cos^5 x}\,dx = \frac{3x\sin x - \cos x}{12\cos^4 x} + \frac{3(x\sin x - \cos x)}{8\cos^2 x} + \frac{3}{8}\int \frac{x\,dx}{\cos x}$.

Siehe auch: „Sinus-Cosinus-Integrale“.

§. 90.

Sinus-Cosinus-Integrale.

1) $$\int \sin(px)\cos(qx)\,dx = -\frac{\cos(p+q)x}{2(p+q)} + \frac{\cos(p-q)x}{2(p-q)}$$

2) $$\int \sin(ax)\cos(bx)\cos(cx)\,dx = -\frac{1}{4}\left\{\frac{\cos(a+b+c)x}{a+b+c} - \frac{\cos(-a+b+c)x}{-a+b+c} + \frac{\cos(a+b-c)x}{a+b-c} + \frac{\cos(a-b+c)}{a-b+c}\right\}$$

3) $$\int \cos(ax)\sin(bx)\sin(cx)\,dx = \frac{1}{4}\left\{\frac{\sin(a+b-c)x}{a+b-c} + \frac{\sin(a-b+c)x}{a-b+c} - \frac{\sin(a+b+c)x}{a+b+c} - \frac{\sin(-a+b+c)x}{-a+b+c}\right\}$$

4) $$\int \sin^m x\cos^n x\,dx = -\frac{\sin^{m-1}x\cos^{n+1}x}{n+1} + \frac{m-1}{n+1}\cdot\int \sin^{m-2}x\cos^{n+2}x\,dx$$

$$= -\frac{\sin^{m-1}\cos^{n+1}x}{m+n} + \frac{m-1}{m+n}\cdot\int \sin^{m-2}x\cos^n x\,dx$$

$$= \frac{\sin^{m+1}x\cos^{n-1}x}{m+n} + \frac{n-1}{m+n}\cdot\int \sin^m x\cos^{n-2}x\,dx$$

$$= \frac{\sin^{m-1}x\cos^{n-1}x}{m+n}\left\{\sin^2 x - \frac{m-1}{m+n-2}\right\} + \frac{(m-1)(n-1)}{(m+n)(m+n-2)}\int \sin^{m-2}x\cos^{n-2}x\,dx$$

5) $$\int \frac{dx}{\sin^m x\cos^n x} = -\frac{1}{(m-1)\sin^{m-1}x\cos^{n-1}x} + \frac{m+n-2}{m-1}\cdot\int \frac{dx}{\sin^{m-2}x\cos^n x}$$

$$= \frac{1}{(n-1)\sin^{m-1}x\cos^{n-1}x} + \frac{m+n-2}{n-1}\int \frac{dx}{\sin^m x\cos^{n-2}x}$$

6) $$\int \frac{\sin^m x}{\cos^n x}\, dx = -\frac{1}{m-n}\,\frac{\sin^{m-1} x}{\cos^{n-1} x} + \frac{m-1}{m-n}\int \frac{\sin^{m-2} x}{\cos^n x}\, dx$$
$$= \frac{1}{n-1}\,\frac{\sin^{m+1} x}{\cos^{n-1} x} - \frac{m-n+2}{n-1}\int \frac{\sin^m x}{\cos^{n-2} x}\, dx$$
$$= \frac{1}{n-1}\,\frac{\sin^{m-1} x}{\cos^{n-1} x} - \frac{m-1}{n-1}\int \frac{\sin^{m-2} x}{\cos^{m-2} x}\, dx$$

7) $$\int \frac{\cos^n x}{\sin^m x}\, dx = -\frac{1}{m-n}\,\frac{\cos^{n-1} x}{\sin^{m-1} x} - \frac{n-1}{m-n}\int \frac{\cos^{n-2} x}{\sin^m x}\, dx$$
$$= -\frac{1}{m-1}\,\frac{\cos^{n+1} x}{\sin^{m-1} x} + \frac{m-n-2}{m-1}\int \frac{\cos^n x}{\sin^{m-2} x}\, dx$$
$$= -\frac{1}{m-1}\,\frac{\cos^{n-1} x}{\sin^{m-1} x} - \frac{n-1}{m-1}\int \frac{\cos^{n-2} x}{\sin^{m-2} x}\, dx$$

8) $$\int \frac{\cos n x}{\sin^p x}\, dx = -2\int \frac{\sin \overline{n-1}\, x\, dx}{\sin^{p-1} x} + \int \frac{\cos \overline{n-2}\, x\, dx}{\sin^p x}$$

9) $$\int \frac{\sin n x}{\cos^p x}\, dx = 2\int \frac{\sin \overline{n-1}\, x\, dx}{\cos^{p-1} x} - \int \frac{\sin \overline{n-2}\, x\, dx}{\cos^p x}$$

10) $$\int \frac{\cos^{2m} x}{\sin 2 n x}\, dx = \frac{1}{2n}\sum_{1}^{n-1}{}_{\varkappa} (-1)^{\varkappa}\left(\cos \frac{\varkappa\pi}{2n}\right)^{2m}$$
$$\log\left(1 - \frac{\left(\sin \frac{\varkappa\pi}{n}\right)^2}{\sin^2 x}\right)$$

11) $$\int \frac{\cos^{2m+1} x}{\sin 2 n x}\, dx = \frac{1}{2n}\sum_{1}^{n-1}{}_{\varkappa} (-1)^{\varkappa}\left(\cos \frac{\varkappa\pi}{2n}\right)^{2m+1}$$
$$\left\{\log tgn\left(\frac{x}{2} - \frac{\varkappa\pi}{4n}\right) + \log tgn\left(\frac{x}{2} + \frac{\varkappa\pi}{4n}\right) - 2\cos\frac{\varkappa\pi}{2n}\log tgn\frac{x}{2}\right\}$$

12) $$\int \frac{\cos^{2m} x}{\sin (2n+1) x}\, dx = \frac{1}{2n+1}\sum_{1}^{n}{}_{\varkappa} (-1)^{\varkappa}\left(\cos \frac{\varkappa\pi}{2n+1}\right)^{2m}$$
$$\left\{\log tgn\left(\frac{x}{2} - \frac{\varkappa\pi}{4n+2}\right) + \log tgn\left(\frac{x}{2} + \frac{\varkappa\pi}{4n+2}\right)\right.$$
$$\left. - 2\cos\frac{\varkappa\pi}{2n+1}\log tgn\frac{x}{2}\right\}$$

13) $$\int \frac{\cos^{2m+1} x}{\sin (2n+1) x}\, dx = \frac{1}{2n+1}\sum_{1}^{n}{}_{\varkappa} (-1)^{\varkappa}\left(\cos \frac{\varkappa\pi}{2n+1}\right)^{2m+1}$$
$$\log\left(1 - \frac{\left(\sin \frac{\varkappa\pi}{2n+1}\right)^2}{\sin^2 x}\right)$$

Setzt man in den letzten vier Formeln $\frac{\pi}{2} - x$ an die Stelle von x, so erhält man ganz analoge Ausdrücke, welche im Zähler die Potenz von $\sin x$ enthalten.

Dabei sind m und n positive und ganze Zahlen.

$$14)\quad \int x^p \sin^m x \cos^n x\, dx = x^{p-1} \sin^m x \cos^{n-1} x \frac{p\cos x + (m+n) x \sin x}{(m+n)^2} + \frac{n-1}{m+n}\int x^p \sin^m x \cos^{n-2} x\, dx - \frac{mp}{(m+n)^2}\int x^{p-1}\sin^{m-1} x \cos^{n-1} x\, dx - \frac{p(p-1)}{(m+n)^2}\int x^{p-2}\sin^m x \cos^n x\, dx$$

$$15)\quad \int x^p \sin^m x \cos^n x\, dx = x^{p-1}\sin^{m-1} x \cos^{n-1} x \frac{p \sin x - (m+n) x \cos x}{(m+n)^2} + \frac{m-1}{m+n}\int x^p \sin^{m-2} x \cos^n x\, dx + \frac{np}{(m+n)^2}\int x^{p-1}\sin^{m-1} x\cos^{n-1} x\, dx - \frac{p(p-1)}{m+n}\int x^{p-2}\sin^m x \cos^n x\, dx$$

$$16)\quad \int \cos^m x \sin nx\, dx = -\frac{\cos^m x \cos nx}{m+n} + \frac{m}{m+n}\int \cos^{m-1} x \sin(n-1)x\, dx$$

$$17)\quad \int \cos^m x \cos nx\, dx = \frac{\cos^m x \sin nx}{m+n} + \frac{m}{m+n}\int \cos^{m-1} x \cos(n-1)x\, dx$$

$$18)\quad \int d\varphi \sin\varphi \cos^n\varphi = -\frac{1}{n+1}\cos^{n-1}\varphi$$

$$19)\quad \int d\varphi \cos\varphi \sin^n\varphi = \frac{1}{n+1}\sin^{n+1}\varphi$$

$$20)\quad \int d\varphi \sin^2\varphi \cos\varphi = -\frac{1}{4}\left\{\frac{1}{3}\sin 3\varphi - \sin\varphi\right\}$$

21) $\int d\varphi \sin^2\varphi \cos^2\varphi = -\frac{1}{8}\left(\frac{1}{4}\sin 4\varphi - \varphi\right)$

22) $\int d\varphi \sin^2\varphi \cos^3\varphi = -\frac{1}{16}\left(\frac{1}{5}\sin 5\varphi + \frac{1}{3}\sin 3\varphi - 2\sin\varphi\right)$

23) $\int d\varphi \sin^2\varphi \cos^4\varphi = -\frac{1}{32}\left(\frac{1}{6}\sin 6\varphi + \frac{1}{2}\sin 4\varphi - \frac{1}{2}\sin 2\varphi - 2\varphi\right)$

24) $\int d\varphi \sin^2\varphi \cos^5\varphi = -\frac{1}{64}\left(\frac{1}{7}\sin 7\varphi + \frac{3}{5}\sin 5\varphi + \frac{1}{3}\sin 3\varphi - 5\sin\varphi\right)$

25) $\int d\varphi \sin^3\varphi \cos\varphi = \frac{1}{8}\left(\frac{1}{4}\cos 4\varphi - \cos 2\varphi\right)$

26) $\int d\varphi \sin^3\varphi \cos^2\varphi = \frac{1}{16}\left(\frac{1}{5}\cos 5\varphi - \frac{1}{3}\cos 3\varphi - 2\cos\varphi\right)$

27) $\int d\varphi \sin^3\varphi \cos^3\varphi = \frac{1}{32}\left(\frac{1}{6}\cos 6\varphi - \frac{3}{2}\cos 2\varphi\right)$

28) $\int d\varphi \sin^3\varphi \cos^4\varphi = \frac{1}{64}\left(\frac{1}{7}\cos 7\varphi + \frac{1}{5}\cos 5\varphi - \cos 3\varphi - 3\cos\varphi\right)$

29) $\int d\varphi \sin^3\varphi \cos^5\varphi = \frac{1}{128}\left(\frac{1}{8}\cos 8\varphi + \frac{1}{3}\cos 6\varphi - \frac{1}{2}\cos 4\varphi - 3\cos 2\varphi\right)$

30) $\int d\varphi \sin^4\varphi \cos\varphi = \frac{1}{16}\left(\frac{1}{5}\sin 5\varphi - \sin 3\varphi + 2\sin\varphi\right)$

31) $\int d\varphi \sin^4\varphi \cos^2\varphi = \frac{1}{32}\left(\frac{1}{6}\sin 6\varphi - \frac{1}{2}\sin 4\varphi - \frac{1}{2}\sin 2\varphi + 2\varphi\right)$

32) $\int d\varphi \sin^4\varphi \cos^3\varphi = \frac{1}{64}\left(\frac{1}{7}\sin 7\varphi - \frac{1}{5}\sin 5\varphi - \sin 3\varphi + 3\sin\varphi\right)$

33) $$\int d\varphi \sin^4\varphi \cos^4\varphi = \frac{1}{128}\left(\frac{1}{8}\sin 8\varphi - \sin 4\varphi + 3\varphi\right)$$

34) $$\int d\varphi \sin^4\varphi \cos^5\varphi = \frac{1}{256}\left(\frac{1}{9}\sin 9\varphi + \frac{1}{7}\sin 7\varphi - \frac{4}{5}\sin 5\varphi - \frac{4}{3}\sin 3\varphi + 6\sin\varphi\right)$$

35) $$\int d\varphi \sin^5\varphi \cos\varphi = -\frac{1}{32}\left(\frac{1}{6}\cos 6\varphi - \cos 4\varphi + \frac{5}{2}\cos 2\varphi\right)$$

36) $$\int d\varphi \sin^5\varphi \cos^2\varphi = -\frac{1}{64}\left(\frac{1}{7}\cos 7\varphi - \frac{3}{5}\cos 5\varphi + \frac{1}{3}\cos 3\varphi + 5\cos\varphi\right)$$

37) $$\int d\varphi \sin^5\varphi \cos^3\varphi = -\frac{1}{128}\left(\frac{1}{8}\cos 8\varphi - \frac{1}{3}\cos 6\varphi - \frac{1}{2}\cos 4\varphi + 3\cos 2\varphi\right)$$

38) $$\int d\varphi \sin^5\varphi \cos^4\varphi = -\frac{1}{256}\left(\frac{1}{9}\cos 9\varphi - \frac{1}{7}\cos 7\varphi - \frac{4}{5}\cos 5\varphi + \frac{4}{5}\cos 3\varphi + 6\cos\varphi\right)$$

39) $$\int d\varphi \sin^5\varphi \cos^5\varphi = -\frac{1}{512}\left(\frac{1}{10}\cos 10\varphi - \frac{5}{6}\cos 6\varphi + 5\cos 2\varphi\right)$$

40) $$\int d\varphi \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi} = -\log\cos\varphi$$

41) $$\int d\varphi \frac{\sin^2\varphi}{\cos\varphi} = -\sin\varphi + \int\frac{d\varphi}{\cos\varphi}$$

42) $$\int d\varphi \frac{\sin^3\varphi}{\cos\varphi} = -\frac{\sin^2\varphi}{2} - \log\cos\varphi$$

43) $$\int d\varphi \frac{\sin^4\varphi}{\cos\varphi} = -\frac{\sin^3\varphi}{3} - \sin\varphi + \int\frac{d\varphi}{\cos\varphi}$$

44) $$\int d\varphi \frac{\sin^5\varphi}{\cos\varphi} = -\frac{\sin^4\varphi}{4} - \frac{\sin^2\varphi}{2} - \log\cos\varphi$$

45) $\int d\varphi \frac{\cos\varphi}{\sin\varphi} = \log\sin\varphi$

46) $\int d\varphi \frac{\cos^2\varphi}{\sin\varphi} = \cos\varphi + \int \frac{d\varphi}{\sin\varphi}$

47) $\int d\varphi \frac{\cos^3\varphi}{\sin\varphi} = \frac{\cos^2\varphi}{2} + \log\sin\varphi$

48) $\int d\varphi \frac{\cos^4\varphi}{\sin\varphi} = \frac{\cos^3\varphi}{3} + \cos\varphi + \int \frac{d\varphi}{\sin\varphi}$

49) $\int d\varphi \frac{\cos^5\varphi}{\sin\varphi} = \frac{\cos^4\varphi}{4} + \frac{\cos^2\varphi}{2} + \log\sin\varphi$

50) $\int d\varphi \frac{\sin\varphi}{\cos^2\varphi} = \frac{1}{\cos\varphi}$

51) $\int d\varphi \frac{\sin^2\varphi}{\cos^2\varphi} = tgn\,\varphi - \varphi$

52) $\int d\varphi \frac{\sin^3\varphi}{\cos^2\varphi} = \cos\varphi + \frac{1}{\cos\varphi}$

53) $\int d\varphi \frac{\sin^4\varphi}{\cos^2\varphi} = \left(-\frac{1}{2}\sin^3\varphi - \frac{3}{2}\sin\varphi\right)\frac{1}{\cos\varphi} - \frac{3}{2}\varphi$

54) $\int d\varphi \frac{\sin^5\varphi}{\cos^2\varphi} = \left(-\frac{1}{3}\sin^4\varphi - \frac{4}{3}\sin^2\varphi + \frac{8}{3}\right)\frac{1}{\cos\varphi}$

55) $\int d\varphi \frac{\cos\varphi}{\sin^2\varphi} = -\frac{1}{\sin\varphi}$

56) $\int d\varphi \frac{\cos^2\varphi}{\sin^2\varphi} = -cotgn\,\varphi - \varphi$

57) $\int d\varphi \frac{\cos^3\varphi}{\sin^2\varphi} = -\sin\varphi - \frac{1}{\sin\varphi}$

58) $\int d\varphi \frac{\cos^4\varphi}{\sin^2\varphi} = \left(\frac{1}{2}\cos^3\varphi - \frac{3}{2}\cos\varphi\right)\frac{1}{\sin\varphi} - \frac{3}{2}\varphi$

59) $\int d\varphi \frac{\cos^5\varphi}{\sin^2\varphi} = \left(\frac{1}{3}\cos^4\varphi + \frac{4}{3}\cos\varphi + \frac{8}{3}\right)\frac{1}{\sin\varphi}$

60) $\int d\varphi \frac{\sin\varphi}{\cos^3\varphi} = \frac{1}{2\cos^2\varphi}$

61) $\int d\varphi \frac{\sin^2\varphi}{\cos^3\varphi} = \frac{\sin\varphi}{2\cos^2\varphi} - \frac{1}{2}\int \frac{d\varphi}{\cos\varphi}$

62) $$\int d\varphi \frac{\sin^3\varphi}{\cos^3\varphi} = \frac{1}{2\cos^2\varphi} + \log\cos\varphi$$

63) $$\int d\varphi \frac{\sin^4\varphi}{\cos^3\varphi} = \left(-\sin^3\varphi + \frac{3}{2}\sin\varphi\right)\frac{1}{\cos^2\varphi} - \frac{3}{2}\int\frac{d\varphi}{\cos\varphi}$$

64) $$\int d\varphi \frac{\sin^5\varphi}{\cos^3\varphi} = \left(-\frac{1}{2}\sin^4\varphi + 1\right)\frac{1}{\cos^2\varphi} + 2\log\cos\varphi$$

65) $$\int d\varphi \frac{\sin\varphi}{\cos^4\varphi} = \frac{1}{3\cos^3\varphi}$$

66) $$\int d\varphi \frac{\sin^2\varphi}{\cos^4\varphi} = \frac{1}{3}\,tgn^3\varphi$$

67) $$\int d\varphi \frac{\sin^3\varphi}{\cos^4\varphi} = \left(\sin^2\varphi - \frac{2}{3}\right)\frac{1}{\cos^3\varphi}$$

68) $$\int d\varphi \frac{\sin^4\varphi}{\cos^4\varphi} = \frac{1}{3}\,tgn^3\varphi - tgn\,\varphi + \varphi$$

69) $$\int d\varphi \frac{\sin^5\varphi}{\cos^4\varphi} = \left(-\sin^4\varphi + 4\sin^2\varphi - \frac{5}{8}\right)\frac{1}{\cos^3\varphi}$$

70) $$\int d\varphi \frac{\sin\varphi}{\cos^5\varphi} = \frac{1}{4\cos^4\varphi}$$

71) $$\int d\varphi \frac{\sin^2\varphi}{\cos^5\varphi} = \left(\frac{1}{8}\sin^3\varphi + \frac{1}{8}\sin\varphi\right)\frac{1}{\cos^4\varphi} - \frac{1}{8}\int\frac{d\varphi}{\cos\varphi}$$

72) $$\int d\varphi \frac{\sin^3\varphi}{\cos^5\varphi} = \frac{1}{4}\,tgn^4\varphi$$

73) $$\int d\varphi \frac{\sin^4\varphi}{\cos^5\varphi} = \left(\frac{5}{8}\sin^3\varphi - \frac{3}{8}\sin\varphi\right)\frac{1}{\cos^4\varphi} - \frac{3}{8}\int\frac{d\varphi}{\cos\varphi}$$

74) $$\int d\varphi \frac{\sin^5\varphi}{\cos^5\varphi} = \frac{1}{4}\,tgn^4\varphi - \frac{1}{2}\,tgn^2\varphi - \log\cos\varphi$$

Man beachte, dass $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$ etc. Dadurch ergeben sich sofort die hier fehlenden Integrale

$$\int d\varphi \frac{\cos^{x} x}{\sin^3\varphi},\quad \int d\varphi \frac{\cos^{\varkappa} x}{\sin^4\varphi},\quad \int d\varphi \frac{\cos^{\varkappa} x}{\sin^5\varphi}.$$

75) $$\int \frac{d\varphi}{\sin\varphi\cos\varphi} = \log tgn\,\varphi$$

76) $$\int \frac{d\varphi}{\sin\varphi\cos^2\varphi} = \frac{1}{\cos\varphi} + \int\frac{d\varphi}{\sin\varphi}$$

77) $\int \frac{d\varphi}{\sin\varphi \cos^3\varphi} = \frac{1}{2\cos^2\varphi} + \log tgn\, \varphi$

78) $\int \frac{d\varphi}{\sin\varphi \cos^4\varphi} = \frac{1}{3\cos^3\varphi} + \frac{1}{\cos\varphi} + \int \frac{d\varphi}{\sin\varphi}$

79) $\int \frac{d\varphi}{\sin\varphi \cos^5\varphi} = \frac{1}{4\cos^4\varphi} + \frac{1}{2\cos^2\varphi} + \log tgn\, \varphi$

80) $\int \frac{d\varphi}{\sin^2\varphi \cos^2\varphi} = -2 \cot g\, 2\varphi$

81) $\int \frac{d\varphi}{\sin^2\varphi \cos^3\varphi} = \left(\frac{1}{2\cos^2\varphi} - \frac{3}{2}\right)\frac{1}{\sin\varphi} + \frac{3}{2}\int \frac{d\varphi}{\cos\varphi}$

82) $\int \frac{d\varphi}{\sin^2\varphi \cos^4\varphi} = \frac{1}{3\sin\varphi\cos^3\varphi} - \frac{3}{8} \cot g\, 2\varphi$

83) $\int \frac{d\varphi}{\sin^2\varphi \cos^5\varphi} = \left(\frac{1}{4\cos^4\varphi} + \frac{5}{8\cos^2\varphi} - \frac{15}{8}\right)\frac{1}{\sin\varphi} + \frac{15}{8}\int \frac{d\varphi}{\cos\varphi}$

84) $\int \frac{d\varphi}{\sin^3\varphi \cos^3\varphi} = -\frac{2\cos 2\varphi}{\sin^2 2\varphi} + 2\log tgn\, \varphi$

85) $\int \frac{d\varphi}{\sin^3\varphi \cos^4\varphi} = \left(\frac{1}{3\cos^3\varphi} + \frac{5}{3\cos\varphi}\right)\frac{1}{\sin^2\varphi} + 5\int \frac{d\varphi}{\sin^3\varphi}$

86) $\int \frac{d\varphi}{\sin^3\varphi \cos^5\varphi} = \frac{1}{4\sin^2\varphi\cos^4\varphi} + \frac{3}{2}\int \frac{d\varphi}{\sin^3\varphi\cos^3\varphi}$

87) $\int \frac{d\varphi}{\sin^4\varphi \cos^4\varphi} = \left(-\frac{8}{3\sin^3 2\varphi} - \frac{16}{3\sin 2\varphi}\right)\cos 2\varphi$

88) $\int \frac{d\varphi}{\sin^4\varphi \cos^5\varphi} = \left(\frac{1}{4\cos^4\varphi} + \frac{7}{8\cos^2\varphi}\right)\frac{1}{\sin^3\varphi} + \frac{55}{8}\int \frac{d\varphi}{\sin^4\varphi\cos\varphi}$

89) $\int \frac{d\varphi}{\sin^5\varphi \cos^5\varphi} = \left(-\frac{4}{\sin^4 2\varphi} - \frac{6}{\sin^2 2\varphi}\right)\cos 2\varphi + 6\log tgn\, \varphi$

90) $\int \frac{\cos 2\varphi}{\cos\varphi}\, d\varphi = 2\sin\varphi - \log tgn\left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\varphi\right)$

91) $\int \frac{\cos 2\varphi}{\cos^2\varphi}\, d\varphi = 2\varphi - tgn\, \varphi$

92) $\int \frac{\cos 2\varphi}{\cos^3 \varphi}\, d\varphi = -\frac{\sin \varphi}{2\cos^2 \varphi} + \frac{2}{3} \log tgn \left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\varphi\right)$

93) $\int \frac{\cos 2\varphi}{\cos^4 \varphi}\, d\varphi = \frac{1}{3} tgn\, \varphi \left(4 - \frac{1}{\cos^2 \varphi}\right)$

94) $\int \frac{\cos 2\varphi}{\cos^5 \varphi}\, d\varphi = \frac{1}{8} tgn\, \varphi \left(\frac{5}{\cos \varphi} - \frac{2}{\cos^3 \varphi}\right) + \frac{5}{8} \log tgn \left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\varphi\right)$

95) $\int \frac{\sin 2\varphi}{\cos \varphi}\, d\varphi = -2\cos \varphi$

96) $\int \frac{\sin 2\varphi}{\cos^2 \varphi}\, d\varphi = -2 \log \cos \varphi$

97) $\int \frac{\sin 2\varphi}{\cos^3 \varphi}\, d\varphi = \frac{2}{\cos \varphi}$

98) $\int \frac{\sin 2\varphi}{\cos^n \varphi}\, d\varphi = \frac{2}{(n-2)\cos^{n-2} \varphi}, \quad n > 2$

99) $\int \frac{\sin 2\varphi}{\sin \varphi}\, d\varphi = \sin 2\varphi$

100) $\int \frac{\sin 2\varphi}{\sin^2 \varphi}\, d\varphi = 2 \log \sin \varphi$

101) $\int \frac{\sin 2\varphi}{\sin^n \varphi}\, d\varphi = -\frac{2}{(n-2)\sin^{n-2} \varphi}, \quad n > 2$

102) $\int \frac{\cos 3\varphi}{\cos \varphi}\, d\varphi = 2\cos \varphi \sin \varphi - \varphi$

103) $\int \frac{\cos 3\varphi}{\cos^2 \varphi}\, d\varphi = 4\sin \varphi - 3 \log tgn \left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\varphi\right)$

104) $\int \frac{\cos 3\varphi}{\cos^3 \varphi}\, d\varphi = 4\varphi - 3\, tgn\, \varphi$

105) $\int \frac{\cos 3\varphi}{\cos^4 \varphi}\, d\varphi = -\frac{3\sin \varphi}{2\cos^2 \varphi} + \frac{5}{2} \log tgn \left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\varphi\right)$

106) $\int \frac{\cos 3\varphi}{\cos^5 \varphi}\, d\varphi = tgn\, \varphi \left(2 - \frac{1}{\cos^2 \varphi}\right)$

107) $\int \frac{\cos 3\varphi}{\sin \varphi}\, d\varphi = -2\sin^2 \varphi + \log \sin \varphi$

108) $\int \frac{\cos 3\varphi}{\sin^2\varphi}\, d\varphi = -4\sin\varphi - \frac{1}{\sin\varphi}$

109) $\int \frac{\cos 3\varphi}{\sin^3\varphi}\, d\varphi = -\frac{1}{2\sin^2\varphi} - 4\log\sin\varphi$

110) $\int \frac{\cos 3\varphi}{\sin^n\varphi}\, d\varphi = -\frac{1}{(n-1)\sin^{n-1}\varphi} + \frac{4}{(n-3)\sin^{n-3}\varphi},\ n>3$

111) $\int \frac{\sin 3\varphi}{\cos\varphi}\, d\varphi = 2\sin^2\varphi + \log\cos\varphi$

112) $\int \frac{\sin 3\varphi}{\cos^2\varphi}\, d\varphi = -4\cos\varphi - \frac{1}{\cos\varphi}$

113) $\int \frac{\sin 3\varphi}{\cos^3\varphi}\, d\varphi = -\frac{1}{2\cos^2\varphi} - 4\log\cos\varphi$

114) $\int \frac{\sin 3\varphi}{\cos^n\varphi}\, d\varphi = \frac{4}{(n-3)\cos^{n-3}\varphi} - \frac{1}{(n-1)\cos^{n-1}\varphi},\quad n>3$

115) $\int \frac{\sin 3\varphi}{\sin\varphi}\, d\varphi = \varphi + 2\sin\varphi\cos\varphi$

116) $\int \frac{\sin 3\varphi}{\sin^3\varphi}\, d\varphi = 3\log tgn\frac{\varphi}{2} + 4\cos\varphi$

117) $\int \frac{\sin 3\varphi}{\sin^3\varphi}\, d\varphi = -3\,cotg\,\varphi - 4\varphi$

118) $\int \frac{\sin 3\varphi}{\sin^4\varphi}\, d\varphi = -\frac{3}{2}\,cotg\,\varphi\,\frac{1}{\sin\varphi} - \frac{5}{2}\log tgn\frac{\varphi}{2}$

119) $\int \frac{\sin 3\varphi}{\sin^5\varphi}\, d\varphi = cotg\,\varphi\left\{2 - \frac{1}{\sin^2\varphi}\right\}.$

§. 91.

Tangens-Integrale.

1) $\int f(tgn\,u)\,du = \int \frac{f(z)}{1+z^2}\,dz,\quad tgn\,u = z$

2) $\int tgn^n x\,dx = \frac{tgn^{n-1}x}{n-1} - \int tgn^{n-2}x\,dx$

3) $\int \frac{dx}{tgn^n x} = -\frac{1}{(n-1)\, tgn^{n-1} x} - \int \frac{dx}{tgn^{n-2} x}$

4) $\int tgn^{2n} x\, dx = \frac{z^{2n-1}}{2n-1} - \frac{z^{2n-3}}{2n-3} + \cdots + (-1)^{n+1} z + (-1)^n \, arc\, tgn\, z$

wenn $z = tgn\, x$ gesetzt wird.

5) $\int tgn\, x\, dx = -\log \cos x$

6) $\int tgn^2 x\, dx = tgn\, x - x$

7) $\int tgn^3 x\, dx = \frac{1}{2}\, tgn^2 x + \log \cos x$

8) $\int tgn^4 x\, dx = \frac{1}{3}\, tgn^3 x - tgn\, x + x$

9) $\int tgn^5 x\, dx = \frac{1}{4}\, tgn^4 x - \frac{1}{2}\, tgn^2 x - \log \cos x$

10) $\int \frac{tgn\, x\, dx}{1 + m^2\, tgn^2 x} = \frac{\log(\cos^2 x + m^2 \sin^2 x)}{2(m^2 - 1)}$

11) $\int \frac{tgn\, a - tgn\, x}{tgn\, a + tgn\, x}\, dx = \sin 2a \log \sin(a + x) - \cos 2a$

§. 92.

Exponential-Integrale.

1) $\int f(e^{ax})\, dx = \frac{1}{a} \int f(z) \frac{dz}{z}, \quad z = e^{ax}$

2) $\int x^m e^{ax}\, dx = \frac{1}{a} x^m e^{ax} - \frac{m}{a} \int x^{m-1} e^{ax}\, dx$

3) $\int \frac{e^{ax}}{x^m}\, dx = -\frac{1}{m-1} \frac{e^{ax}}{x^{m-1}} + \frac{a}{m-1} \int \frac{e^{ax}}{x^{m-1}}\, dx$

4) $$\int e^{ax} \cos^n bx\, dx = \frac{a \cos bx + nb \sin bx}{a^2 + n^2 b^2}\, e^{ax} \cos^{n+1} bx + \frac{n(n-1)b^2}{a^2 + n^2 b^2} \int e^{ax} \cos^{n-2} bx\, dx$$

5) $$\int e^{ax} \sin^n bx\, dx = \frac{a \sin bx - nb \cos bx}{a^2 + n^2 b^2}\, e^{ax} \sin^{n-1} bx + \frac{n(n-1)b^2}{a^2 + n^2 b^2} \int e^{ax} \sin^{n-2} bx\, dx$$

6) $$\int e^{ax} tgn^n x\, dx = \frac{e^{ax}}{n-1}\, tgn^{n-1} x - \frac{a}{n-1} \int e^{ax}\, tgn^{n-1} x\, dx - \int e^{ax}\, tgn^{n-2} x\, dx$$

7) $$\int e^{ax} cotg^n x\, dx = -\frac{e^{ax}}{n-1}\, cotg^{n-1} x + \frac{a}{n-1} \int e^{ax}\, cotg^{n-1} x\, dx - \int e^{ax}\, cotg^{n-2} x\, dx$$

8) $$\int \frac{e^{ax}}{\sin^n x}\, dx = -e^{ax}\, \frac{a \sin x + (n-2) \cos x}{(n-1)(n-2) \sin^{n-1} x} - \frac{a^2 + (n-2)^2}{(n-1)(n-2)} \int \frac{e^{ax}}{\sin^{n-2} x}\, dx$$

9) $$\int \frac{e^{ax}}{\cos^n x}\, dx = -e^{ax}\, \frac{a \cos x - (n-2) \sin x}{(n-1)(n-2) \cos^{n-1} x} + \frac{a^2 + (n-2)^2}{(n-1)(n-2)} \int \frac{e^{ax}}{\cos^{n-2} x}\, dx$$

10) $$\int e^{ax} \sin^m x \cos^n x\, dx$$

$$= \frac{e^{ax} \sin^m x \cos^{n-1} x}{(m+n)^2 + a^2} \left\{a \cos x + \overline{m+n} \sin x\right\} - \frac{ma}{(m+n)^2 + a^2} \int e^{ax} \sin^{m-1} x \cos^{m-1} x\, dx + \frac{(n-1)(m+n)}{(m+n)^2 + a^2} \int e^{ax} \sin^m \cos^{n-2} dx$$

$$= \frac{e^{ax} \sin^{m-1} x \cos^n x}{(m+n)^2 + a^2} \left\{a \sin x - (m+n) \cos x\right\} + \frac{na}{(m+n)^2 + a^2} \int e^{ax} \sin^{m-1} x \cos^{n-1} x\, dx + \frac{(m-1)(m+n)}{(m+n)^2 + a^2} \int e^{ax} \sin^{m-2} x \cos^n x\, dx$$

$$\int e^{ax} \sin^m x \cos^n x \, dx$$

$$= \frac{e^{ax} \cos^{n-1} \sin^{m-1} x}{(m+n)^2 + a^2} \{a \sin x \cos x + n \sin^2 x - m \cos^2 x\}$$

$$+ \frac{n(n-1)}{(m+n)^2 + a^2} \int e^{ax} \sin^m x \cos^{n-2} x \, dx$$

$$+ \frac{m(m-1)}{(m+n)^2 + a^2} \int e^{ax} \sin^{m-2} x \cos^n x \, dx$$

$$= \frac{e^{ax} \sin^{m-1} x \cos^{n-1} x}{(m+n)^2 + a^2} \{a \sin x \cos x + n \sin^2 x - m \cos^2 x\}$$

$$+ \frac{n(n-1)}{(m+n)^2 + a^2} \int e^{ax} \sin^{m-2} x \cos^{n-2} x \, dx$$

$$+ \frac{(m-n)(m+n-1)}{(m+n)^2 + a^2} \int e^{ax} \sin^{m-2} x \cos^n x \, dx$$

$$= \frac{e^{ax} \sin^{m-1} x \cos^{n-1} x}{(m+n)^2 + a^2} \{a \sin x \cos x + n \sin^2 x - m \cos^2 x\}$$

$$+ \frac{m(m-1)}{(m+n)^2 + a^2} \int e^{ax} \sin^{m-2} x \cos^{n-2} x \, dx$$

$$- \frac{(m-n)(m+n-1)}{(m+n)^2 + a^2} \int e^{ax} \sin^m x \cos^{n-2} x \, dx$$

11) $$\int x^n e^{ax} \{\cos bx + i \sin bx\} \, dx \quad (i = \sqrt{-1})$$

$$= \frac{x^n e^{ax} \{\cos bx + i \sin bx\}}{a + bi} \Big\{1 - \frac{n}{(a+bi)x}$$

$$+ \frac{n(n-1)}{(a+bi)^2 x^2} + \cdots + (-1)^n \frac{n!}{(a+bi)^n x^n}\Big\}$$

12) $$\int x^n a^x \, dx = \frac{a^x x^n}{\log a} - \frac{n a^x x^{n-1}}{\log^2 a} + \frac{n(n-1) a^x x^{n-2}}{\log^3 a}$$

$$\pm \frac{n(n-1)(n-2)\ldots 2.1}{\log^{n+1} a} a^x$$

13) $$\int \frac{a^x \, dx}{x^n} = - \frac{a^x}{(n-1)x^{n-1}} - \frac{a^x \log a}{(n-1)(n-2)x^{n-2}}$$

$$- \frac{a^x \log^2 a}{(n-1)(n-2)(n-3)x^{n-3}} - \cdots$$

$$+ \frac{\log^{n-1} a}{(n-1)(n-2)\ldots 2.1} \int \frac{a^x}{x} \, dx$$

14) $$\int \frac{a^x \, dx}{x} = \log x + \frac{x}{1} \log a + \frac{x^2}{2.2!} \log^2 a + \frac{x^3}{3.3!} \log^3 a + \cdots$$

15) $\int \frac{dx}{1+e^x} = \log \frac{e^x}{1+e^x}$.

16) $\int \frac{dx}{e^{ax}+e^{-ax}} = \frac{1}{a} \, arc\,tgn\,(e^{ax})$

17) $\int \frac{dx}{a e^{mx} + b e^{-mx}} = \frac{1}{m\sqrt{ab}} \, arctgn \left(e^{mx}\sqrt{\frac{a}{b}}\right)$

18) $\int \frac{dx}{a+b e^{mx}} = \frac{1}{am}\{mx - \log(a+b e^{mx})\}$

19) $\int \frac{dx}{\sqrt{a+b e^{mx}}} = \frac{1}{m\sqrt{a}} \log \frac{\sqrt{a+b e^{mx}} - \sqrt{a}}{\sqrt{a+b e^{mx}} + \sqrt{a}}$

20) $\int \frac{x e^x \, dx}{(1+x)^2} = \frac{e^x}{1+x}$

21) $\int x e^x \, dx = e^x (x-1)$

22) $\int x^2 e^x \, dx = e^x (x^2 - 2x + 2)$

23) $\int x^3 e^x \, dx = e^x (x^3 - 3x^2 + 6x - 6)$

24) $\int x^4 e^x \, dx = e^x (x^4 - 4x^3 + 12x^2 - 24x + 24)$

25) $\int x^5 e^x \, dx = e^x (x^5 - 5x^4 + 20x^3 - 60x^2 + 120x - 120)$

26) $\int \frac{e^x}{x} \, dx$, vide Exponential-Integral.

27) $\int \frac{e^x}{x^2} \, dx = -\frac{e^x}{x} + \int \frac{e^x \, dx}{x}$

28) $\int \frac{e^x}{x^3} \, dx = -\frac{1}{2} e^x \left\{\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right\} + \frac{1}{2}\int \frac{e^x \, dx}{x}$

29) $\int \frac{e^x}{x^4} \, dx = -\frac{1}{3} e^x \left(\frac{1}{2x} + \frac{1}{2x^2} + \frac{1}{x^3}\right) + \frac{1}{6}\int \frac{e^x}{x} \, dx$

30) $\int \frac{e^x}{x^5} \, dx = -\frac{1}{4} e^x \left(\frac{1}{6x} + \frac{1}{6x^2} + \frac{1}{3x^3} + \frac{1}{x^4}\right) + \frac{1}{24}\int \frac{e^x}{x} \, dx$

31) $\int e^{ax} \cos x \, dx = \frac{e^{ax}(\sin x + a \cos x)}{1+a^2}$

32) $\int e^{ax} \sin x \, dx = \frac{e^{ax}(a \sin x - \cos x)}{1+a^2}$

33) $\int e^{ax} \cos^2 x \, dx = \frac{e^{ax} \cos x \{2 \sin x + a \cos x\}}{4 + a^2} + \frac{2 e^{xa}}{a(4 + a^2)}$

34) $\int e^{ax} \sin^2 x \, dx = \frac{e^{ax} \sin x \{a \sin x - 2 \cos x\}}{4 + a^2} + \frac{2 e^{ax}}{a(4 + a^2)}$

35) $\int e^{ax} \operatorname{tgn}^2 x \, dx = \frac{e^{ax}}{a} \{a \operatorname{tgn} x - 1\} - a \int e^{ax} \operatorname{tgn} x \, dx.$

§. 93.

Logarithmische Integrale.

1) $\int f(\log x) \, dx = \int f(z) e^z \, dz, \quad z = \log x$

2) $\int x^m f(\log x) \, dx = \int f(z) e^{(m+1)z} \, dz$

3) $\int x^n \log x \, dx = x^{n+1} \left\{ \frac{\log x}{n + 1} - \frac{1}{(n + 1)^2} \right\}, \quad n \gtrless 1$

4) $\int (\log x)^n \, dx = \frac{x}{n + 1} (\log x)^{n+1} - \frac{1}{(n + 1)} \int (\log x)^{n+1} \, dx$

5) $\int \frac{dx}{(\log x)^n} = - \frac{x}{(n - 1)(\log x)^{n-1}} + \frac{1}{n - 1} \int \frac{dx}{(\log x)^{n-1}}$

6) $\int x^m (\log x)^n \, dx = \frac{x^{m+1}}{m + 1} (\log x)^n - \frac{n}{m + 1} \int x^m (\log x)^{n-1} \, dx$

7) $\int \frac{x^m}{(\log x)^n} \, dx = - \frac{x^{m+1}}{(n - 1)(\log x)^{n-1}} + \frac{m + 1}{n - 1} \int \frac{x^m}{(\log x)^{n-1}} \, dx$

8) $\int (a + bx)^m \log x \, dx = \frac{(a + bx)^{m+1}}{(m + 1) b} \log x$

$$- \frac{1}{(m + 1) b} \int \frac{(a + bx)^{m+1}}{x} \, dx$$

9) $$\int \frac{\log x\, d x}{(a+b x)^m} = -\frac{\log x}{(m-1) b (a+b x)^{m-1}} + \frac{1}{(m-1) b} \int \frac{d x}{x (a+b x)^{m-1}}$$

$$= -\frac{\log x}{(n-1) b (a+b x)^{m-1}} + \frac{1}{(n-1) a b}$$

$$\left\{\frac{1}{(n-2)(a+b x)^{n-2}} + \frac{1}{(n-3) a (a+b x)^{n-3}} + \frac{1}{(n-4) a^2 (a+b x)^{n-4}} + \cdots + \frac{1}{2 . a^{n-4} (a+b x)^2} + \frac{1}{1 . a^{n-3} (a+b x)}\right\}$$

$$+ \frac{1}{(n-1) a^{n-1} b} \log \frac{x}{a+b x}$$

10) $$\int x^m\, d x \log (a+b x) = \frac{x^{m+1}}{m+1} \log (a+b x) - \frac{b}{m+1} \int \frac{x^{m+1}\, d x}{a+b x}$$

11) $$\int \frac{d x}{x} \log (a+b x) = \log a . \log x + \frac{b}{a} x - \frac{1}{2^2}\left(\frac{b}{a}\right)^2 x^2 + \frac{1}{3^2}\left(\frac{b}{a}\right)^3 x^3 \ldots$$

$$= \frac{1}{2} (\log b x)^2 - \left(\frac{a}{b}\right) \frac{1}{x} + \frac{1}{2^2}\left(\frac{a}{b}\right)^2 \frac{1}{x^2} - \frac{1}{3^2}\left(\frac{a}{b}\right)^3 \frac{1}{x^3} + \cdots$$

12) $$\int \frac{d x}{\log x} = \log (\log x) + \frac{\log x}{1} + \frac{1}{2} \frac{\log^2 x}{2!} + \frac{1}{3} \frac{\log^3 x}{3!} + \cdots$$

13) $$\int (a+b x) \log x\, d x = \frac{(a+b x)^2}{2 b} \log x - \frac{a^2}{2 b} \log x - a x - \frac{1}{4} b x^2$$

14) $$\int (a+b x)^2 \log x\, d x = \frac{(a+b x)^3}{3 b} \log x - \frac{a^3}{3 b} \log x - a^2 x - \frac{a b x^2}{2} - \frac{b^2 x^3}{9}$$

15) $$\int (a+bx)^3 \log x\,dx = \frac{(a+bx)^4}{4b}\log x - \frac{a^4}{4b}\log x$$
$$- a^3 x - \frac{3}{4}a^2 b x^2 - \frac{1}{3}a^2 b^2 x^3 - \frac{1}{16}b^3 x^4$$

16) $$\int \frac{\log x}{a+bx}\,dx = \frac{1}{b}\log x \log(a+bx) - \frac{1}{b}\int \frac{1}{x}\log(a+bx)\,dx$$

Dieses letztere Integral bildet eine selbstständige Transcendente.

17) $$\int \frac{\log x}{(a+bx)^2}\,dx = -\frac{\log x}{b(a+bx)} + \frac{1}{ab}\log\frac{x}{a+bx}$$

18) $$\int \frac{\log x}{(a+bx)^3}\,dx = -\frac{\log x}{2b(a+bx)^2} + \frac{1}{2ab(a+bx)}$$
$$+ \frac{1}{2a^2 b}\log\frac{x}{a+bx}$$

19) $$\int \frac{\log x\,dx}{\sqrt{a+bx}}$$
$$= \frac{2}{b}\left\{(\log x - 2)\sqrt{a+bx} + \sqrt{a}\log\frac{\sqrt{a+bx}+\sqrt{a}}{\sqrt{a+bx}-\sqrt{a}}\right\},\ a>0$$
$$= \frac{2}{b}\left\{(\log x - 2)\sqrt{a+bx} + 2\sqrt{-a}\,\operatorname{arctgn}\sqrt{\frac{a+bx}{-a}}\right\},\ a<0$$

20) $$\int \sin(\log x)\,dx = \frac{x}{2}\{\sin(\log x) - \cos(\log x)\}$$

21) $$\int \cos(\log x)\,dx = \frac{x}{2}\{\sin(\log x) + \cos(\log x)\}.$$

§. 94.

Integrale cyklometrischer Functionen.

Sei $\int f(x)\,dx = \varphi(x)$, so wird:

1) $$\int f(x) \arcsin x\,dx = \varphi(x) \arcsin x - \int \frac{\varphi(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$$

2) $$\int f(x) \, arc\cos x \, dx = \varphi(x) \, arc\cos x + \int \frac{\varphi(x)}{\sqrt{1-x^2}} \, dx$$

3) $$\int f(x) \, arc\,tgn\, x \, dx = \varphi(x) \, arc\,tgn\, x - \int \frac{\varphi(x)}{1+x^2} \, dx$$

4) $$\int f(x) \, arc\,cotgn\, x \, dx = \varphi(x) \, arc\,cotgn\, x + \int \frac{\varphi(x)}{1+x^2} \, dx$$

Insbesondere ist für $n \gtrless -1$

5) $$\int x^{n-1} \, arc\sin x \, dx = \frac{x^n}{n} \, arc\sin x - \frac{1}{n} \int \frac{x^n \, dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

6) $$\int x^{n-1} \, arc\cos x \, dx = \frac{x^n}{n} \, arc\cos x + \frac{1}{n} \int \frac{x^n \, dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

7) $$\int x^{n-1} \, arc\,tgn\, x \, dx = \frac{x^n}{n} \, arc\,tgn\, x - \frac{1}{n} \int \frac{x^n \, dx}{1+x^2}$$

8) $$\int x^{n-1} \, arc\,cotg\, x \, dx = \frac{x^n}{n} \, arc\,cotg\, x + \frac{1}{n} \int \frac{x^n \, dx}{1+x^2}$$

9) $$\int (arc\sin x)^n \, dx = (arc\sin x)^n \left\{ x + \frac{n\sqrt{1-x^2}}{arc\sin x} - \frac{n(n-1)x}{arc\sin^2 x} - \frac{n(n-1)(n-2)\sqrt{1-x^2}}{arc\sin^3 x} + + \cdots \right.$$

10) $$\int (arc\cos x)^n \, dx = (arc\cos x)^n \left\{ x - \frac{n\sqrt{1-x^2}}{arc\cos x} - \frac{n(n-1)x}{arc\cos^2 x} + \frac{n(n-1)(n-2)\sqrt{1-x^2}}{arc\cos^3 x} + - \cdots \right.$$

11) $$\int \frac{x \, dx}{\sqrt{1-x^2}} \, arc\sin x = x - \sqrt{1-x^2} \, arc\sin x$$

12) $$\int \frac{x^2 \, dx}{\sqrt{1-x^2}} \, arc\sin x = \frac{1}{4} x^2 - \frac{1}{2} x \sqrt{1-x^2} \, arc\sin x + \frac{1}{4} (arc\sin x)^2$$

13) $$\int \frac{x^3 \, dx}{\sqrt{1-x^2}} \, arc\sin x = \frac{1}{9} x^3 + \frac{2}{3} x - \frac{1}{3} (x^2+2) \sqrt{1-x^2} \, arc\sin x$$

14) $$\int \frac{x^4\,dx}{\sqrt{1-x^2}} \arcsin x = \frac{1}{16}x^4 + \frac{3}{16}x^2 - \frac{1}{8}(2x^3+3x)\sqrt{1-x^2}\arcsin x + \frac{3}{16}\arcsin^2 x$$

15) $$\int \frac{dx}{(\sqrt{1-x^2})^3} \arcsin x = \frac{x \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{2}\log(1-x^2)$$

16) $$\int \frac{x\,dx}{(\sqrt{1-x^2})^3} \arcsin x = \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{2}\log\frac{1-x}{1+x}$$

17) $$\int \frac{x\,dx}{1+x^2} \operatorname{arctgn} x = \frac{1}{2}\operatorname{arctgn} x \log(1+x^2) - \frac{1}{2}\int \frac{\log(1+x^2)}{1+x^2}\,dx$$

18) $$\int \frac{x^2\,dx}{1+x^2} \operatorname{arctgn} x = x \operatorname{arctgn} x - \frac{1}{2}\log(1+x^2) - \frac{1}{2}(\operatorname{arctgn} x)^2$$

19) $$\int \frac{x^3\,dx}{1+x^2} \operatorname{arctgn} x = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}(1+x^2)\operatorname{arctgn} x - \int \operatorname{arctgn} x \frac{x\,dx}{1+x^2}$$

20) $$\int \frac{x^4\,dx}{1+x^2} \operatorname{arctgn} x = -\frac{1}{6}x^2 + \frac{2}{3}\log(1+x^2) + \left(\frac{x^3}{3}-x\right)\operatorname{arctgn} x + \frac{1}{2}(\operatorname{arctgn} x)^2$$

21) $$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}} \operatorname{arctgn} x = -\sqrt{1-x^2}\operatorname{arctgn} x + \sqrt{2}\operatorname{arctgn}\frac{x\sqrt{2}}{\sqrt{1-x^2}} - \arcsin x$$

22) $$\int \frac{\arcsin x}{(\alpha+\beta x)^2}dx = -\frac{\arcsin x}{\beta(\alpha+\beta x)} - \frac{2}{\beta\sqrt{\alpha^2-\beta^2}}\operatorname{arctgn}\sqrt{\frac{(\alpha-\beta)(1-x)}{(\alpha+\beta)(1+x)}},\quad \alpha^2 > \beta^2$$

$$= -\frac{\arcsin x}{\beta(\alpha+\beta x)} - \frac{1}{\beta\sqrt{\beta^2-\alpha^2}}\log\frac{\sqrt{(\beta+\alpha)(1+x)}+\sqrt{(\beta-\alpha)(1-x)}}{\sqrt{(\beta+\alpha)(1+x)}-\sqrt{(\beta-\alpha)(1-x)}},\quad \alpha^2 < \beta$$

23) $$\int \frac{x \, arc\sin x}{(1+\gamma x^2)^2} dx = -\frac{arc\sin x}{2\gamma(1+\gamma x^2)}$$
$$+ \frac{1}{2\gamma\sqrt{\gamma+1}} arc\,tgn \frac{\sqrt{\gamma+1}.x}{\sqrt{1-x^2}}, \gamma > -1$$
$$= -\frac{arc\sin x}{2\gamma(1+\gamma x^2)}$$
$$+ \frac{1}{\gamma\sqrt{-(\gamma+1)}} \log \frac{\sqrt{1-x^2}+x\sqrt{-(1+\gamma)}}{\sqrt{1-x^2}-x\sqrt{-(1+\gamma)}}, \gamma < -1$$

24) $$\int \frac{arc\,tgn\, x}{(\alpha+\beta x)^2} dx = \frac{1}{\alpha^2+\beta^2}\left\{\log \frac{\alpha+\beta x}{\sqrt{1+x^2}} - \frac{\beta-\alpha x}{\alpha+\beta x} arc\,tgn\, x\right\}$$

25) $$\int \frac{arc\,tgn\, x}{\sqrt{a+bx^2}^3} dx = \frac{x\, arc\,tgn\, x}{a\sqrt{a+bx^2}}$$
$$- \frac{1}{a\sqrt{b-a}} arc\,tgn \sqrt{\frac{a+bx^2}{b-a}}, a < b$$
$$= \frac{x\, arc\,tgn\, x}{a\sqrt{a+bx^2}}$$
$$- \frac{1}{a\sqrt{a-b}} \log \frac{\sqrt{a+bx^2}-\sqrt{a-b}}{\sqrt{a+bx^2}+\sqrt{a-b}}, a > b.$$

Integral-Tafeln.

B. Bestimmte Integrale.

§. 95.

Einleitung.

A. Einfache Integrale.

1) Sei

$$\frac{b-a}{n} = h, \quad lim\, n = \infty, \quad lim\, h = 0,$$

ferner $\varphi(x)$ eine zwischen den Grenzen $a \gtrless x \gtrless b$ endliche, stetige und eindeutige Function, so ist

$$\int_a^b \varphi(x)\, dx = lim\, h \{\varphi(a) + \varphi(a+h) + \varphi(a+2h) + \cdots \varphi(b-h)\}$$

Man hat auch

$$\int_a^b \varphi(x)\, dx = \psi(b) - \psi(a),$$

wenn

$$\frac{d\psi(x)}{dx} = \varphi(x) \quad \text{ist.}$$

2) Das Integral

$$\int_\alpha^\beta f(x)\, dx$$

hat einen bestimmten Werth, wenn:

I. $f(x)$ innerhalb der Grenzen $f(\alpha)$ und $f(\beta)$ endlich und stetig ist.

II. Wenn zwar

$$f(\xi) = \infty \text{ für } \alpha \gtrless \xi \gtrless \beta,$$

jedoch so, dass

$$lim\, \delta f(\xi + \delta) = 0, \text{ für } lim\, \delta = 0,$$

oder wenn

$$f(\xi) = \infty = \frac{\psi(x)}{(x - \xi)^n}, \quad 1 > n > 0$$

$$f(\xi) = \psi(x) \log(x - \xi),$$

wobei aber $\psi(\xi)$ weder Null noch unendlich wird für $\alpha \gtrless \xi \gtrless \beta$.

III. Die Integrale

$$\int_a^\infty f(x)\,dx, \quad \int_{-\infty}^a f(x)\,dx, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx,$$

haben einen bestimmten Werth, wenn $f(x)$ endlich und stetig bleibt innerhalb der genommenen Grenzen und wenn

$$lim\, x^n f(x) = 0, \quad n > 1$$

für resp.

$$lim\, x = \infty, \quad lim\, x = -\infty, \quad lim\, x = \pm \infty.$$

3) Aus der Definition folgen folgende Sätze:

$$\int_a^b \varphi(x)\,dx = -\int_b^a \varphi(x)\,dx$$

$$= \int_0^b \varphi(x)\,dx - \int_0^a \varphi(x)\,dx$$

$$= \int_a^\beta \varphi(x)\,dx + \int_\beta^b \varphi(x)\,dx, \quad a \gtrless \beta \gtrless b$$

$$= \int_{a-\xi}^{b-\xi} \varphi(x)\,dx, \quad \xi = a + (b-a)\theta, \quad 0 < \theta < 1.$$

4) Es ist

$$\int_a^b c\,\varphi(x)\,dx = c\int_a^b \varphi(x)\,dx$$

$$\int_a^b [\varphi(x)\,\psi(x)]\,dx = \int_a^b \varphi(x)\,dx + \int_a^b \psi(x)\,dx$$

5) Man hat:

$$\int_a^b f(x)\,dx = (b-a)f(\xi_1),\quad \xi_x = a + (b-a)\theta_x,\quad 0 < \theta_x < 1$$

$$= (\xi_2 - p)f(\xi_2)\log\frac{b-p}{a-p},\quad a, b \gtrless p$$

$$= \frac{(\xi_3 - q)^n}{n-1} f(\xi_3)\left\{\frac{1}{(a-q)^{n-1}} - \frac{1}{(b-q)^{n-1}}\right\}\quad a, b < q$$

$$= \frac{(\xi_4 - q)^n}{n-1} f(\xi_4)\left\{\frac{1}{(q-b)^{n-1}} - \frac{1}{(q-a)^{n-1}}\right\}\quad a, b < q.$$

Ebenso ist

$$\int_a^b \varphi(x)f(x)\,dx = \varphi\{a + (b-a)\theta\}\int_a^b f(x)\,dx,\quad 0 < \theta < 1,$$

wenn $f(x)$ in dem Intervalle $a \gtrsim x \gtrsim b$ sein Zeichen nicht wechselt.

$$\int_a^b \varphi(x)f(x)\,dx = \varphi(b)\int_\xi^b f(x)\,dx - \varphi(a)\int_\xi^a f(x)\,dx$$

$$- \int_a^b \left\{\frac{\partial\varphi}{\partial x}\int_0^x f(x)\,dx\right\}dx,\quad a \gtrsim \xi \gtrsim b.$$

6) Es ist

$$\int_{+a}^{-a} f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx,\quad \text{wenn } f(-x) = f(x)$$

$$= 0,\qquad \text{wenn } f(-x) = -f(x).$$

$$\int_0^a \varphi(x)\,dx = \int_0^a \varphi(a-x)\,dx$$

$$\int_0^{2a} \varphi(x)\,dx = \int_0^a \{\varphi(x) + \varphi(2a-x)\}\,dx$$

Ist

$$\varphi(2a - x) = \varphi(x),$$

so wird

$$\int_0^{2a} \varphi(x)\,dx = 2\int_0^a \varphi(x)\,dx.$$

Ist dagegen

$$\varphi(2a - x) = -\varphi(x),$$

so wird:

$$\int_0^{2a} \varphi(x)\,dx = 0.$$

Man hat weiter:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(a + bx)\,dx = \pm \frac{1}{b} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx, \text{ je nachdem } b \gtrless 0$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f\left(ax - \frac{b}{x}\right) dx = \frac{1}{a} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$$

$$\int_0^{\infty} \frac{\varphi(x) - \varphi\left(\frac{1}{x}\right)}{1 + x^2}\,dx = 0$$

$$\int_0^{\infty} f\left\{cx + \frac{a}{x}\right\} \frac{dx}{\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{c}} \int_0^{\infty} f\{\lambda\sqrt{ac} + x\} \frac{dx}{\sqrt{x}}$$

Schlömilch, Analyt. Studien I, S. 83.

$$\int_0^{\infty} f\left(x + \frac{1}{x}\right) \operatorname{arctg} x\,\frac{dx}{x} = \frac{\pi}{4} \int_0^{\infty} f\left(x + \frac{1}{x}\right) \frac{dx}{x}$$

$$\int_0^{\infty} f\left(\frac{a}{x} + \frac{x}{a}\right) \log x\,\frac{dx}{x} = \log a \int_0^{\infty} f\left(\frac{x}{a} + \frac{a}{x}\right) \frac{dx}{x}.$$

Liouville, Journ., Vol. XVIII, p. 168.

$$\int_0^{\infty} \frac{\varphi(ax) - \varphi(bx)}{x}\,dx = \varphi(0) \log \frac{b}{a} \quad \text{(Frullani)}.$$

Ist

$$f(x) = \sum a_n \sin nx$$
$$\varphi(x) = \sum b_n \sin nx,$$

so wird

$$\frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x)\,\varphi(x)\,dx = \sum a_n b_n.$$

7) Es ist

$$\int_u^w f(x,y)\,dy = (w - u) \int_0^1 f[xu + (w - u)z]\,dz,$$

wenn

$$y = u + (w - u) z$$

gesetzt wird; diese Transformation macht variable Grenzen constant. Man beachte ferner:

$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_{\frac{a}{x}}^{\frac{b}{x}} f(x y)\, x\, d y$$

$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_0^{b-a} f(a + z)\, d z, \quad x = a + z$$

$$\int_a^b f(x)\, dx = (b - a) \int_0^\infty f\left\{\frac{a + b z}{1 + z}\right\} \frac{d z}{(1 + z)^2}, \quad x = \frac{a + b z}{1 + z}$$

8) Ist die Substitution $x = \varphi(z)$ mehrdeutig, so bestimme man α_x aus

$$\varphi'(\alpha) = 0, \quad a \gtrless \alpha \gtrless b.$$

Es wird sodann

$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^{\alpha_1} F(z)\, d z + \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} F(z)\, d z + \cdots \int_{\alpha_{n-1}}^b F(z)\, d z$$

9) Es ist

$$\frac{d}{d\alpha} \int_a^b \varphi(x, \alpha)\, dx = \int_a^b \frac{d\, \varphi(x, \alpha)}{d\alpha}\, dx,$$

wenn die Grenzen a und b constant sind in Bezug auf α; dagegen

$$\frac{d}{d\alpha} \int_a^b \varphi(x, \alpha)\, dx = \int_a^b \frac{d\, \varphi(x, \alpha)}{d\alpha}\, dx + \varphi(b, \alpha) \frac{d b}{d \alpha} - \varphi(a, \alpha) \frac{d a}{d \alpha},$$

wenn a und b Functionen von α sind.

10) Die im §. 1 gegebene Definition des Integrals

$$\int_\alpha^\beta f(x)\, dx$$

ist nicht mehr zutreffend, wenn die Function $f(x)$ für einen Werth $x = c$ discontinuirlich wird. Seien m und n endliche Constanten, ferner ε positiv, so ist sodann

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx = lim \left\{\int_{a}^{c-m\varepsilon} f(x)\,dx + \int_{c+m\varepsilon}^{b} f(x)\,dx\right\},\ \text{für } lim\,\varepsilon = 0.$$

Die conventionelle Definition des Integrals in diesem Falle.

B. Doppel-Integrale.

1) Die Umkehrung der Integrationsgrenzen ist im Allgemeinen nicht gestattet:

α) wenn sie variabel sind,

β) wenn die Function zwischen ihnen discontinuirlich wird.

Sonst ist

$$\int_{\alpha}^{\beta} d\,x \int_{\gamma}^{\delta} d\,y f(x\,y) = \int_{\gamma}^{\delta} d\,y \int_{\alpha}^{\beta} d\,x\,f(x\,y).$$

NB. Man kann nach dem Vorhergehenden die variablen Grenzen immer in constante umwandeln (vergl. 3).

2) Allgemeine Theoreme:

$$\int_0^{\infty}\int_0^{\infty} \varphi\,(a^2x^2 + b^2y^2)\,d\,x\ d\,y = \frac{\pi}{4\,a\,b}\int_0^{\infty} \varphi\,(x)\,d\,x$$

$$\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} f[a\cos\theta + b\sin\theta\cos\psi + c\sin\theta\sin\psi]\sin\theta\,d\,\theta\,d\,\psi$$

$$= 2\pi\int_{-1}^{+1} f\,(R\,u)\,d\,u,$$

wenn

$$R = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

(Poisson) Bertrand, Calcul Intég. p. 461.

3) Sei

$$y = y_0 + (Y - y_0)\,t,$$

so wird

$$\int_{x_0}^{X}\int_{y_0}^{Y} \varphi\,(x, y)\,d\,x\,d\,y = \int_{x_0}^{X}\int_0^{1} (Y - y_0) f\{x, y_0 + (Y - y_0)\,t\}\,d\,x\,d\,t.$$

4) Umkehrung der Integrationsgrenzen.

Es ist (vide Fig. 1 a. f. S.):

$$\int_{x_0}^{x_1}\int_{y_0}^{y_1} f(x,y)\,d\,x\,d\,y = \int_{\eta_0}^{\eta_1}\int_{\xi_0}^{\xi_1} f\,(x,y)\,d\,y\,d\,x$$

Es ist (vide Fig. 2):

$$\int_{x_0}^{x_1}\int_{y_0}^{y_1} f(xy)\,dx\,dy = \int_{\theta_0}^{\theta_1}\int_{r_0}^{r_1} f\{r\cos\theta, r\sin\theta\}\, r\,d\theta\,dr.$$

Fig. 1.

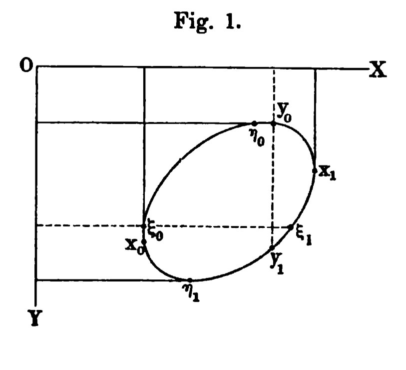
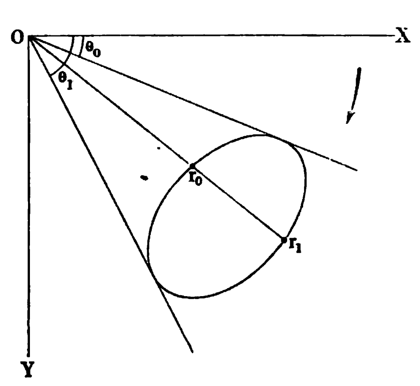


Fig. 2.



Insbesondere merke man:

$$\int_0^a\int_0^{\frac{a}{b}x} \varphi(x,y)\,dx\,dy = \int_0^b\int_{\frac{a}{b}y}^{a} \varphi(x,y)\,dy\,dx$$

$$\int_0^a\int_0^{\frac{b}{b+x}} \varphi(x,y)\,dx\,dy = \int_0^{\frac{b}{b+a}}\int_0^{a} \varphi(x,y)\,dy\,dx$$

$$+\int_{\frac{b}{b+a}}^{1}\int_0^{\frac{b}{y}(1-y)} \varphi(x,y)\,dy\,dx$$

$$\int_0^a\int_{bx}^{c-dx} \varphi(x,y)\,dx\,dy = \int_0^{ab}\int_0^{\frac{y}{b}} \varphi(x,y)\,dy\,dx$$

$$+\int_{ab}^{c}\int_0^{\frac{c-y}{d}} \varphi(x,y)\,dy\,dx,$$

wobei

$$a = \frac{c}{b+d}$$

$$\int_0^a \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} \varphi(x,y)\,dx\,dy = \int_0^a \int_0^{\sqrt{a^2-y^2}} \varphi(x,y)\,dy\,dx$$

$$\int_0^{2a} \int_0^{\frac{b}{a}\sqrt{2ax-x^2}} \varphi(x,y)\,dx\,dy = \int_0^b \int_{a-a\sqrt{1-\left(\frac{y}{b}\right)^2}}^{a+a\sqrt{1-\left(\frac{y}{b}\right)^2}} \varphi(x,y)\,dy\,dx$$

$$\int_0^{2a} \int_{\frac{x}{4a}}^{3a-x} \varphi(x,y)\,dx\,dy = \int_0^a \int_0^{2\sqrt{ay}} \varphi(x,y)\,dy\,dx$$

$$+ \int_0^{3a} \int_0^{3a-y} \varphi(x,y)\,dy\,dx$$

$$\int_0^a \int_{\sqrt{a^2-x^2}}^{x+2a} \varphi(x,y)\,dx\,dy = \int_0^a \int_{\sqrt{a^2-y^2}}^a \varphi(x,y)\,dy\,dx$$

$$+ \int_a^{2a} \int_0^a \varphi(x,y)\,dy\,dx + \int_{2a}^{3a} \int_{y-2a}^a \varphi(x,y)\,dy\,dx$$

$$\int_0^a \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} \varphi(x,y)\,dx\,dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^a \varphi\{r\cos\theta, r\sin\theta\}\,r\,d\theta\,dr$$

$$\int_0^{2a} \int_0^{\sqrt{2ax-x^2}} \varphi(x,y)\,dx\,dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2a\cos\theta} \varphi\{r\cos\theta, r\sin\theta\}\,r\,d\theta\,dr$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_\theta^{2a\cos\theta} \varphi(r,\theta)\,r\,d\theta\,dr = \int_0^{2a} \int_0^{\operatorname{arc\,cos}\frac{r}{2a}} \varphi(r,\theta)\,r\,dr\,d\theta.$$

Einige Litteratur vide: Todhunter, „A treatise on the integ. calc.“, p. 237.

§. 96.

Einige allgemeine Integralformeln.

(Vergleiche die Bemerkung am Ende.)

1) $$\int_0^\infty \frac{f(iu)+f(-iu)}{2}\,\frac{u\,du}{h^2+u^2} = -\frac{1}{2}\left\{\int_0^\infty \frac{f(x)\,dx}{h-x} - \int_0^\infty \frac{f(x)\,dx}{h+x}\right\}$$

2) $$\int_0^\infty \frac{f(iu)-f(-iu)}{2}\,\frac{h\,du}{h^2+u^2} = -\frac{1}{2}\left\{\int_0^\infty \frac{f(x)\,dx}{h-x} + \int_0^\infty \frac{f(x)\,dx}{h+x}\right\}$$

3) $$\int_0^\infty \frac{f(iu)+f(-iu)}{2}\,\frac{h\log u\,du}{h^2+u^2} = \frac{\pi}{2}f(h)\log h - \frac{\pi}{4}\left\{\int_0^\infty \frac{f(x)}{h-x}\,dx + \int_0^\infty \frac{f(x)}{h+x}\,dx\right\}$$

4) $$\int_0^\infty \frac{f(iu)-f(-iu)}{2}\,\frac{u\log u\,du}{h^2+u^2} = -\frac{\pi}{2}f(h)\log h + \frac{\pi}{4}\left\{\int_0^\infty \frac{f(x)}{h-x}\,dx - \int_0^\infty \frac{f(x)}{h+x}\,dx\right\}$$

5) $$\int_0^\pi \frac{f(e^{ix})+f(e^{-ix})}{\sqrt{1-2a\cos x+a^2}}\,dx = 2\int_0^\pi \frac{f(a\sin^2 x)}{\sqrt{1-a^2\sin^2 x}}\,dx$$

6) $$\int_0^\pi dx\,\varphi\left\{\frac{\sin^2 x}{1+2a\cos x+a^2}\right\} = \int_0^\pi dx\,\varphi(\sin^2 x), \quad a^2 \geqq 1$$
$$= \int_0^\pi dx\,\varphi\left(\frac{\sin^2 x}{a^2}\right), \quad a^2 < 1.$$

Liouville, Journ. XIX, p. 423.

$$7)\quad \int_{-\infty}^{+\infty} dx\, \frac{\varphi(e^{axi}) \pm \psi(e^{-axi})}{\varkappa^2 + x^2} = \frac{\pi}{\varkappa}\{\varphi(e^{-a\varkappa}) \pm \psi(e^{-a\varkappa})\}$$

$$8)\quad \int_{-\infty}^{+\infty} x\, dx\, \frac{\varphi(e^{axi}) \pm \psi(e^{-axi})}{\varkappa^2 + x^2} = \pi i \{\varphi(e^{-a\varkappa}) \pm \psi(e^{-a\varkappa})\}$$

Sitzungsber. der k. k. Akademie der Wiss. in Wien, 1857, S. 29.

$$9)\quad \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \frac{f(\alpha + e^{-xi}) + [f(\alpha + e^{xi})](1 - p\cos x)}{1 - 2p\cos x + p^2}\, dx$$

$$= f(\alpha + p) + f(\alpha)$$

$$10)\quad \frac{p\,i}{\pi}\int_0^\pi \frac{f(\alpha + e^{-xi}) - f(\alpha + e^{ix})\sin x}{1 - 2p\cos x + p^2}\, dx = f(\alpha + p) - f(\alpha).$$

(Poisson) Bertrand, Calc. Intég., p. 169.

$$11)\quad \int_0^\infty \frac{f(x + i\alpha t) + f(x - i\alpha t)}{1 + t^2}\, dt = \pi f(x + \alpha).$$

(Abel) Bertrand, Calc. Intég., p. 171.

$$12)\quad \int_0^\infty \frac{f(x + i\alpha t) - f(x - i\alpha t)}{t(1 + t^2)}\, dt = i\pi[f(x + \alpha) - f(x)].$$

Ist

$$F(x) = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \cdots,\quad u = x e^{\theta i}$$
$$f(x) = a_0 + a_1 x + a^2 x^2 + \cdots,\quad v = x e^{-\theta i},$$

so wird:

$$2A_0 a_0 + A_1 a_1 x^2 + A_2 a_2 x^4 + \cdots$$
$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^\pi \{F(u) + F(v)\}\{f(u) + f(v)\}\, d\theta.$$

Ist

$$f(x,y) = \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{\partial \psi}{\partial x},$$

so wird

$$13)\quad \int_0^a \{\varphi(x,x) + \psi(x,x)\}\, dx = \int_0^a \{\varphi(x,0) + \psi(a,x)\}\, dx.$$

Mathem. Annalen, Bd. 4, S. 551.

14) $$\int_0^a dx \int_0^a f(xy)\,dy = \int_0^a dy \int_y^a f(x,y)\,dx.$$

Serret, Cours de Calc. Intég. II, p. 295.

15) $$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} (2\cos v)^m \cos(m+2n)\,v\,dv = \sin n\pi \int_0^1 u^m (1-u)^{n-1}\,du.$$

(Kummer) Bertrand, Calc. Intég., p. 176.

16) $$\int_0^\pi \frac{f(a+v)+f\left(a+\frac{1}{v}\right)}{1-2c\cos x+c^2}\,dx = \frac{2\pi}{1-c^2} f(a+c), \quad v = e^{xi}$$

Todhunter's Intégr. Calc., p. 281.

17) $$\int_0^\pi \frac{1-c\cos x}{1-2c\cos x+c^2}\left\{f(a+v)+f\left(a+\frac{1}{v}\right)\right\}dx$$
$$= \pi\,[f(a+c)+f(a)].$$

Ibid. p. 282.

18) $$\int_0^\pi \frac{\sin x\,dx}{1-2c\cos x+c^2}\left\{f(a+v)-f\left(a-\frac{1}{v}\right)\right\}dx$$
$$= \frac{\pi i}{c}\,\{f(a+c)-f(c)\}.$$

Sei

$$\varphi\,[r(\cos\varphi + i\sin\varphi)] = \varphi_1(r,\varphi) + i\,\varphi_2(r,\varphi),$$

so wird:

19) $$\int_0^\infty \varphi_1(r\varphi)\frac{d\varphi}{a^2+\varphi^2} = \frac{\pi}{2a}\,\varphi(re^{-a})$$

20) $$\int_0^\infty \varphi_2(r\varphi)\frac{\varphi\,d\varphi}{a^2+\varphi^2} = \frac{\pi}{2}\,\{\varphi(re^{-a})-\varphi(0)\}$$

21) $$\int_0^\infty \varphi_2(r\varphi)\frac{d\varphi}{\varphi} = \frac{\pi}{2}\,\{\varphi(r)-\varphi(0)\}$$

22) $$\int_0^\infty \varphi_2(r\varphi)\frac{d\varphi}{\varphi(a^2+\varphi^2)} = \frac{\pi}{2a^2}\,\{\varphi(r)-\varphi(re^{-a})\}$$

Dienger, Diff.- und Integralrechnung, 1857, S. 263.

23) $$\int_0^\pi \varphi^{(i)}(\cos x)\sin^{2i}x\,dx = 1.3.5\ldots(2i-1)\int_0^\pi \varphi(\cos x)\cos ix\,dx$$

i ist beliebige ganze positive Zahl.

(Jacobi) Bertrand, Calcul. Intég., p. 174, vergl. auch Schlömilch, Analyt. Studien, II, 49.

24) Ist

$$\int_0^\infty x^{2n}\varphi(x^2)\,dx = A_{2n}$$

$$\int_0^\infty x^{2n}\varphi\left\{\left(x-\frac{1}{x}\right)^2\right\}dx = C_{2n},$$

so gilt nach Cauchy die Gleichung

$$C_{2n} = A_0 + \frac{(n+1)n}{1.2}A_2 + \frac{(n+2)(n+1)n(n-1)}{1.2.3.4}A_4 + \cdots A_{2n}$$

Bertrand, Calcul. Intég., p. 228.

25) Ist $f(t)$ endlich und stetig zwischen $0 < t < \infty$, so gilt die Gleichung:

$$f(x) = \left(\frac{2}{\pi}\right)^2\int_0^\infty\left\{\frac{u^2}{u^2-x^2}\int_0^\infty\frac{f(t)\,dt}{u^2-t^2}\right\}du.$$

Schlömilch, Analytische Studien, II, 158.

26) Man hat

$$\int_0^x\left[(x-\xi)^{m-1}\int_0^\xi\frac{\varphi'(\eta)\,d\eta}{(\xi-\eta)^m}\right]d\xi = \frac{\pi}{\sin\pi m}\{\varphi(x)-\varphi(0)\}$$

Satz von Abel, ibid. S. 111. Vergl. Crelle's Journ., Bd. I, S. 153.

NB. Alle diese Methoden gelten, so lange die Entwickelung nach der Taylor'schen Reihe möglich ist, natürlich, wenn diese ihnen zu Grunde liegt. Vergleiche auch die betreffenden Capitel der Functionentheorie.

§. 97.

Mechanische Quadraturen.

Bei allen diesen Methoden darf die Function innerhalb der genommenen Grenzen ihr Zeichen nicht wechseln.

1) $$\int_0^x f(x)\,dx = \frac{x}{6}\left\{f(0) + 4f\left(\frac{x}{2}\right) + f(x)\right\} - \frac{x^5}{2880} f^{(IV)}(0) - \cdots$$

2) Sei

$$y = f(x), \quad n h = x, \quad x_0 = 0, \quad x_\varkappa = \varkappa h, \quad y_\varkappa = f(x_\varkappa),$$

so wird

$$\int_0^x f(x)\,dx = \frac{1}{3} h (y_0 + y_n) + \frac{2}{3} h \sum_2^{n-2} y_\lambda + \frac{4}{3} h \sum_1^{n-1} y_\varkappa$$

$$\lambda = 2, 4, 6 \ldots$$

$$\varkappa = 1, 3, 5 \ldots$$

Simpson, Mathematical Dissertations, 1743, p. 109.

3) Sei

$$\int_0^x f(x)\,dx = n h \int_0^1 f(n h x)\,dx.$$

Setze

$$f(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \cdots \alpha_n x^n,$$

so wird:

$$\int_0^x f(x)\,dx = n h \{A_0 y_0 + A_1 y_1 + A_2 y_2 + \cdots A_n y_n\}$$

$$A_p = A_{n-p} = \int_0^1 \frac{X_p}{M_p}\,dx$$

$$X_p = \frac{n x (n x - 1)(n x - 2) \ldots (n x - n)}{n x - p}$$

$$M_p = X_p, \text{ für } x = \frac{p}{n}$$

Cotes, De methodo differentiali, p. 32.

Für $n = 2$ folgt die Simpson'sche Regel.

Für $n = 3, 4, 5, \ldots 9, 10$, ergiebt sich:

$$\int_0^{3h} f(x)\,dx = \frac{3h}{8}(y_0 + 3y_1 + 3y_2 + y_3)\,^{*}).$$

$$\int_0^{4h} f(x)\,dx = \frac{7}{80}(y_0 + y_4) + \frac{16}{45}(y_1 + y_3) + \frac{2}{15}\,y_2.$$

$$\int_0^{5h} f(x)\,dx = \frac{19}{288}(y_0 + y_5) + \frac{95}{96}(y_1 + y_4) + \frac{25}{144}(y_2 + y_3).$$

$$\int_0^{6h} f(x)\,dx = \frac{41}{840}(y_0 + y_6) + \frac{9}{35}(y_1 + y_5) + \frac{9}{280}(y_2 + y_4) + \frac{34}{105}\,y_3.$$

$$\int_0^{7h} f(x)\,dx = \frac{751}{17280}(y_0 + y_7) + \frac{3577}{17280}(y_1 + y_6) + \frac{49}{640}(y_2 + y_5) + \frac{2089}{17280}(y_3 + y_4).$$

$$\int_0^{8h} f(x)\,dx = \frac{989}{28350}(y_0 + y_8) + \frac{2944}{14175}(y_1 + y_7) - \frac{464}{14175}(y_2 + y_6) + \frac{5248}{14175}(y_3 + y_5) - \frac{454}{2835}\,y_4.$$

$$\int_0^{9h} f(x)\,dx = \frac{2857}{89600}(y_0 + y_9) + \frac{15741}{89600}(y_1 + y_8) + \frac{27}{2240}(y_2 + y_7) + \frac{1209}{5600}(y_3 + y_6) + \frac{2889}{44800}(y_4 + y_5).$$

$$\int_0^{10h} f(x)\,dx = \frac{16067}{598752}(y_0 + y_{10} +)\,\frac{26575}{149688}(y_1 + y_9) - \frac{16175}{199584}(y_2 + y_8) + \frac{5675}{12474}(y_3 + y_7) - \frac{4825}{11088}(y_4 + y_6) + \frac{17807}{24948}\,y_5.$$

4) Sei

$$\varphi'(x) = f(x)$$

$$\Delta\varphi(x) = \varphi(x+h) - \varphi(x) = \int_x^{x+h} f(x)\,dx,$$

---

*) **Dieses Resultat hat schon Newton gefunden.**

so wird

$$\int_x^{x+h} f(x)\,dx = h f(x) + \frac{1}{2} h \Delta f(x) - \frac{1}{2!} B_1 h^2 \Delta f'(x) + \frac{1}{4!} B_3 h^4 \Delta f'''(x) - \cdots$$

$$\int_a^b \varphi(x)\,dx = h\{\varphi(a) + \varphi(a+h) + \cdots \varphi(a+nh)\} - \frac{1}{2} h\{\varphi(b) + \varphi(a)\} - \frac{1}{2} B_1 h^2 \{\varphi'(b) - \varphi'(a)\} + \frac{1}{4!} B_3 h^4 \{\varphi'''(b) - \varphi'''(a)\} - \frac{1}{6!} B_5 h^6 \{\varphi^{(V)}(b) - \varphi^{(V)}(a)\} + \cdots$$

Sei ferner:

$$b - a = p = 8\theta,$$

so wird:

$$\int_a^b \varphi(x)\,dx = \frac{p}{5670}\{217[\varphi(a) + \varphi(b)] + 352[\varphi(a+2\theta) + \varphi(a+6\theta)] + 486\varphi(a+4\theta)\} + \frac{1024p}{5670}[\varphi(a+\theta) + \varphi(a+3\theta) + \varphi(a+5\theta) + \varphi(a+7\theta)].$$

Diese Formeln rühren von Euler her.

Vergl. Bertrand, Calcul. intég., chap. XII.

Einige Coefficienten von der Form $\frac{B_{2n+1}}{2n+2!}$

$\frac{B_1}{1.2} = 0{,}08333\ 33333$ $\qquad$ $\frac{B_7}{8!} = 0{,}00000\ 08267$

$\frac{B_3}{4!} = 0{,}00138\ 88889$ $\qquad$ $\frac{B_9}{10!} = 0{,}00000\ 00209$

$\frac{B_5}{6!} = 0{,}00003\ 30688$ $\qquad$ $\frac{B_{11}}{12!} = 0{,}00000\ 0005$

5) Methode von Gauss.

$$\int_g^h F(z)\,dz = \Delta \sum_1^n \frac{A_x}{2} \varphi\left\{\frac{1+\alpha_x}{2}\right\} + \varrho = \Delta \sum_1^n R_x \varphi(a_x) + \varrho.$$

Dabei ist

$$\Delta = h - g,\ F(g + \Delta . t) = \varphi(t),\ R_m = \frac{A_m}{2},\ a_m = \frac{1 + \alpha_m}{2},$$

α sind Wurzeln der Gleichung:

$$\frac{d^n}{d x^n}(x^2 - 1)^n = 0$$

$$\varphi(t + \tfrac{1}{2}) = L_0 + L_1 t + L_2 t^2 + \cdots$$

$$\varrho = \frac{L_{2\varkappa}}{2^{2\varkappa}(2_{\varkappa+1})} \left\{\frac{\varkappa!}{1.3.5\ldots(2\varkappa - 1)}\right\}^2$$

$n = 1$	$n = 2$	$n = 3$
$a_1 = 0{,}5$	$a_1 = 0{,}2113248654$	$a_1 = 0{,}1127016654$
$R_1 = 1$	$a_2 = 0{,}7886751346$	$a_2 = 0{,}5$
$\varrho = \frac{1}{12} L_2$	$R_1 = R_2 = \frac{1}{2}$	$a_3 = 0{,}8872983346$
	$\varrho = \frac{1}{180} L_4$	$R_1 = R_3 = \frac{5}{18},\ R_2 = \frac{4}{9}$
		$\varrho = \frac{1}{2800} L_6$

$n = 4$	$n = 5$
$a_1 = 0{,}0694318442$	$a_1 = 0{,}0469100770$
$a_2 = 0{,}3300094782$	$a_2 = 0{,}2307653449$
$a_3 = 0{,}6699905218$	$a_3 = 0{,}5$
$a_4 = 0{,}9305681558$	$a_4 = 0{,}7692346551$
$R_1 = R_4 = 0{,}1739274226$	$a_5 = 0{,}9530899230$
$R_2 = R_3 = 0{,}3260725774$	$R_1 = R_5 = 0{,}11846344$
$\log R_1 = 9{,}24036806$	$R_2 = R_4 = 0{,}23931434$
$\log R_2 = 9{,}51331428$	$R_3 = \frac{64}{225}$
$\varrho = \frac{1}{44100} L_8$	$\log R_1 = 9{,}073584349$
	$\log R_2 = 9{,}3789687142$
	$\log R_3 = 9{,}453997456$
	$\varrho = \frac{1}{698544} L_{10}.$

6) Bei allen diesen Methoden wurden äquidistante oder bestimmte Werthe der Function als bekannt vorausgesetzt.

Sind zwischen den Grenzen a und b, $\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n$ nicht äquidistante Werthe eingeschaltet, so wird:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \left[\frac{x-a}{\varphi(x)} f(x)\right]_{x=a} \int_a^b \frac{\varphi(x)\,dx}{x-a}$$

$$+ \sum_1^n \left[\frac{x-\alpha_\varkappa}{\varphi(x)} f(x)\right]_{x=\alpha_\varkappa} \int_a^b \frac{\varphi(x)}{x-\alpha_\varkappa}\,dx$$

$$+ \left[\frac{x-b}{\varphi(x)} f(x)\right]_{x=b} \int_a^b \frac{\varphi(x)}{x-b}\,dx,$$

wobei

$$\varphi(x) = (x-a)(x-b)(x_1-\alpha_1)(x-\alpha_2)\ldots(x-\alpha_n)$$

gesetzt wurde.

Vergl. Dienger, Diff.- und Integralrechnung 1857, S. 537.

7) Man hat

$$\int_\alpha^\beta f(x)\,dx = f(\alpha)\sum_1^\infty \frac{A_\varkappa}{(n+1)!}$$

$$A_0 = 0, \quad A_\varkappa = \frac{\partial}{\partial x}\left\{\frac{x}{1-\frac{f(x+\alpha)}{f(\alpha)}}\right\}_{x=0}^n$$

Schlömilch, Mathematische Abhandlungen, S. 103, 1850.

In Bezug auf die folgenden Integraltafeln bemerken wir, dass, wenn nichts anderes bemerkt ist, wir mit

$$a, b, c, \ldots m, n$$

positive und ganze, mit

$$p, q, r \ldots$$

ebenfalls positive, sonst aber beliebige (rationale, irrationale, gebrochene und ganze) Zahlen bezeichnen wollen.

Bei bekannteren Integralen ist die Quelle nicht angeführt.

§. 98.

Integrale $\int_0^1 f(x)\,dx$.

1) $\int_0^1 x^n\,dx = \frac{1}{n+1},\; n > -1$

2) $\int_0^1 \frac{dx}{x^p} = \infty$

3) $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{4}$

4) $\int_0^1 x^a (1-x)^{b-1}\,dx = \frac{a!}{b.b+1 \ldots b+n-2},\; b > 0$

5) $\int_0^1 \left(\frac{x}{1-x}\right)^p dx = \frac{p\pi}{\sin p\pi},\quad p^2 < 1$

6) $\int_0^1 \left(\frac{x}{1-x}\right)^p \frac{dx}{x} = -\frac{\pi}{\sin p\pi},\quad p^2 < 1$

(5, 6) Crelle, 33, 13.

7) $\int_0^1 \left(\frac{x}{1-x}\right)^p x\,dx = \frac{1+p}{2}\,\frac{p\pi}{\sin p\pi}, p^2 < 1$. Crelle, 38, 162.

8) $\int_0^1 \frac{dx}{1+x+x^2} = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}$

9) $\int_0^1 \frac{dx}{1-x+x^2} = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$

10) $\int_0^1 \frac{dx}{1-2x\cos\lambda+x^2} = \frac{1}{\sin\lambda}\,arc\,tgn\,\frac{\sin\lambda}{1-\cos\lambda}$

11) $\int_0^1 \frac{dx}{1+2x\cos\lambda+x^2} = \log\left(2\sin\frac{\lambda}{2}\right)$

12) $$\int_0^1 \frac{x^p - x^{-p}}{1 + 2x\cos\lambda + x^2}\,dx = \frac{\pi}{\sin p\pi}\cdot\frac{\sin p\lambda}{\sin\lambda},\quad p < 1$$

Legendre, Exerc. 4, 103.

13) $$\int_0^1 \frac{x}{1+x^2}\cdot\frac{dx}{1+px} = -\frac{1}{1+p^2}\cdot\left\{\log\frac{1+p}{\sqrt{2}} + \frac{\pi p}{4}\right\}$$

14) $$\int_0^1 \left(\frac{1}{1-x} - \frac{p x^{p-1}}{1-x^p}\right)dx = \log p$$

Schlömilch, Studien, I, 7.

15) $$\int_0^1 \frac{x^a}{\sqrt{1-x}}\,dx = 2\,\frac{2^{a/2}}{3^{a/2}}$$

16) $$\int_0^1 \frac{x^{a-\frac{1}{2}}}{\sqrt{1-x}}\,dx = \frac{1^{a/2}}{2^{a/2}}\,\pi$$

(15–16) Schlömilch, Studien.

17) $$\int_0^1 dx\sqrt{1-x^2} = \frac{\pi}{4}$$

18) $$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi}{2}$$

19) $$\int_0^1 \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = 1$$

20) $$\int_0^1 x^{2a-1}\,dx\sqrt{1-x^2} = \frac{2^{a-1/2}}{3^{a/2}}$$

21) $$\int_0^1 x^{2a}\,dx\sqrt{1-x^2} = \frac{3^{a-1/2}}{4^{a/2}}\cdot\frac{\pi}{4}$$

(20–21) Crelle, 35, 13.

22) $$\int_0^1 x^{2a}(1-x^2)^{b-\frac{1}{2}}\,dx = \frac{1^{a/2}\,1^{b/2}}{1^{a+b/2}}\,\frac{\pi}{2^{a+b+1}}$$

23) $$\int_0^1 x^{2a-1}(1-x^2)^{b-\frac{1}{2}}\,dx = \frac{2^{a-1/2}\,1^{b/2}}{1^{a+b/2}}$$

24) $$\int_0^1 \frac{x^{2a}\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{3^{a-1/2}}{2^{a/2}}\cdot\frac{\pi}{2}$$

25) $\int_0^1 \frac{x^{2a-1}\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{2^{a-1/2}}{1^{a/2}}$

26) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1+px^2}} = \frac{1}{\sqrt{p}} \log \{\sqrt{p} + \sqrt{1+p}\}$

27) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x(1+px)}} = \frac{2}{\sqrt{p}} \log \{\sqrt{p} + \sqrt{1+p}\}$

28) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}} = \pi$

29) $\int_0^1 \frac{(1-x)^a x^b}{\sqrt{x(1-x)}}\,dx = \frac{1^{a/2}\,1^{b/2}}{2^{a+b/2}}\,\pi$. Ohm, Anm. 46 *).

30) $\int_0^1 \frac{1}{a-bx} \cdot \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}} = \frac{\pi}{\sqrt{a(a-b)}}$, $0 < b > a$

31) $\int_0^1 \log x \log(1-x)\,dx = 2 - \frac{\pi^2}{6}$

32) $\int_0^1 \frac{dx}{\log \log x} = 0$. Mascheroni, Adn. p. 18 **).

33) $\int_0^1 dx \sqrt{\log \frac{1}{x}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$. Crelle, 17, 1.

34) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{\log \frac{1}{x}}} = \sqrt{\pi}$. Ibid.

35) $\int_0^1 x^{a-1} (\log x)^n\,dx = (-1)^n \frac{n!}{a^{n+1}}$, $a > 0$

---

*) M. Ohm, Die Auswerthungsmethoden bestimmter Integrale, Nürnberg 1852, 437 S.

**) Mascheroni, Adnotationes ad Calc. integ. Euleri Ticini Galeatis, 1790.

36) $\int_0^1 e^{-x}\sqrt{x}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$

37) $\int_0^1 \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}}\,dx = \frac{2 + e\sqrt{\pi}}{4e}$

38) $\int_0^1 \frac{\log x}{1 + x}\,dx = -\frac{\pi^2}{12}$

39) $\int_0^1 \frac{\log x}{1 - x}\,dx = -\frac{\pi^2}{6}$

40) $\int_0^1 \frac{\log x}{1 + x^2}\,dx = -\sum_0^\infty (-1)^n \frac{1}{(2n + 1)^2}$

41) $\int_0^1 \frac{\log x}{1 - x^2}\,dx = -\frac{\pi^2}{8}$

42) $\int_0^1 \cos qx\,dx = \frac{1}{q}\sin q$

43) $\int_0^1 \sin qx\,dx = \frac{1}{q}(1 - \cos q)$

(42, 43) Crelle, 38, 331.

44) $\int_0^1 \sin^2(2\pi x)\,dx = \frac{1}{2}$

45) $\int_0^1 \cos^2(2\pi x)\,dx = \frac{1}{2}$

46) $\int_0^1 \sin(2a\pi x)\,dx = 0.$ Crelle, 35, 1.

47) $\int_0^1 \frac{\log x}{(1 + x)^2}\,dx = \frac{1}{2}\log\frac{1}{2}$

48) $\int_0^1 \frac{x^{p-1}}{1 - x}\log x\,dx = -\sum_0^\infty \frac{1}{(p + n)^2}$

49) $\int_0^1 \frac{dx}{1+x} (\log x)^{2a-1} = \frac{1 - 2^{2a-1}}{2a} \pi^{2a} B_{2a-1}$

50) $\int_0^1 \frac{dx}{1-x} (\log x)^{2a-1} = -\frac{2^{2a-2}}{a} \pi^{2a} B_{2a-1}$

Grunert's Archiv 6, 434.

51) $\int_0^1 \frac{dx}{x} \log(1 + x^p) = \frac{\pi^2}{12p}$

52) $\int_0^1 \frac{dx}{x} \log(1 - x^p) = -\frac{\pi^2}{6\pi}$

53) $\int_0^1 \frac{dx}{x} \log(1 - 2x\cos\lambda + x^2) = \frac{\pi^2}{3} - \pi\lambda + \frac{\lambda^2}{2}$

54) $\int_0^1 \frac{dx}{x} \log\frac{1+x}{1-x} = \frac{\pi^2}{4}$

55) $\int_0^1 \frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}} \log\frac{1+qx}{1-qx} = \pi \arcsin q$

56) $\int_0^1 \frac{dx \log x}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{\pi}{2} \log 2$

57) $\int_0^1 \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}} = \log 2 - 1$

58) $\int_0^1 \frac{x^p - x^q}{\log x} dx = \log\frac{p+1}{q+1}$

Bidone, Mem. Turin 1812, 231.

59) $\int_0^1 \frac{\log(1 + qx^2)}{\sqrt{1-x^2}} dx = \pi \log\frac{1 + \sqrt{1+q^2}}{2}$

60) $\int_0^1 \frac{\log(1 - x^2 \sin\lambda)}{\sqrt{1-x^2}} dx = 2\pi \log\cos\frac{\lambda}{2}$

61) $\int_0^1 \arcsin px\, dx = \arcsin p - \frac{1}{p}\sqrt{1-p^2} - \frac{1}{p}$

62) $\int_0^1 arc\,tgn\,p\,x\,d\,x = arc\,tgn\,p - \frac{1}{2p} \log(1 + p^2)$

63) $\int_0^1 \frac{d\,x}{x} arc\sin x = \frac{\pi}{2} \log 2$

64) $\int_0^1 \frac{d\,x}{x} arc\,tgn\,x = \sum_0^\infty (-1)^n \frac{1}{(2n+1)^2}.$

§. 99.

Integrale $\int_{-1}^{+1} f(x)\,d\,x$ und $\int_1^\infty f(x)\,d\,x.$

1) $\int_{-1}^{+1} \frac{d\,x}{x} = -(2\varkappa + 1)\pi i,$ $\varkappa$ beliebig aber ganz.

2) $\int_1^\infty \frac{d\,x}{x\sqrt[q]{x^p - 1}} = \frac{\pi}{p} cosec \frac{\pi}{q}.$ Ohm, Ausw. 14.

3) $\int_1^\infty (x^b - 1)^{c - \frac{a}{b}} \frac{d\,x}{x} = (-1)^c \frac{\pi}{b} cosec \frac{a\pi}{b}.$ Crelle, 38, 162.

4) $\int_1^\infty \frac{d\,x}{x(x^b - 1)^{\frac{a}{b}}} = \frac{\pi}{b} cosec \frac{a\pi}{b}.$ Ibid.

5) $\int_1^\infty \frac{\log x}{1 + x^2} d\,x = \sum_0^\infty \frac{1}{(2n+1)^2}.$ Mem. Turin 1812, 231.

6) $\int_1^\infty \frac{\log x}{1 - x^2} d\,x = -\frac{\pi^2}{8}.$ Ohm, Ausw. 16.

7) $\int_1^\infty \frac{dx}{x} \, arc\, tgn\, x = \infty$

8) $\int_1^\infty \frac{dx}{x} = arc\, cot\, x = \sum_0^\infty (-1)^n \frac{1}{(2n+1)^2}$

9) $\int_1^\infty e^{-\frac{x}{q}} \frac{dx}{\sqrt{x-1}} = \frac{\sqrt{q\pi}}{\sqrt[q]{e}}$.

§. 100.

Integrale $\int_0^p f(x)\, dx$.

1) $\int_0^p x^{2b}\, dx \sqrt{p^2 - x^2} = \frac{1^{b/2}}{2^{b+1/2}} p^{2b+2} \frac{\pi}{2}$. Sohnke, Sammlung*).

2) $\int_0^p x^{2b+1}\, dx \sqrt{p^2 - x^2} = \frac{2^{b/2}}{3^{b+1/2}} p^{2b+3}$. Ibid.

3) $\int_0^p \frac{dx}{1+x^2} = arc\, tgn\, p$

4) $\int_0^p \frac{x^{2b}\, dx}{\sqrt{p^2 - x^2}} = \frac{1^{b/2}}{2^{b/2}} p^{2b} \frac{\pi}{2}$. Sohnke, Samml.

5) $\int_0^p \frac{x^{2b+1}\, dx}{\sqrt{p^2 - x^2}} = \frac{2^{b/2}}{3^{b/2}} p^{2b+1}$. Ibid.

---

*) Sohnke, Sammlung von Aufgaben aus der Differenz- und Integralrechnung. Halle.

6) $\int\limits_0^p \frac{x^b\,dx}{\sqrt{px - x^2}} = \frac{1^{b/2}}{2^{b/2}}\, p^b\, \pi.$ Rogner, Mat.*).

7) $\int\limits_0^p arc\sin\frac{x}{p}\,dx = \frac{\pi - 2}{2}\,p$

8) $\int\limits_0^p arc\cos\frac{x}{p}\,dx = p$

9) $\int\limits_0^p \frac{e^{-qx}}{x - p}\,dx = -\infty.$ Grunert's Archiv, 10, 247.

10) $\int\limits_0^p log(1 + px)\,\frac{dx}{1 + x^2} = log(1 + p^2)\,arc\,tg\,p.$

Grunert's Archiv, 4, 113.

§. 101.

Integrale $\int\limits_0^\infty f(x)\,dx.$

1) $\int\limits_0^\infty \frac{dx}{a + bx^2} = \frac{\pi}{2\sqrt{ab}},\quad a > 0,\quad b > 0$

2) $\int\limits_0^\infty \frac{dx}{b^2 - x^2}$, unbestimmt. Grunert's Archiv, 10, 240.

3) $\int\limits_0^\infty \frac{dx}{(ax + b)(cx + d)} = \frac{1}{ad - bc}\,log\frac{ad}{bc},\quad a < b,\quad c < d$

*) Rogner, Materialien aus der höh. Analys. Gratz 1853, 463 S.

$$4)\ \int_0^\infty \frac{dx}{(ax+b)(a_1x+b_1)(a_2x+b_2)}$$

$$= \frac{1}{pqr}\left\{b\,r\log\frac{a_1 b}{a b_1} + b_2 p \log\frac{a_1 b_2}{a_2 b_1}\right\}$$

wenn $\frac{a}{b} > \frac{a_1}{b_1} > \frac{a_2}{b_2}$ und alle positiv, ferner

$$p = a b_1 - a_1 b,\quad q = a b_2 - a_2 b,\quad r = a_1 b_2 - a_2 b_1$$

$$5)\ \int_0^\infty \frac{dx}{1+x^3} = \frac{2\pi}{9}\sqrt{3}$$

$$6)\ \int_0^\infty \frac{dx}{1+x^4} = \frac{\pi}{4}\sqrt{2}$$

$$7)\ \int_0^\infty \frac{g+hx^2}{b^2+x^2}\cdot\frac{dx}{c^2-x^2} = \frac{g-hb^2}{b^2+c^2}\cdot\frac{\pi}{2b}$$

$$8)\ \int_0^\infty \frac{dx}{1+x+x^2} = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$$

$$9)\ \int_0^\infty \frac{dx}{1-2x\cos\lambda+x^2} = \frac{\pi-\lambda}{\sin\lambda},\quad \frac{\pi}{2} > \lambda > 0$$

$$10)\ \int_0^\infty \frac{dx}{1+2x\cos\lambda+x^2} = \frac{\lambda}{\sin\lambda},\quad \frac{\pi}{2} > \lambda > 0$$

$$11)\ \int_0^\infty \frac{x^p\,dx}{1+2qx\cos\lambda+q^2x^2} = \frac{\pi}{q^{p+1}\sin p\pi}\cdot\frac{\sin p\lambda}{\sin\lambda}.\quad \begin{matrix} p^2 < 1 \\ \lambda^2 < \pi^2 \end{matrix}$$

Plana, Mem. Brux. Tom. 10.

$$\left.\begin{matrix} 12)\ \int_0^\infty \frac{dx}{a+bx^2+cx^4} = \frac{\pi}{2\sqrt{ab}+2a\sqrt{ac}} \\ 13)\ \int_0^\infty \frac{x^2\,dx}{a+bx^2+cx^4} = \frac{\pi}{2a\sqrt{1+4ab}} \end{matrix}\right\}\ b^2 < 4ac$$

$$14)\ \int_0^\infty \frac{x^{p-1}\,dx}{1+x} = \frac{\pi}{\sin p\pi}$$

15) $\int_0^\infty \frac{x^{p-1}\,dx}{qx+1} = \frac{\pi}{q^p}\, cosec\, p\pi,\quad p < 1.$ Crelle, 45, 370.

16) $\int_0^\infty \frac{x^{p-1}\,dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2}\, cosec\, \frac{p\pi}{2},\quad 2 \geqq p \geqq 0.$

Cauchy, Cours. Leç. 34.

17) $\int_0^\infty \frac{x^{p-1}\,dx}{1-x^2} = \frac{\pi}{2}\, cotg\, \frac{p\pi}{2},\quad 1 > p.$ Ibid.

18) $\int_0^\infty \frac{dx}{(1+x^2)^a} = \frac{1^{a-1/2}}{2^{a-1/2}} \cdot \frac{\pi}{2}.$ Ibid. Leç. 33.

19) $\int_0^\infty \frac{x^p - x^{-p}}{1-x^2}\,dx = -\frac{\pi}{2}\, tgn\, \frac{p\pi}{2},\quad 1 > p > 0.$

Grunert's Archiv, 3, 278.

20) $\int_0^\infty \frac{x^{q-1}}{1+x^p} = \frac{\pi}{p}\, cosec\, \frac{q\pi}{p},\quad p > q > 0$

$= \infty \qquad q > p$

21) $\int_0^\infty \frac{x^{-p}}{x^q + x^{-q}}\,\frac{dx}{x} = -\frac{\pi}{2q}\, tgn\, \frac{p\pi}{2q}.$

Cauchy, Sav. Etran. 1827, 599.

22) $\int_0^\infty \frac{x^p + x^{-p}}{x^q + x^{-q}}\,\frac{dx}{x} = \frac{\pi}{q}\, sec\, \frac{p\pi}{2q}$

23) $\int_0^\infty \frac{x^p - x^{-p}}{x^q - x^{-q}}\,\frac{dx}{x} = \frac{\pi}{q}\, tgn\, \frac{p\pi}{2q}.$ Crelle, 38, 1.

24) $\int_0^\infty \frac{dx}{(q^2+x^2)\sqrt{p^2+x^2}} = \frac{1}{q\sqrt{p^2-q^2}}\, arc\,tgn\, \frac{\sqrt{p^2-q^2}}{q},\ q < p$

$= \frac{1}{q\sqrt{q^2-p^2}}\, log\, \frac{q+\sqrt{q^2-p^2}}{q},\ q > p$

25) $\int_0^\infty e^{-x^2p^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2p}$

26) $\int_0^\infty e^{-\frac{1}{x^2}} dx = \sqrt{\pi}$

27) $\int_0^\infty e^{-x^2-\frac{p^2}{4x^2}} dx = \frac{1}{2} e^{-p} \sqrt{\pi}$

28) $\int_0^\infty e^{-x^2+px} dx = \frac{1}{2} e^{\frac{p^2}{4}} \sqrt{\pi}$

29) $\int_0^\infty x^n e^{-px} dx = \frac{n!}{p^{n+1}}, \quad p > 0$

30) $\int_0^\infty e^{-x^2} x^{2a} dx = \frac{1^{a/2}}{2^{a+1}} \sqrt{\pi}$. Crelle, 35, 13.

31) $\int_0^\infty \frac{dx}{1+e^{2px}} = \frac{1}{2p} \log 2$

32) $\int_0^\infty \frac{dx}{e^{px}+e^{-px}} = \frac{\pi}{4p}$

33) $\int_0^\infty \sin x\, dx$ und $\int_0^\infty \cos x\, dx$ sind unbestimmt.

34) $\int_0^\infty \sin \frac{x^2}{2q^2} dx = \int_0^\infty \cos \frac{x^2}{2q^2} dx = \frac{q}{2} \sqrt{\pi}$

Bidone, Mem. Turin, 1812, 231.

35) $\int_0^\infty \sin^{2a} x\, dx = \int_0^\infty \cos^{2a} x\, dx = \infty$

36) $\int_0^\infty \sin^{2a+1} x\, dx = \frac{2^{a/2}}{3^{a/2}}$

37) $\int_0^\infty \cos^{2a+1} x\, dx = 0$

(35–37) Raabe, Integ. 149 *).

*) Raabe, Integralrechnung, 3. Thl., Zürich 1839.

38) $\int_0^\infty sin^{2a} x \, sin \, p x \, d x = \frac{1}{p} \cdot \frac{1^{2a,1}}{2^2 - p^2 . 4^2 - p^2 \ldots 4 a^2 + p^2}$

39) $\int_0^\infty sin^{2a} x \, cos \, p x \, d x = 0.$ Raabe, Integ. 149.

40) $\int_0^\infty sin^{2a+1} x \, sin \, p x = 0$

41) $\int_0^\infty sin^{2a+1} x \, cos \, p x = \frac{1^{2a-1/1}}{(1^2 - p^2)(3^2 - p^2) \ldots (2a+1)^2 - p^2}$

42) $\int_0^\infty \frac{sin \, b x}{sin \, a x} \, d x = 0, \quad b < a$

43) $\int_0^\infty \frac{sin \, x}{1 - p \, cos \, x} \, d x = 0$

44) $\int_0^\infty \frac{cos \, a x}{1 - p \, cos \, x} \, d x = \infty$

45) $\int_0^\infty \frac{cos \, a x}{(1 - p^2 \, sin^2 x)^{\frac{2b+1}{2}}} \, d x = 0, \quad p^2 < 1$

46) $\int_0^\infty e^{-p^2 x^2} x \, d x = \frac{1}{2 p^2}$

47) $\int_0^\infty e^{-p x^2} x^2 \, d x = \frac{1}{4 \pi} \sqrt{\frac{\pi}{p}}$

48) $\int_0^\infty \frac{x}{e^x + 1} \, d x = \frac{\pi^2}{12}$

49) $\int_0^\infty \frac{x}{e^x - 1} \, d x = \frac{\pi^2}{6}.$ Cauchy, Mem. Paris 1823, 603.

50) $\int_0^\infty \frac{x^{2a-1}}{e^{\pi x} + 1} \, d x = \frac{2^{2a-1} - 1}{2a} B_{2a-1}$

51) $\int_0^\infty \frac{x^{2a-1}}{e^{\pi x}-1}\,dx = \frac{2^{2a-1}}{2a} B_{2a-1}$. Crelle, 42, 348.

52) $\int_0^\infty \frac{x^{2a+1}}{e^{2\pi x}-1}\,dx = \frac{1}{4a} B_{2a-1}$. Ibid. 35, 55.

53) $\int_0^\infty \frac{e^{\pi x}+1}{e^{\pi x}-1}\,x^{2a-1}\,dx = \frac{2^{2a-1}}{a} B_{2a-1}$

Grunert's Archiv, 1, 360.

54) $\int_0^\infty \frac{e^{\pi x} x^{2a}}{(e^{\pi x}+1)^2}\,dx = \frac{2^{2a-1}-1}{\pi} B_{2a-1}$

55) $\int_0^\infty \frac{e^{\pi x} x^{2a}}{(e^{\pi x}-1)^2}\,dx = \frac{2^{2a-1}}{\pi} B_{2a-1}$.

56) $\int_0^\infty \frac{x}{e^{x}+e^{-x}}\,dx = -\sum_1^\infty \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2}$

57) $\int_0^\infty \frac{x}{e^{ax}-e^{-ax}}\,dx = \frac{\pi^2}{8a^2}$

58) $\int_0^\infty \frac{x^{2a-1}}{e^{\pi x}-e^{-\pi x}}\,dx = \frac{2^{2a}-1}{4a} B_{2a-1}$

Grunert's Archiv, 12, 130.

59) $\int_0^\infty \frac{e^{-px}-e^{-qx}}{x}\,dx = \log\frac{q}{p}$

60) $\int_0^\infty \frac{1}{e^{x}-e^{-x}}\,\frac{dx}{x} = \frac{1}{2}\log 2$

61) $\int_0^\infty e^{-px}\,dx\sqrt{x} = \frac{1}{2p}\sqrt{\frac{\pi}{p}}$

62) $\int_0^\infty \frac{e^{-qx}}{\sqrt{x}}\,dx = \sqrt{\frac{\pi}{q}}$

63) $$\int_0^\infty \frac{x\,dx}{\sqrt{e^x - 1}} = 2\pi \log 2$$

64) $$\int_0^\infty \frac{\log x}{p^2 + q^2 x^2}\,dx = \frac{\pi}{2pq} \log \frac{p}{q}$$

65) $$\int_0^\infty \log(q^2 + x^2) \frac{dx}{p^2 + x^2} = \frac{\pi}{p} \log(p + q)$$

66) $$\int_0^\infty \log\left(1 + \frac{q^2}{x^2}\right) \frac{dx}{p^2 + x^2} = \frac{\pi}{p} \log \frac{p + q}{p}$$

67) $$\int_0^\infty \log\left(1 + \frac{q^2}{x^2}\right) \frac{dx}{p^2 - x^2} = \frac{\pi}{p} \operatorname{arctgn} \frac{q}{p}$$

68) $$\int_0^\infty \frac{\log x\,dx}{(q + x)^2} = \frac{1}{q} \log q, \quad q < 1$$

69) $$\int_0^\infty \frac{\log x}{x + q} \cdot \frac{dx}{x + 1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{(\log q)^2}{q - 1}$$

70) $$\int_0^\infty x^{2a} \sin qx\,dx = (-1)^a \frac{1^{2a/1}}{q^{2a+1}}$$

71) $$\int_0^\infty x^{2a} \cos qx\,dx = 0$$

72) $$\int_0^\infty x^{2a-1} \sin qx\,dx = 0$$

73) $$\int_0^\infty x^{2a-1} \cos qx\,dx = (-1)^a \frac{1^{2a-1/1}}{q^{2a}}$$

(70–73: Oettinger, Crelle, 38, 216.)

74) $$\int_0^\infty \frac{\sin px}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}, \quad p > 0$$
$$= 0, \quad p = 0$$
$$= -\frac{\pi}{2}, \quad p < 0$$

75) $\int_0^\infty \frac{\cos px}{x}\, dx = \infty$

76) $\int_0^\infty \frac{tgn\, px}{x}\, dx = \frac{\pi}{2}$. Legendre, Exerc. 5, 35.

77) $\int_0^\infty \frac{\sin qx \cos px}{x}\, dx = \frac{\pi}{2}, \quad q > p$

$= 0, \quad q < p$

$= \frac{\pi}{4}, \quad p = q$

78) $\int_0^\infty \frac{\sin qx}{x^2}\, dx = \infty$

79) $\int_0^\infty \frac{\cos qx}{x^2}\, dx = \infty$

80) $\int_0^\infty \frac{\sin^2 qx}{x^2}\, dx = \frac{q\pi}{2}$

81) $\int_0^\infty \frac{\sin px \sin qx}{x^2}\, dx = \frac{p\pi}{2}, \quad p \leqq q$

$= \frac{q\pi}{2}, \quad p \geqq q$ } Ohm, Auswahl, 18.

82) $\int_0^\infty \frac{\sin^2 qx \cos^2 px}{x^2}\, dx = \frac{2q - p}{4}\, \pi \quad q > p$

$= \frac{q\pi}{4}, \quad p = q$

$= \frac{q\pi}{4}, \quad q < p$ } Bidone, Mem., Turin 1812, 231.

83) $\int_0^\infty \frac{1 - \cos px}{x^2}\, dx = \frac{\pi q}{2}, \quad q > 0$

$= -\frac{\pi q}{2}, \quad q < 0$ } Poisson, Mem. Acad., 1816, 71.

84) $$\int_0^\infty \frac{\cos qx - \cos px}{x^2}\, dx = \frac{p-q}{2}\,\pi.$$

Bidone, Mém., Turin 1812, 231.

85) $$\int_0^\infty \frac{\cos px}{1+x^2}\, dx = \frac{\pi}{2}\, e^{p}, \quad p < 0$$

$$= \frac{\pi}{2}\, e^{-p}, \; p \geqq 0$$

86) $$\int_0^\infty \frac{x \sin px}{1+x^2}\, dx = \frac{1}{2}\,\pi\, e^{-p}, \quad p > 0$$

$$= -\frac{1}{2}\,\pi\, e^{p}, \; p < 0$$

87) $$\int_0^\infty \frac{x\, tgn\, px}{1+x^2}\, dx = \pi\, \frac{e^{-p}}{e^{p}+e^{-p}}$$

88) $$\int_0^\infty \frac{x\, cotgn\, px}{1+x^2}\, dx = \pi\, \frac{e^{-p}}{e^{p}-e^{-p}}$$

(87–88) Legendre, Exerc., 5, 85.

89) $$\int_0^\infty \frac{\cos qx}{1-x^2}\, dx = \frac{\pi}{2}\, \sin q$$

90) $$\int_0^\infty \frac{x \sin qx}{1-x^2}\, dx = -\frac{\pi}{2}\, \cos q$$

(89–90) Cauchy, Sav. Etran., 1827, 124.

91) $$\int_0^\infty \frac{\cos px}{q^2+x^2}\, dx = \frac{\pi}{2q}\, e^{-pq}, \; p \geqq 0$$

92) $$\int_0^\infty \frac{x \sin px}{q^2+x^2}\, dx = \frac{\pi}{2}\, e^{-pq}, \; p > 0$$

93) $$\int_0^\infty \frac{x \sin px}{q^2-x^2}\, dx = -\frac{\pi}{2}\, \cos pq$$

94) $$\int_0^\infty \frac{\cos px}{q^2-x^2}\, dx = \frac{\pi}{2q}\, \sin pq$$

$$95)\ \int_0^\infty \frac{\sin ax \sin bx}{q^2+x^2}\,dx = \pi e^{-aq}\frac{e^{bq}-e^{-bq}}{4q},\quad 0<b<a$$

$$96)\ \int_0^\infty \frac{x\sin ax \sin bx}{q^2+x^2}\,dx = \pi e^{-aq}\frac{e^{-bq}+e^{bq}}{4},\quad 0<b<a$$

$$= \pi e^{-bq}\frac{e^{-aq}-e^{aq}}{4},\quad a<b<\infty$$

$$97)\ \int_0^\infty \frac{\cos ax \cos bx}{q^2+x^2}\,dx = \pi e^{-aq}\frac{e^{bq}+e^{-bq}}{4q},\quad 0<b<a$$

$$= \pi e^{-bq}\frac{e^{aq}+e^{-aq}}{4q},\quad a<b<\infty$$

Schlömilch, Studien, 1*).

$$98)\ \int_0^\infty \frac{\sin px}{q^2+x^2}\,\frac{dx}{x^{2a-1}} = (-1)^a\,\frac{\pi}{2q^{2a}}\,e^{-pq}$$

$$99)\ \int_0^\infty \frac{\cos px}{q^2+x^2}\,\frac{dx}{x^{2a}} = (-1)^a\,\frac{\pi}{2q^{2a+1}}\,e^{-pq}$$

$$100)\ \int_0^\infty \frac{\sin ax}{1+2p\cos ax+p^2}\,\frac{dx}{x} = \frac{1}{2}\,\frac{\pi}{1+p},\quad p<1$$

$$= \frac{1}{2p}\,\frac{\pi}{1+p},\quad p>1$$

$$101)\ \int_0^\infty \frac{\sin ax}{1-2p\cos ax+p^2}\,\frac{dx}{x} = \frac{1}{2}\,\frac{\pi}{1-p},\quad p<1$$

$$= \frac{1}{2p}\,\frac{\pi}{1-p},\quad p>1$$

Plana, Mém., Turin 1818, 7.

$$102)\ \int_0^\infty \frac{\log\sin\frac{mx}{2}}{1+x^2}\,dx = \frac{\pi}{2}\log\frac{1-e^{-m}}{2}$$

$$103)\ \int_0^\infty \frac{\log\cos\frac{mx}{2}}{1+x^2}\,dx = \frac{\pi}{2}\log\frac{1+e^{-m}}{2}$$

$$104)\ \int_0^\infty \frac{\log tgn\frac{mx}{2}}{1+x^2}\,dx = \frac{\pi}{2}\log\frac{e^m-1}{e^m+1}$$

*) Schlömilch, Analytische Studien, 1848, 2 Thle.

105) $$\int_0^\infty \frac{x\,dx}{1+x^2}\,\frac{\sin m x}{1+2\alpha\cos m x+\alpha^2}=\frac{\pi}{2(\alpha+e^m)}$$

106) $$\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^2}\log(1-2\alpha\cos m x+\alpha^2)=\pi\log(1-\alpha e^{-m})$$

107) $$\int_0^\infty \frac{\sin b x}{\sin a x}\,\frac{dx}{1+x^2}=\frac{\pi}{2}\cdot\frac{e^b-e^{-b}}{e^a-e^{-a}},\quad b<a$$

108) $$\int_0^\infty \frac{\cos b x}{\sin a x}\cdot\frac{dx}{1+x^2}=\frac{\pi}{2}\,\frac{e^b+e^{-b}}{e^a-e^{-a}}$$

(107, 108:) Legendre, Exerc., 5, 29.

109) $$\int_0^\infty \frac{\cos b x}{\cos a x}\cdot\frac{dx}{1+x^2}=\frac{\pi}{2}\,\frac{e^b+e^{-b}}{e^a+e^{-a}},\quad a>b.$$ Ibid.

110) $$\int_0^\infty \frac{1-p\cos r x}{1-2p\cos r x+p^2}\,\frac{dx}{q^2+x^2}$$

$$=\frac{\pi}{2q}\cdot\frac{1}{1-p e^{-rq}},\quad p^2<1.$$ Crelle, 25, 74.

$$=\frac{\pi}{2q}\cdot\frac{1}{1-p e^{rq}},\quad p^2>1.$$ Ohm, Ausw., 26.

111) $$\int_0^\infty \frac{\sin r x\,dx}{1-2p\cos r x+p^2}\,\frac{x}{q^2+x^2}$$

$$=\frac{1}{2}\,\frac{\pi}{1+p}\,\frac{e^{rq}}{e^{2qr}-p},\quad p<1.$$ Legendre, Exerc., 4, 132.

$$=\frac{1}{2}\,\frac{\pi}{1+p}\,\frac{e^{qr}}{p e^{2rq}-1},\quad p>1.$$ Ohm, Ausw., 26.

112) $$\int_0^\infty \frac{\sin x p}{\sqrt{x}}\,dx=\sqrt{\frac{\pi}{2p}},\quad p>0;\ =-\sqrt{\frac{\pi}{2p}},\quad p<0$$

113) $$\int_0^\infty \frac{\cos x p}{\sqrt{x}}\,dx=\sqrt{\frac{\pi}{2p}}$$

114) $$\int_0^\infty \frac{\sin p x}{x\sqrt{x}}\,dx=\sqrt{2p\pi}.$$ Mém. de Turin, 1821, 209.

115) $\int_0^\infty \frac{\cos px}{x\sqrt{x}}\,dx = -\sqrt{2p\pi}.$ Crelle, 38, 216.

116) $\int_0^\infty \frac{\sin ax \cos bx}{\sqrt{x}}\,dx = \left\{\frac{1}{2\sqrt{a+b}} + \frac{1}{2\sqrt{a-b}}\right\}\sqrt{\frac{\pi}{2}},\ a>b$

$= \frac{1}{4}\sqrt{\frac{\pi}{a}},\qquad a=b$

$= \left\{\frac{1}{2\sqrt{a+b}} - \frac{1}{2\sqrt{b-a}}\right\}\sqrt{\frac{\pi}{2}},\ a<b.$

Bidone, Mém., Turin 1812, 231.

117) $\int_0^\infty e^{-px}\sin qx\,dx = \frac{q}{p^2+q^2}$

118) $\int_0^\infty e^{-px}\cos qx\,dx = \frac{p}{p^2+q^2}$

119) $\int_0^\infty e^{-px^2}\cos qx\,dx = \frac{1}{2}\,e^{-\frac{q^2}{4p}}\sqrt{\frac{\pi}{p}}$

Cauchy, Exerc., 1827, p. 233.

120) $\int_0^\infty e^{-px^2}\sin qx\,dx = \sum_0^\infty (-1)^n \frac{1}{(n+2)^{n/1}}\cdot\frac{q^{2n+1}}{p^{n+1}}.$

Crelle, 38, 216.

121) $\int_0^\infty \frac{e^{2ax}-e^{-2ax}}{e^{\pi a}-e^{-\pi a}}\,da = \frac{1}{2}\,tgn\,x$

122) $\int_0^\infty \frac{(e^{ax}-e^{-ax})^2}{e^{\pi a}-e^{-\pi a}}\,a\,da = \frac{1}{4}\,tgn^2 x$

123) $\int_0^\infty \frac{a^{2n-1}\,da}{e^{2a\pi}-1} = \pm\frac{1}{2n}B_{2n-1}$

124) $\int_0^\infty \frac{e^{2ax}-e^{-2ax}}{e^{\pi a}-e^{-\pi a}}\,a\,da = \frac{1}{4\cos^2 x}$

125) $\int_0^\infty \frac{(e^{ax}-e^{-ax})^2}{e^{\pi a}-e^{-\pi a}}\,\frac{da}{a} = -\frac{1}{4}\log\cos x$

126) $\int\limits_0^{\infty} \frac{e^{ax} - e^{-ax}}{e^{\pi x} - 1}\, dx = \frac{1}{a} - cotgn\, a$

127) $\int\limits_0^{\infty} \frac{\sin a x}{e^{\pi x} - 1}\, dx = -\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{a} + \frac{e^{a} + e^{-a}}{e^{-a} - e^{a}}\right\}.$

Plana, Mem., Turin 1818.

§. 102.

Integrale $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx.$

1) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x \pm q} = 0$

2) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{p^2 + x^2} = \frac{\pi}{p}$

3) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2 - p^2} = 0$

4) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^{2b}}{1 + x^{2a}}\, dx = \frac{\pi}{a} \operatorname{cosec}\left\{\frac{2b + 1}{2a}\, \pi\right\},\ 2b < 2a - 1.$

Grunert's Archiv, 2, 266.

5) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^{2b-1}}{1 + x^{2a}}\, dx = 0$

6) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^{2b}}{1 + x^{2a-1}}\, dx = \frac{\pi}{2a - 1}\, cotgn \left(\frac{2b - 1}{2a - 1} \cdot \frac{\pi}{2}\right)$

7) $\int\limits_{\infty}^{+\infty} \frac{x^{2b-1}}{1 + x^{2a-1}}\, dx = \frac{\pi}{2a - 1}\, tgn\, \frac{b\pi}{2a - 1}.$ Ibid.

8) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^{2b}}{1-x^{2a}}\,dx = \frac{\pi}{a}\,cotgn\left(\frac{2b+1}{2a}\,\pi\right),\ 2b < 2a-1$

9) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^{2b-1}\,dx}{1-x^{2a}} = 0,\ \ 2b < 2a-1$

10) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^{2b}}{1-x^{2a-1}}\,dx = \frac{\pi}{2a-1}\,cotgn\left\{\frac{2b+1}{2a-1}\,\frac{\pi}{2}\right\}$

11) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^{2b-1}}{1-x^{2a-1}}\,dx = -\frac{\pi}{2a-1}\,tgn\,\frac{b\pi}{2a-1}.$

Grunert's Archiv, 2, 266.

12) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{a+bx}{x^2+2cx\cos\lambda+c^2}\,dx = \frac{\pi}{c\sin\lambda}\left(a-\frac{1}{2}\,b^2\right).$

Plana, Mem., Turin 1818, 7.

13) $\int_{-\infty}^{+\infty} e^x\,dx = \infty$

14) $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-px^2}\,dx = \sqrt{\frac{\pi}{p}}$

15) $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-px^2-qx}\,dx = e^{\frac{q^2}{4p}}\sqrt{\frac{\pi}{p}}.$ Cauchy, Exerc., 1827, 233.

16) $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-px^2+qx}\,dx = e^{\frac{q^2}{4p}}\sqrt{\frac{\pi}{p}}.$ Ohm, Ausw., 20.

17) $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-px^2-\frac{q}{x^2}}\,dx = e^{-2\sqrt{pq}}\sqrt{\frac{\pi}{p}}.$ Cauchy, P., 19, 511.

18) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-bx}}{1+e^{-ax}}\,dx = \frac{\pi}{a}\,cosec\,\frac{b\pi}{a}$

19) $\int_{-\infty}^{+\infty} \sin(px^2)\,dx = \sqrt{\frac{\pi}{2p}}$

20) $\int_{-\infty}^{+\infty} \cos(px^2)\,dx = \sqrt{\frac{\pi}{2p}}$

(19, 20) Schlömilch, Studien, 1, 13.

21) $\int_{-\infty}^{+\infty} \sin(px^2 + qx + r)\,dx = \sin\left\{\frac{\pi}{4} - \frac{q^2 - 4pr}{4p}\right\}\sqrt{\frac{\pi}{p}}$

22) $\int_{-\infty}^{+\infty} \cos(px^2 + qx + r)\,dx = \cos\left\{\frac{\pi}{4} - \frac{q^2 - 4pr}{4q}\right\}\sqrt{\frac{\pi}{p}}.$

Ohm, Ausw., 25.

23) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{px}}{e^x + q}\,dx = \frac{\pi q^{p-1}}{\sin p\pi}\{\log q - \pi \operatorname{cotgn}. p\pi\}, \quad p < 1$

24) $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-px}\sqrt{x}\,dx = \frac{1}{2p}\sqrt{\frac{\pi}{p}}.$ Ohm, Ausw., 20.

25) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin ax}{x}\,dx = \pi$

26) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin px}{x \pm q}\,dx = \pi \cos pq.$ Bidone, Mem., Turin 1812, 231.

27) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin px}{q^2 + x^2}\,dx = 0.$ Moigno, Int., 133.

28) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \sin px}{q^2 + x^2}\,dx = \pi e^{-pq}.$ Ohm, Ausw., 25.

29) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{p + qx}{r + 2sx + x^2} \sin tx\,dx$

$= \left\{\frac{p - qs}{\sqrt{r - s^2}} \sin rt + q \cos rt\right\} \pi e^{-t\sqrt{r-s^2}}.$ Ohm, Ausw., 25.

30) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin px}{q^2 + x^2} \cdot \frac{dx}{x^{2a}} = 0$

31) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin px}{q^2 + x^2} \cdot \frac{dx}{x^{2a-1}} = (-1)^a \frac{\pi}{q^{2a}} e^{-pq}$

32) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos px}{x \pm q}\,dx = \pm \pi \sin pq.$ Mem. Turin 1812.

33) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos px}{x^2 + q^2}\, dx = \frac{\pi}{q} e^{-pq}$. Ohm, Ausw., 25.

34) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \cos px}{x^2 + q^2}\, dx = 0$. Ohm, Ausw., 23.

35) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{p + qx}{r + 2sx + x^2} \cos tx\, dx$

$$= \left\{ q \sin rt - \frac{p - qs}{\sqrt{r - s^2}} \cos rt \right\} \pi e^{-t\sqrt{r-s^2}}.$$ Ibid., 25.

36) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos px}{q^2 + x^2} \frac{dx}{x^{2a}} = (-1)^a \frac{\pi}{q^{a+1}} e^{-pq}$

37) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos px}{q^2 + x^2} \frac{dx}{x^{2a-1}} = 0$

38) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{tgn\, px}{x}\, dx = \pi$.

§. 103.

Integrale $\int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x)\, dx$.

1) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} tgn\, x\, dx = \frac{1}{2} \log 2$

2) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} tgn^a\, x\, dx = \sum_0^{\infty} (-1)^n \frac{1}{a + 2n + 1}$.

Grunert's Archiv, 6, 434.

3) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{tgn\,x}{1+p\,tgn\,x}\,dx = -\frac{1}{1+p^2}\left\{log\frac{1+p}{\sqrt{2}} - p\,\frac{\pi}{4}\right\}$

4) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} x\,tgn\,x\,dx = -\frac{\pi}{8}\,log\,2 + \frac{1}{2}\sum_0^\infty \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2}$

5) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x\,dx}{tgn\,x} = \frac{\pi}{8}\,log\,2 + \frac{1}{2}\sum_0^\infty \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2}$

6) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} log\,sin\,x\,dx = -\frac{\pi}{4}\,log\,2 - \frac{1}{2}\sum_0^\infty \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2}$

7) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} log\,cos\,x\,dx = -\frac{\pi}{4}\,log\,2 + \frac{1}{2}\sum_0^\infty \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2}$

8) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} log\,tgn\,x\,dx = -\sum_0^\infty (-1)^n\,\frac{1}{(2n+1)^2}$

9) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} log(1+tgn\,x)\,dx = \frac{\pi}{8}\,log\,2.$ Grunert's Archiv, 6, 448.

§. 104.

Integrale $\int_0^{\frac{\pi}{2}}$.

1) $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin b x\, d x = 0, \quad b = 4a$$
$$= \frac{1}{4a+1}, \quad b = 4a+1$$
$$= \frac{1}{2a+1}, \quad b = 4a+2$$
$$= \frac{1}{4a+3}, \quad b = 4a+3$$

2) $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos b x\, d x = 0, \quad b = 4a$$
$$= \frac{1}{4a+1}, \quad b = 4a+1$$
$$= 0, \quad b = 4a+2$$
$$= \frac{-1}{4a+3}, \quad b = 4a+3$$

3) $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2a} x\, d x = \frac{1^{a/2}}{2^{a/2}} \cdot \frac{\pi}{2}.$$ Crelle, 38, p. 331.

4) $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2a+1} x\, d x = \frac{2^{a/2}}{3^{a/2}}.$$ Ibid., p. 162.

5) $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2a} x\, d x = \frac{1^{a/2}}{2^{a/2}} \cdot \frac{\pi}{2}.$$ Cauchy, Cours. Leç., 32.

6) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2a+1} x\, dx = \frac{2^{a/2}}{3^{a/2}}$. Crelle, 38, p. 162.

7) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2a} x \cos^{2b} x\, dx = \frac{1^{a/2}\, 1^{b/2}}{2^{a+b/2}}\, \frac{\pi}{2}$. Crelle's Journ., 15, 1.

8) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2a} x \cos^{2b+1} x\, dx = \frac{1}{2a+1}\, \frac{1^{a/2}\, 2^{b/2}}{3^{(a+b)/2}}$. Ibid. 38, 162.

9) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2a+1} x \cos^{2b} x\, dx = \frac{1^{a/2}\, 1^{b/2}}{3^{a+b/2}}$. Ohm, Ausw., 49.

10) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2a+1} x \cos^{2b+1} x\, dx = \frac{1^{a+1/1}\, 1^{b/1}}{1^{a+b+1/1}}\, \frac{1}{2(a+1)}$.

Crelle, 38, 162.

11) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{a+b} x\, tgn^{2a+1} x\, dx = \frac{1}{2b}\, \frac{1^{a/1}\, 1^{b/1}}{1^{a+b/1}}$. Ibid. 38, 162.

12) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^{2a-1} x}{\sin^{2b} x}\, dx = (-1)^b\, \frac{1}{2a}\, \frac{2^{a/2}}{1^{b/2}\, 1^{a-b/2}}$. V. T. 12, Nr. 19.

13) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^{2a} x}{\sin^{2b} x}\, dx = (-1)^b\, \frac{\pi}{4}\, \frac{1^{a/2}}{1^{b/2}\, 2^{a-b/2}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^{2a} x}{\cos^{2b} x}\, dx$. Ibid.

14) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^{2a-1} x}{\cos^{2b} x}\, dx = \frac{(-1)^b}{2a}\, \frac{2^{a/2}}{1^{b/2}\, 1^{(a-b)/2}}$. Ibid.

15) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1 - \sin x \cos \lambda} = (\pi - \lambda) \operatorname{cosec} \lambda$

16) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1 + \sin x \cos\lambda} = \lambda \operatorname{cosec} \lambda.$ V. T. 12, Nr. 19.

17) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{p + q \cos x} = \frac{1}{\sqrt{p^2 - q^2}} \operatorname{arc\,cos} \frac{q}{p}, \quad q < p.$

Lobatto, Integ. 53*).

$$= \frac{1}{\sqrt{q^2 - p^2}} \log \frac{q + \sqrt{q^2 - p^2}}{q}, \quad p < q$$

$$= \frac{1}{p} \qquad p = q$$

18) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{-p + q \cos x} = -\frac{1}{\sqrt{q^2 - p^2}} \log \frac{\sqrt{q^2 - p^2 - q}}{p}, \quad p < q$

$$= -\infty \qquad p = q$$

Ueber die letzteren Integrale Grunert's Archiv 21, 26.

19) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1 + p^2 \operatorname{tgn}^2 x} = \frac{\pi}{2} \frac{1}{1 + p}.$ Grunert's Arch. 10, 449.

20) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{p^2 \cos^2 x + q^2 \sin^2 x} = \frac{\pi}{2pq}.$ Crelle, 34, 101.

21) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x \, dx}{\sqrt{1 + p^2 \sin^2 x}} = \frac{1}{p} \operatorname{arc\,tgn} p, \quad p^2 < 1.$ Ibid. 46, 119.

22) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x \, dx}{\sqrt{1 - p^2 \sin^2 x}} = \frac{1}{2p} \log \frac{1 + p}{1 - p}, \quad p^2 < 1.$ Ibid.

23) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos x \, dx = \frac{\pi}{2} - 1$

*) Lobatto, Lessen over de Integraal-Reckening, 'sGravenh.

24) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x\,dx}{tgn\,x} = \frac{\pi}{2} \log 2.$ Grunert's Arch. 10, 449.

25) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\,tgn\,x\,dx = \infty$

26) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x\,dx}{\sin x} = 2 \sum_0^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2}.$ Legendre, Exerc. 5, 61.

27) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x\,dx}{\sin 2x} = \infty.$ Cauchy, Exerc. 1826, p. 205.

28) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x \sin x}{1 - 2p\cos x + p^2}\,dx = \frac{\pi}{p} \log(1-p)$

29) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \sin x\,dx = -\frac{\pi}{2} \log 2$

30) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \cos x\,dx = -\frac{\pi}{2} \log 2$

31) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log tgn\,x\,dx = 0$

32) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log(1 + q\cos^2 x)\,dx = \pi \log \frac{1+\sqrt{1+q}}{2}.$

Mém. Kasan. 1835, 1.

33) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log(1 + q^2 tgn^2 x)\,dx = \pi \log(1+q)$

§. 105.

Integrale $\int_0^\pi f(x)\,dx$.

1) $\int_0^\pi \sin^{2a+1} x\,dx = \frac{(1^{a/1})^2}{2^{2a/1}}\, 2^{2a}$. Crelle, 38, 162.

2) $\int_0^\pi \cos^{2a+1} x\,dx = 0$

3) $\int_0^\pi \cos^{2a} x\,dx = \frac{1^{a/2}}{2^{a/2}}\,\pi$

(2, 3: Cauchy, Exerc. 1826, p. 205.)

4) $\int_0^\pi \sin ax \sin bx\,dx = 0$

5) $\int_0^\pi \cos ax \cos bx\,dx = 0$

(4, 5: $a \gtrless b$)

6) $\int_0^\pi \sin^2 px\,dx = \int_0^\pi \cos^2 px\,dx = \frac{\pi}{2}$

7) $\int_0^\pi \sin px \sin ax\,dx = (-1)^{a-1}\,\frac{a \sin p\pi}{a^2 - p^2}$

8) $\int_0^\pi \cos px \cos ax\,dx = (-1)^a\,\frac{p \sin p\pi}{a^2 - p^2}$

(7, 8: Schlömilch Beitr. I, §. 8.)

9) $\int_0^\pi \frac{dx}{\cos x} = 0.$

10) $\int_0^\pi \frac{dx}{p + q\cos x} = \frac{\pi}{\sqrt{p^2 - q^2}},\quad p^2 > q^2$

$= 0 \qquad p^2 < q^2$

(Grunert's Archiv 21, 26.)

11) $$\int_0^\pi \frac{dx}{-p+q\cos x} = \frac{-\pi}{\sqrt{p^2-q^2}},\quad p^2>q^2$$
$$= 0 \qquad q^2>p^2$$
Grunert's Arch. 21, 26.

12) $$\int_0^\pi \frac{dx}{1-2p\cos x+p^2} = \frac{\pi}{1-p^2},\quad p^2<1$$
$$= \frac{\pi}{p^2-1},\quad p^2>1$$

13) $$\int_0^\pi \frac{dx}{1+2p\cos x+p^2} = \frac{\pi}{1-p^2},\quad p<1$$

14) $$\int_0^\pi \frac{\cos ax}{1-2p\cos x+p^2}\,dx = \frac{\pi p^a}{1-p^2},\quad p^2<1$$
$$= \frac{\pi p^{-a}}{p^2-1},\quad p^2>1$$
Euler, Calc. Int. 4, p. 4.

15) $$\int_0^\pi \frac{x\sin x}{p+\cos x}\,dx = -\pi\log 2(1-p) \qquad p<1$$
$$= -2\pi\log\{1-p+\sqrt{p^2-1}\} \quad p>1$$

16) $$\int_0^\pi \frac{x\sin x}{p-\cos x}\,dx = \pi\log 2(1+p) \qquad p<1$$
$$= 2\pi\log\{1+p-\sqrt{p^2-1}\} \quad p>1$$
Legendre, Exerc. 5, 75.

17) $$\int_0^\pi \frac{x\sin x}{1-2p\cos x+p^2}\,dx = \frac{\pi}{p}\log(1+p),\quad p<1$$
$$= \frac{\pi}{p}\log\frac{1+p}{p},\quad p>1$$
Poisson P., 17, 612.

18) $$\int_0^\pi e^{qx}\sin px\,dx = \frac{p}{p^2+q^2}\{1-e^{q\pi}\cos p\pi\}$$

19) $$\int_0^\pi e^{qx}\cos px\,dx = \frac{q}{p^2+q^2}\{e^{q\pi}\cos p\pi-1\}$$
Crelle, 34, 75.

20) $\int_0^\pi log(1-2p\cos x+p^2)\,dx = 0, \qquad p \leqq 1$

$= 2\pi \log p, \quad p > 1$

21) $\int_0^\pi log(1+2p\cos x+p^2)\,dx = 0, \qquad p < 1$

$= 2\pi \log p, \quad p > 1$

§. 106.

Integrale $\int_0^{2\pi} f(x)\,dx$.

1) $\int_0^{2\pi} \sin^{2a+1} x\,dx = 0$

2) $\int_0^{2\pi} \sin^{2a} x\,dx = \frac{1^{a/2}}{2^{a/2}} \cdot 2\pi$

3) $\int_0^{2\pi} \sin^{2a+1} x \cos bx\,dx = 0$

4) $\int_0^{2\pi} \frac{dx}{1+p^2-2p\cos x} = \frac{2\pi}{1-p^2}, \quad p<1$

$= \frac{2\pi}{p^2-1}, \quad p>1$ Grunert's Archiv 13, 193.

5) $\int_0^{2\pi} \frac{\sin ax\,dx}{1+p^2-2p\cos x} = 0, \quad p < 1.$ Raabe, Integ. 172.

$$6)\quad \int_0^{2\pi} \frac{\cos a x}{1+p^2-2p\cos x}\,dx = \frac{2\pi p^a}{1-p^2},\quad p<1$$
$$= \frac{2\pi p^{-a}}{p^2-1},\quad p>1$$

Grunert's Arch. 13, 193.

$$7)\quad \int_0^{2\pi} \frac{dx}{a+b\cos x+c\sin x} = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2-b^2-c^2}},\quad a^2>b^2+c^2$$
$$= 0,\quad a^2<b^2+c^2$$
$$= \infty,\quad a^2=b^2+c^2$$

$$8)\quad \int_0^{2\pi} \frac{dx}{-a+b\cos x+c\sin x} = \frac{-2\pi}{\sqrt{a^2-b^2-c^2}},\quad a^2>b^2+c^2$$
$$= 0,\quad a^2<b^2+c^2$$
$$= -\infty,\quad a^2=b^2+c^2$$

Grunert's Archiv 12, 409 und 21, 26.

$$9)\quad \int_0^{2\pi} \frac{\cos a x}{1+p\cos x}\,x\,dx = \frac{2\pi^2}{\sqrt{1-p^2}}\left\{\frac{1-\sqrt{1-p^2}}{p}\right\}^a,\quad p<1$$

$$10)\quad \int_0^{2\pi} \frac{\cos a x}{1-p\cos x}\,x\,dx = \frac{2\pi^2}{\sqrt{1-p^2}}\left\{\frac{\sqrt{1-p^2}-1}{p}\right\}^a,\quad p<1$$

Ohm, Ausw., 26.

$$11)\quad \int_0^{2\pi} \log(1-2p\cos x+p^2)\,dx = 0,\quad p^2 \leqq 1$$

$$12)\quad \int_0^{2\pi} \log(1-2p\cos b x+p^2)\cos a b x\,dx = 0$$

$$13)\quad \int_0^{2\pi} \log(1+2p\cos x+p^2)\cos a x\,dx = 2\pi(-1)^{a-1}\frac{p^a}{a},\quad p^2\leqq 1$$
$$= 2\pi(-1)^{a-1}\frac{1}{a p^a},\quad p^2\geqq 1$$

Crelle, 23, 105.

$$14)\quad \int_0^{2\pi} \log(1-2p\cos x+p^2)\cos a x\,dx = -\frac{2\pi}{a}p^a,\quad p<1.$$

Grunert's Arch. 13, 193.

§. 107.

Theorie der Gammafunctionen.

Es ist

1) $$\Gamma(p) = \int_0^\infty e^{-x} x^{p-1} dx = \int_0^1 \left(\log \frac{1}{x}\right)^{p-1}$$

nach Legendre, Exercic., oder nach Gauss

$$\Gamma(x) = \Pi(x-1)$$

Com. Gött. rec. 1812. Tom. II.

Ist $x \geqq 0$, so wird

2) $$x\Gamma(x) = \Gamma(x+1)$$

und für ganze Zahlen

3) $$\Gamma(n) = n!$$

4) $$\Gamma(n+a) = a(a+1)\ldots(a+n-1)\Gamma(a)$$

5) Es ist

$$d\Gamma(x) = \Gamma(x) \log x \, dx, \quad x \geqq 0$$

6) $$\lim \Gamma(n+a) = \lim \Gamma(n) n^a \text{ für } \lim n = \infty.$$

Man hat ferner

7) $$\Gamma(\mu)\Gamma(1-\mu) = \frac{\pi}{\sin \mu \pi}, \quad 1 > \mu > 0$$

8) $$\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right) = \frac{1.3\ldots 2n-1}{2^n} \sqrt{\pi},$$

wobei n eine ganze Zahl ist. Ferner ist

9) $$\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(\frac{2}{n}\right)\ldots\Gamma\left(\frac{n-1}{n}\right) = \sqrt{\frac{(2\pi)^{n-1}}{n}}.$$

Ist n sehr gross, so wird

10) $$\Gamma(n) = n^{n-\frac{1}{2}} e^{-n} \sqrt{2\pi} \left\{1 + \frac{1}{12n} + \cdots\right.$$

Sei n eine positive ganze Zahl, so wird

11) $$\Gamma(\lambda)\Gamma\left(\lambda+\frac{1}{n}\right)\cdots\Gamma\left(\lambda+\frac{n-1}{n}\right) = (2\pi)^{\frac{1}{2}(n-1)} n^{\frac{1}{2}-n\lambda} \Gamma(n\lambda).$$

Es ist auch

$$12)\qquad \int_x^{x+1} \log\Gamma(x)\,dx = \frac{1}{2}\log 2\pi + x\log x - x$$

$$13)\qquad \Gamma(1+\mu) = \frac{2^\mu}{1^\mu(1+\mu)}\cdot\frac{3^\mu}{2^\mu(1+\frac{1}{2}\mu)}\cdot\frac{4^\mu}{3^\mu(1+\frac{1}{3}\mu)}\cdots$$

$$= \frac{2^\mu}{1^{\mu-1}(1+\mu)}\cdot\frac{3^\mu}{2^{\mu-1}(2+\mu)}\cdot\frac{4^\mu}{3^{\mu-1}(3+\mu)}\cdots \quad a)$$

$$\Gamma(\mu) = \lim\left\{\frac{1.2.3\ldots n}{\mu(\mu+1)(\mu+2)\ldots(\mu+n-1)}n^{\mu-1}\right\} \lim n=\infty \quad b)$$

Durch diese Formel (b) definirt Gauss die Function

$$\Pi(\mu-1) = \Gamma(\mu)$$

und leitet aus ihr alle Eigenschaften ab. V. Com. rec. Gött. 11, 1812. Die Formel (a) ist wohl die älteste (Euler's Brief an Goldbach vom 13. Octob. 1729 aus Fuss Corr. math. et phys. de quel. cél. geom. du XVIII siéc. p. P. H. Fuss Tom 1, p. 3. Petersb. 1843). Sie ist aber auch deswegen interessant, weil sie allgemein für negative oder complexe μ gilt (vergl. Hankel, Zeitschrift für Mathem. und Physik, Bd. IX, p. 1. Crelle 102, 237).

$$14)\qquad \Gamma(\mu) = \lim\frac{n^u}{\mu}\left\{1 - \sum_1^n{}^x (x-1)!\,\frac{\mu}{\mu^{x/1}}\right\},\ \lim n=\infty\cdot$$

Sei

$$Z(x) = \frac{d\log\Gamma(x)}{dx},$$

so wird

$$15)\quad Z(x) = \lim\left(\log n - \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2} - \cdots - \frac{1}{x+n}\right),\quad \lim n=\infty$$

$$16)\quad Z(1) = \lim\left\{\log n - 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \cdots - \frac{1}{n+1}\right\},\quad \lim n=\infty$$

$$Z(1) = -A = -0{,}57721566\ldots$$

Es ist

$$17)\qquad Z(x) + Z(1-x) = -\pi\,\mathrm{cotg}\,\pi x,\quad 0<x<1$$

$$18)\qquad Z\left(\frac{q-p}{q}\right) - Z\left(\frac{p}{q}\right) = \pi\,\mathrm{cotg}\,\frac{p}{q}\pi,$$

wenn p und q ganze Zahlen sind.

19) $$Z(x) = -A + \int_0^1 \frac{1 - z^{x-1}}{1 - z}\, dx.$$

Man setzt

20) $$B(qp) = \int_0^1 y^{q-1}(1-y)^{p-1}\, dy$$

21) $$B(pq) = \int_0^\infty \frac{y^{p-1}}{(1+y)^{p+q}}\, dy$$

22) $$B(pq) = \frac{\Gamma(p)\,\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}.$$

Man hat

23) $$B(a,b)\, B(a+b,c) = B(a\,c)\, B(a+c,b)$$

24) $$B(p, 1-p) = \frac{\pi}{\sin p\,\pi}, \quad 0 < p < 1$$

25) $$B(p-m, q-n)$$
$$= \frac{(p+q-1)(p+q-2)\dots(p+q-m-1)}{(p-1)(p-2)\dots(p-m)(q-1)\dots(q-n)}\, B(p,q)$$
$$p - m > 0, \quad q - n > 0.$$

Anwendung dieser Functionen auf Reihensummirungen.

26) Ist die Summe der Reihe
$$F(u) = A_0 + A_1 u + A_2 u^2 + A_3 u^3 + \cdots$$
bekannt, so wird:
$$\frac{1}{(p-1)!}\int_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{p-1}\, F(u\,x^\beta)\, dx \qquad \begin{matrix} x^{\beta-1} < 1 \\ \beta > 0 \end{matrix}$$
$$= \frac{A_0}{\alpha(\alpha+1)\dots(\alpha+p-1)} + \frac{A_1 u}{(\alpha+\beta)(\alpha+\beta+1)\dots(\alpha+\beta+p-1)}$$
$$+ \frac{A_2 u^2}{(\alpha+2\beta)(\alpha+2\beta+1)\dots(\alpha+2\beta+p-1)} + \cdots$$

27) Andererseits hat man:

$$\frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma-\beta)}\int_0^1 x^{\beta-1}(1-x)^{\gamma-\beta-1}F(ux)\,dx$$

$$= A_0 + \frac{\beta}{\gamma}A_1 u + \frac{\beta(\beta+1)}{\gamma(\gamma+1)}A_2 u^2 + \frac{\beta(\beta+1)(\beta+2)}{\gamma(\gamma+1)(\gamma+2)}A_3 u^3 + \cdots$$

Ueber diese Reihen siehe Schlömilch, Analyt. Studien I, Cap. V.

Einige Reihen für $log\,\Gamma(\mu)$.

Es ist:

28) $log\,\Gamma(1+\mu)$

$$= \frac{1}{2}log\left(\frac{\mu\pi}{sin\,\mu\pi}\right) - \frac{1}{2}log\left(\frac{1+\mu}{1-\mu}\right) - \sum_0^\infty c_{2\varkappa+1}\mu^{2\varkappa+1}$$

$$0 < \mu < 1$$

$c_1 = 0{,}42278\ 43351$ $\qquad c_7 = 0{,}00119\ 27539$

$c_3 = 0{,}06735\ 30105$ $\qquad c_9 = 0{,}00022\ 31548$

$c_5 = 0{,}00738\ 55510$ $\qquad c_{11} = 0{,}00004\ 49262$

29) $$log\,\Gamma(\mu) = (1-\mu)\,log\,\pi + A\left(\frac{1}{2}-\mu\right) - \frac{1}{2}\,log\,sin\,\mu\pi$$

$$+ \frac{1}{\pi}\left\{\frac{log\,2}{1}\,sin\,2\mu\pi + \frac{log\,4}{2}\,sin\,4\mu\pi + \frac{log\,6}{3}\,sin\,6\mu\pi\right.$$

$$0 < \mu < 1$$

$$A = 0{,}5772156649\ldots$$

30) $$log\,\Gamma(\mu) = \frac{1}{2}\,log\,2\pi + \left(\mu - \frac{1}{2}\right)log\,\mu - \mu - \frac{1}{1}\frac{a_1}{\mu}$$

$$- \frac{1}{2}\frac{a_2}{\mu(\mu+1)} - \frac{1}{3}\frac{a_3}{\mu(\mu+1)(\mu+2)} - \cdots$$

$$\mu > 0$$

$$a_\varkappa = \int_0^1\left(\frac{1}{2}-v\right)v(1-v)(2-v)\ldots(\varkappa-1-v)\,dv.$$

Diese Reihen findet man abgeleitet in Schlömilch, Comp. der höh. Analys., II, S. 257 ff. Braunschweig bei Vieweg.

Einige Integrale für die Constante A.

Sei $A = 0{,}577215\,664901\,532861\,06065124\ldots$

Vergl. Grunert's Archiv 29, S. 240.

31) $\int\limits_0^1 \log(\log x)\,dx = -A.$ Mascheroni, Adn. p. 18.

32) $\int\limits^{\infty} \left(e^{-x} - \frac{1}{1+x}\right)\frac{dx}{x} = -A.$ Grunert's Arch. 10, 233.

33) $\int\limits_0^{\infty} \left(\frac{e^{-x}-1}{x} + \frac{1}{1+x}\right)\frac{dx}{x} = A - 1.$ Ibid.

34) $\int\limits_0^{\infty} \left(e^{-x} - \frac{1}{1+x^2}\right)\frac{dx}{x} = -A.$ Ibid.

35) $\int\limits_0^{\infty} \left(\frac{1}{1+e^{-x}} - \frac{1}{x}\right) e^{-x}\,dx = A$

36) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-e^x}\,x\,e^x\,dx = -A$

37) $\int\limits_0^1 \left(\frac{1}{\log x} + \frac{1}{1-x}\right) dx = A.$ Legendre, Exerc. 5, 12.

38) $\int\limits_0^{\infty} \left(\cos x - \frac{1}{1+x}\right)\frac{dx}{x} = -A.$ Grunert's Arch. 10, 233.

39) $\int\limits_0^{\infty} \left(\frac{\sin x}{x} - \frac{1}{1+x}\right)\frac{dx}{x} = 1 - A.$ Ibid.

40) $\int\limits_0^{\infty} e^{-x}\log x\,dx = -A.$ Ibid. 9, 5.

Einige durch Gammafunctionen darstellbare Integrale.

41) $$\int_0^1 (1-x)^{p-1} x^{q-1}\, dx = \frac{\Gamma(p)\,\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)} = B(pq)$$

42) $$\int_0^1 (1-x^b)^p x^{q-1}\, dx = \frac{\Gamma\left(\frac{b}{q}\right)\Gamma(p+1)}{q\,\Gamma\left(\frac{b}{q}+p+1\right)}.$$ Crelle, 17, 1.

43) $$\int_0^1 \frac{x^{p-1}}{1+x}\, dx = \frac{1}{2} Z\left(\frac{p+1}{2}\right) - \frac{1}{2} Z\left(\frac{p}{2}\right).$$

Legendre, Exerc. 5, 4.

44) $$\int_0^1 \frac{1-x^p}{1-x}\, x^{q-1}\, dx = Z(p+q) - Z(q).$$ Ibid. 4, 50.

45) $$\int_0^1 \frac{x^p}{1+x^2}\, dx = \frac{1}{4} Z\left(\frac{p+3}{4}\right) - \frac{1}{4} Z\left(\frac{p+1}{4}\right).$$ Ibid. 5, 16.

46) $$\int_0^1 \frac{x^{a-1}}{1+x^b}\, dx = \frac{1}{2b} Z\left(\frac{a+b}{2b}\right) - \frac{1}{2b} Z\left(\frac{a}{2b}\right).$$ Ibid. 5, 4.

47) $$\int_0^1 \frac{x^q - x^p}{1-x}\, \frac{dx}{x} = Z(p) - Z(q).$$ Ibid. 4, 50.

48) $$\int_0^1 \frac{x^a\, dx}{1+x+x^2} = \frac{1}{3}\left[Z\left(\frac{a+2}{3}\right) - Z\left(\frac{a+1}{3}\right)\right].$$ Ibid. 5, 16.

49) $$\int_0^1 \frac{x^a\, dx}{1-x+x^2} = \frac{1}{6}\left[Z\left(\frac{a+5}{6}\right) - Z\left(\frac{a+2}{6}\right) + Z\left(\frac{a+4}{6}\right) - Z\left(\frac{a+1}{6}\right)\right].$$ Ibid. 5, 16.

50) $$\int_0^\infty \frac{x^{\frac{1}{2}(p-q-1)}}{(1+x)^{p+\frac{1}{2}}}\, dx = \frac{\Gamma\left(\frac{p-q+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{p+q}{2}\right)}{\Gamma\left(p+\frac{1}{2}\right)}$$

51) $$\int_0^\infty \frac{x^{p-q}}{(1+x^2)^{p+\frac{1}{2}}}\,dx = \frac{\Gamma\left(\frac{p-q+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{p+q}{2}\right)}{2\,\Gamma\left(p+\frac{1}{2}\right)}$$

52) $$\int_0^\infty \frac{x^{p-1}\,dx}{\sqrt{1+x^q}} = 2^{\frac{2p}{q}} B(q-2p, p), \quad q > 2p.$$

Crelle, 17, 163.

53) $$\int_0^\infty \frac{e^{2px}+e^{-2px}}{(e^x+e^{-x})^{2q}}\,dx = \frac{1}{2}\,B(p+q, q-p)$$

54) $$\int_0^{\frac{\pi}{4}} tgn^p x\,dx = \frac{1}{4}\left\{Z\left(\frac{p+3}{4}\right) - Z\left(\frac{p+1}{4}\right)\right\}.$$

55) $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^p x\,dx = 2^{p-2}\,\frac{\left\{\Gamma\left(\frac{p}{2}\right)\right\}^2}{\Gamma(p)}.$$ Mém. Kasan. 1835, 1.

56) $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} cos^p x\,dx = \frac{\pi}{2^{p+1}}\,\frac{\Gamma(p+1)}{\left\{\Gamma\left(\frac{p}{2}+1\right)\right\}^2}.$$ Ibid. 211.

57) $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} cos^p x \cos qx\,dx = \frac{\pi}{2^{p+1}}\,\frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma\left(\frac{p+q}{2}+1\right)\Gamma\left(\frac{p-q}{2}+1\right)}.$$

Crelle, 17, 210 und 20, 1.

58) $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^{p-1} x\, cos^{q-1} x\,dx = \frac{\Gamma\left(\frac{p}{2}\right)\Gamma\left(\frac{q}{2}\right)}{2\,\Gamma\left(\frac{p+q}{2}\right)}.$$ Raabe, Int., 222.

59) $$\int_0^\pi \frac{sin^a x}{p+q\cos x}\,dx = \frac{2\sqrt{\pi}}{a\,(p^2-q^2)^{\frac{a+1}{2}}}\,\frac{\Gamma\left(\frac{a+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{a}{2}\right)}.$$

Mém. Kasan. 1835, 1.

60) $\int_0^\infty e^{-qx} x^{p-1}\,dx = \frac{\Gamma(p)}{q^p}$

61) $\int_0^\infty \frac{x^{p-1}}{e^x+1}\,dx = \Gamma(p)\sum_0^\infty \frac{(-1)^n}{(n+1)^p}$

62) $\int_0^\infty \frac{x^{p-1}}{e^x-1}\,dx = \Gamma(p)\sum_0^\infty \frac{1}{(n+1)^p}$

63) $\int_0^\infty \frac{1}{e^{\pi x}+e^{-\pi x}}\,\frac{dx}{q^2+x^2} = \frac{1}{4q}\left\{Z\left(\frac{p}{2}+\frac{3}{4}\right) - Z\left(\frac{q}{2}+\frac{1}{4}\right)\right\}$

Legendre, Exerc. 5, 50.

64) $\int_0^1 x^{p-1}\log(1-x^2)\,dx = \frac{1}{2p}\left\{2\log 2 + Z\left(\frac{p+1}{4}\right) - Z\left(\frac{p+3}{4}\right)\right\}$

65) $\int_0^1 \frac{x^{q-1}-x^{r-1}}{(\log x)^{p+1}}\,dx = (-1)^{p+1}\Gamma(1-p)\,\frac{q^p-r^p}{p},\quad p<1$

66) $\int_0^1 \frac{1-x^{q-1}}{1+x}\,\frac{dx}{\log x} = Z\left(\frac{q}{2}\right) - Z\left(\frac{q+1}{2}\right) - Z\left(\frac{1}{2}\right).$

Legendre, Exerc. 5, 3.

67) $\int_0^\infty \frac{dx\log x}{(q+x)^{p+1}} = \frac{1}{p\,q^p}\{\log q - A - Z(p)\}.$

Schlömilch, Beiträge III, §. 9.

68) $\int_0^\infty x^{p-1}\sin qx\,dx = \frac{\Gamma(p)}{q^p}\sin\frac{p\pi}{2}$

69) $\int_0^\infty x^{p-1}\cos qx\,dx = \frac{\Gamma(p)}{q^p}\cos\frac{p\pi}{2}$

$$70)\ \int_0^\infty x^{p-1} \sin(q x^r)\, dx = \frac{\Gamma\left(\frac{p}{r}\right)}{r \sqrt[r]{q^p}} \sin \frac{p\pi}{2r}.$$

$$71)\ \int_0^\infty x^{p-1} \cos(q x^r)\, dx = \frac{\Gamma\left(\frac{p}{r}\right)}{r \sqrt[r]{q^p}} \cos \frac{p\pi}{2r}$$

Raabe, Integ. 416.

$$72)\ \int_0^\infty \frac{\sin q x}{x^p}\, dx = \frac{\Gamma(1-p)}{q^{(1-p)}} \cos \frac{p\pi}{2},\quad 0 < p < 2$$
$$= \infty,\quad p \geqq 2$$

$$73)\ \int_0^\infty \frac{\cos q x}{x^p}\, dx = \frac{\Gamma(1-p)}{q^{(1-p)}} \sin \frac{p\pi}{2},\quad 1 > p > 0$$
$$= \infty,\quad p \geqq 1$$

Vergl. Lobatto, Integ. 74. Bidone, Mém. Turin, 1812.

$$74)\ \int_0^\infty \frac{\sin x \sin q x}{x^p}\, dx = \frac{\pi}{4\Gamma(p)} \sec \frac{p\pi}{2} \{(1-q)^{p-1} - (1+q)^{p-1}\},\quad q < 1$$
$$= \frac{\pi}{4\Gamma(p)} \sec \frac{p\pi}{2} \{(q-1)^{p-1} - (1+q)^{p-1}\},\quad q > 1$$

$$75)\ \int_0^\infty \frac{\sin x \cos q x}{x^p}\, dx = \frac{\pi}{4\Gamma(p)} \operatorname{cosec} \frac{p\pi}{2} \{(1-q)^{p-1} + (1+q)^{p-1}\},\quad q < 1$$
$$= \frac{\pi}{4\Gamma(p)} \operatorname{cosec} \frac{p\pi}{2} \{(q+1)^{p-1} - (q-1)^{p-1}\},\quad q > 1$$

Schlömilch, Studien, 1, 22.

$$76)\ \int_0^\infty e^{-x}\, li(e^x)\, x^{p-1}\, dx = -\pi \cot g\, p\pi\, \Gamma(p),\quad 0 \leqq p \leqq 1.$$

Schlömilch, Beiträge III, §. 6 und 7.

§. 108.

Theorie der transcendenten Integrale.

Wir bezeichnen mit

1) $li(x) = \int_0^x \frac{dx}{\log x}$ den Integrallogarithmus

2) $Ei(x) = \int_\infty^{-x} \frac{e^{-x}}{x}\,dx$ das Exponentialintegral

3) $Si(x) = \int_0^x \frac{\sin x}{x}\,dx$ das Sinusintegral

4) $Ci(x) = \int_x^\infty \frac{\cos x}{x}\,dx$ das Cosinusintegral.

Sodann wird:

5) $$li(e^{-x}) = Ei(-x)$$

6) $$li(e^x) = Ei(x)$$

7) $$Ei(x\sqrt{-1}) = Ci(x) + \sqrt{-1}\,Si(x).$$

Insbesondere ist:

8) $\int_0^r \frac{\sin x}{x}\,dx = Si(r)$ $\qquad \int_0^r \frac{\sin qx}{x}\,dx = Si(qr)$

9) $\int_p^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx = \frac{\pi}{2} - Si(p)$

10) $\int_1^\infty \frac{\cos px}{x}\,dx = Ci(p); \qquad = \infty$ für $p = \infty$

11) $\int_p^\infty \frac{\cos x}{x}\,dx = Ci(p); \qquad \int_p^\infty \frac{\cos qx}{x}\,dx = Ci(pq)$

12) $\int_\infty^p \frac{a^x}{x}\,dx = \log a\, li(a^p); \qquad \int_0^x \frac{dx}{\log x} = li(x)$

Einige ausgezeichnete Werthe dieser Functionen.

$li(0) = 0$	$Ei(x) = 0$ für $x = 0{,}3724968\ldots$
$li(1{,}451369\ldots) = 0$	$Ei(0) = -\infty$
$li(1) = -\infty$	$Ei(-\infty) = 0$
$li(-\infty) = 1$	$Ci(0) = -\infty$
$Si(0) = 0$	$Ci(0{,}61\ldots) = 0$

13) Es ist

$$\int_a^\infty \frac{e^{-x}}{x}\,dx = -Ei(a) = -A - \log a$$

$$-\sum_1^\infty (-1)^n \frac{a^n}{n\,1^{n/1}}, \quad a \text{ beliebig.}$$

Crelle, 34, 123.

14) $$\int_p^\infty \frac{\cos x}{x}\,dx = -Ci(p) = -A - \frac{1}{2}\log p^2$$

$$+\sum_1^\infty (-1)^n \frac{1}{2n}\frac{p^{2n}}{1^{2n/1}}, \quad p \text{ beliebig.}$$

Grunert's Archiv 11, 389.

15) $$Si(x) = Si(\varkappa\pi) + \sum_1^\infty \frac{1}{\varkappa!} A_\varkappa \sin^\varkappa x, \quad \varkappa \text{ ganze Zahl}$$

$$\left(\varkappa + \frac{1}{2}\right)\pi > x \geqq \varkappa\pi$$

$$A_1 = 1, \quad A_n = \frac{\partial^{n-1}}{\partial x}\left\{\left[\frac{x - \varkappa\pi}{\sin x}\right]^n \frac{\sin x}{x}\right\}_{x=\varkappa\pi}$$

Schlömilch, Mathem. Abhandl. 1850, S. 64.

16) $$li(e^x) = A + \frac{1}{2}\log x^2 + \frac{1}{1!}\frac{\operatorname{arctgn} x}{1} + \frac{1}{2}\frac{\operatorname{arctgn}^2 x}{2!}$$

$$+\frac{7}{1.3}\frac{\operatorname{arctgn}^3 x}{3!} + \frac{1}{2.4}\frac{\operatorname{arctgn}^4 x}{4!} + \frac{343}{135}\frac{\operatorname{arctgn}^5 x}{5!} + \cdots$$

Schlömilch, Mathem. Abhandl. 1850, S. 71.

Durch theilweise Integration ergeben sich folgende halbconvergente Reihen, die für grosse x vortheilhaft sind:

$$17)\quad \int_0^x \frac{\sin x}{x}\,dx = \frac{\pi}{2} - \cos x\left\{\frac{1}{x} - \frac{2!}{x^3} + \frac{4!}{x^5} + \cdots\right. \\ - \sin x\left\{\frac{1}{x^2} - \frac{3!}{x^4} + \frac{5!}{x^6} - \cdots\right.$$

$$18)\quad \int_x^\infty \frac{\cos x}{x}\,dx = \sin x\left\{\frac{1}{x} - \frac{2!}{x^3} + \frac{4!}{x^5} - \cdots\right. \\ - \cos x\left\{\frac{1}{x^2} - \frac{3!}{x^4} + \frac{5!}{x^6} - \cdots\right.$$

$$19)\quad \int_\infty^{-x} \frac{e^{-x}}{x}\,dx = e^x\left\{\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{2!}{x^3} + \frac{3!}{x^4} + \cdots\right.$$

Ausserdem merke man die Näherungsformel:

$$20)\quad Si(x+h) = Si(x) + h\frac{\sin x}{x}\left\{1 - \frac{h}{2x}\right. \\ \left. + h^2\left(\frac{1}{3} - \frac{h}{4x}\right)\left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{2}\right) + \right\}\cdots + h^2\frac{\cos x}{x}\left\{\frac{1}{2} - \frac{h}{3x} + \cdots\right.$$

$$21)\quad \int_{x+h}^\infty \frac{\cos x}{x}\,dx = \int_x^\infty \frac{\cos x}{x}\,dx + h\frac{\cos x}{x}\left\{1 - \frac{h}{2x}\right. \\ \left. + h^2\left(\frac{1}{3} - \frac{h}{4x}\right)\left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{2}\right) + \cdots\right\} - h^2\frac{\sin x}{x}\left\{\frac{1}{2} - \frac{h}{3x} + \cdots\right.$$

In dieser Tafel ist $li(a) = \int_0^a \frac{dx}{\log x}$.

$$22)\quad \int_0^1 \frac{dx}{\log p + \log x} = \frac{1}{p}\,li(p).$$ Grunert's Archiv 5, 204.

$$23)\quad \int_0^1 \frac{dx}{q \pm \log x} = \pm\, e^{\mp q}\, li(e^{\pm q})$$

$$24)\quad \int_0^1 \frac{dx}{(\log p + \log x)^2} = -\frac{1}{\log p} + \frac{1}{p}\,li(p)$$

$$25)\quad \int_0^\infty \frac{e^{-px}}{q+x}\,dx = -e^{pq}\,li(e^{-pq}).$$ Schlömilch, Studien I, 18.

26) $\int_0^\infty \frac{e^{-px}}{q-x}\,dx = e^{-pq}\,li(e^{pq})$. Ibid. II, 20.

27) $\int_0^\infty \frac{e^{-px}}{q^2-x^2}\,dx = \frac{1}{2q}\{e^{-pq}\,li(e^{pq}) - e^{pq}\,li(e^{-pq})\}$. Ibid.

28) $\int_0^\infty \frac{e^{-x}}{(q+x)^2}\,dx = \frac{1}{q} + e^{q}\,li(e^{-q})$

29) $\int_0^\infty \frac{e^{-x}}{(q-x)^2}\,dx = -\frac{1}{q} + e^{-q}\,li(e^{q})$

30) $\int_1^\infty \frac{1}{\log p - \log x}\,\frac{dx}{x^2} = \frac{1}{p}\,li(p)$

31) $\int_0^1 li\left(\frac{1}{x}\right) x\,dx = 0.$

32) $\int_0^1 li(x)\,x^{p-1}\,dx = \frac{1}{p}\log(1+p),\quad p^2 \gtreqless -1$

33) $\int_{-\log p}^\infty e^{-x}\log x\,dx = p\log\left(\log\frac{1}{p}\right) - li(p)$

34) $\int_0^\infty li(e^{-x})\,e^{-x}\,dx = -\log 2$. Grunert's Arch. 9, 5.

35) $\int_0^\infty e^{-px^2}\,li(e^{-x^2})\,dx = -\sqrt{\frac{\pi}{p}}\log\left[\sqrt{p}+\sqrt{1+p}\right],\quad p > 0.$

Schlömilch, Beiträge III, 7.

36) $\int_0^\infty e^{px^2}\,li(e^{-x^2})\,dx = -\sqrt{\frac{\pi}{p}}\arcsin\sqrt{p},\qquad p < 1.$

Ibid.

37) $\int_0^\infty \log x\,\frac{\sin qx}{1+x^2}\,dx = -\frac{\pi}{4}\{e^{q}\,li(e^{-q}) + e^{-q}\,li(e^{q})\}$

38) $$\int_0^\infty log\, x \frac{cos\, q\, x}{1 + x^2}\, d\, x = \frac{\pi}{4\, q} \{e^q\, l\, i(e^{-q}) - e^{-q}\, l\, i(e^q)\}$$

39) $$\int_0^\infty log\, x \frac{x\, sin\, q\, x}{p^2 + x^2}\, d\, x = \frac{\pi}{2}\, e^{-pq}\, log\, p - \frac{\pi}{4}$$
$$\{e^{pq}\, l\, i(e^{-pq}) + e^{-pq}\, l\, i(e^{pq})\}$$

40) $$\int_0^\infty log\, x \frac{x\, cos\, q\, x}{p^2 + x^2}\, d\, x = \frac{\pi}{2\, p}\, e^{-pq}\, log\, p + \frac{\pi}{4}$$
$$\{e^{pq}\, l\, i(e^{-pq}) - e^{-pq}\, l\, i(e^{pq})\}.$$

Schlömilch, Grunert's Archiv 5, 204.

In dieser Tafel ist $Ei(a) = \int_{-a}^\infty \frac{e^{-x}\, d\, x}{x}$.

41) $$\int_0^\infty \frac{e^{-p\,x}}{x + q} = - e^{pq}\, Ei(-\, p\, q).$$ Grunert's Archiv 10, 247.

42) $$\int_0^\infty \frac{e^{-p\,x}}{x + q}\, x^a\, x = (-\ 1)^{a+1}\, q^a\, e^{pq}\, Ei\, (-\, p\, q)$$
$$+ \frac{1}{p^a} \sum_1^a 1^{n-a/1}\, (-\ p\, q)^{n-1}$$

43) $$\int_0^\infty \frac{e^{-p\,x}}{x - q}\, x^a\, d\, x = -\ q^a\, e^{-pq}\, Ei(-\, p\, q)$$
$$+ \frac{1}{p^a} \sum_1^a 1^{n-a/1}\, (-\ p\, q)^{n-1}.$$

Bierens de Haan, Verh. v. k. Ak. v. Well, Dl. 11.

44) $$\int_0^1 \frac{x^{p-1}}{q + log\, x}\, d\, x = -\ e^{-pq}\, Ei(p\, q)$$

45) $$\int_0^1 \frac{x^{p-1}}{q - log\, x}\, d\, x = e^{pq}\, Ei(-\, p\, q)$$

46) $\int_0^1 \frac{x^{q-1}}{(p+\log x)^2}\,dx = -\frac{1}{p}\{1 + pq e^{-pq} Ei(pq)\}$

47) $\int_0^1 \frac{x^{q-1}}{(p-\log x)^2}\,dx = \frac{1}{p}\{1 - pq e^{pq} Ei(-pq)\}$

48) $\int_1^\infty \frac{1}{q+\log x}\frac{dx}{x^2} = -e^q Ei(-q)$

49) $\int_1^\infty \frac{1}{q-\log x}\frac{dx}{x^2} = e^{-q} Ei(q).$

In dieser Tafel ist $Si(a) = \int_0^a \frac{\sin x}{x}\,dx,\ Ci(a) = \int_\infty^a \frac{\cos x}{x}\,dx.$

50) $\int_0^\infty \frac{e^{-qx}}{1+x^2}\,dx = \sin q\, Ci(q) + \cos q\left\{\frac{\pi}{2} - Si(q)\right\}$

Crelle, 33, 325.

51) $\int_0^1 \frac{x^{p-1}\,dx}{q^2+(\log x)^2} = Ci(pq)\cos pq + Si(pq)\sin pq - \frac{\pi}{2}\sin pq$

52) $\int_0^\infty \frac{\sin px}{x+q}\,dx = \sin pq\, Ci(pq) + \cos pq\left\{\frac{\pi}{2} - Si(pq)\right\}$

Schlömilch, Stud. II.

53) $\int_0^\infty \frac{\cos px}{x+q}\,dx = -\cos pq\, Ci(pq) + \sin pq\left\{\frac{\pi}{2} - Si(pq)\right\}$

Ibid.

54) $\int_0^\infty \frac{\sin px}{q^2-x^2}\,dx = \frac{1}{q}\{Ci(pq)\sin pq - Si(pq)\cos pq\}$. Ibid.

55) $\int_0^\infty \frac{x\cos px}{q^2-x^2}\,dx = Ci(pq)\cos pq + Si(pq)\sin pq.$ Ibid.

56) $$\int\limits_0^\infty log\left(\frac{p}{x}\right) sin\, qx \frac{x\,dx}{p^2 - x^2}$$

$$= -\frac{\pi}{2}\left\{Ci(pq)\cos pq + Si(pq)\sin pq - \frac{\pi}{2}\sin pq\right\}$$

57) $$\int\limits_0^\infty log\left(\frac{p}{x}\right) cos\, qx \frac{dx}{p^2 - x^2}$$

$$= \frac{\pi}{2p}\left\{Ci(pq)\sin pq - Si(pq)\cos pq + \frac{\pi}{2}\cos pq\right\}.$$

Schlömilch, Studien II, 21. (In der Abhandlung sind die Vorzeichen verwechselt.)

§. 109.

Die Fourier'schen Integrale.

1) Ist $b > a > 0$ und $f(x)$ endlich und stetig für jedes x zwischen a und b, so gelten die Gleichungen

$$\text{I. } f(x) = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^\infty \cos xu\,du \int\limits_a^b f(t)\cos ut\,dt$$

$$\text{II. } f(x) = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^\infty \sin xu\,du \int\limits_a^b f(t)\sin ut\,dt$$

für alle zwischen a und b enthaltenen Werthe von x. Für $x = a$ reducirt sich der Werth der rechten Seite auf $\frac{1}{2}f(a)$, für $x = b$ auf $\frac{1}{2}f(b)$. Für positive, ausserhalb jenes Intervalles liegende x verschwindet das Doppelintegral.

2) Ist $f(x)$ in dem positiven Intervalle von $x = 0$ bis $x = b$ endlich und stetig, so gelten die Gleichungen

$$\text{III. } f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \cos xu\, du \int_0^b f(t) \cos ut\, dt$$

$$\text{IV. } f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \sin xu\, du \int_0^b f(t) \sin ut\, dt$$

für alle zwischen 0 und b enthaltenen x; für $x = 0$ ist der Werth der rechten Seite $= f(0)$, für $x = b$ ist er $\frac{1}{2} f(b)$, für $x > b$ gleich Null, in der Formel III.; in der Formel IV. wird für $x = 0$ auch der Werth der rechten Seite $= 0$, für $x = b$ ist er $\frac{1}{2} f(b)$ und Null für $x > b$.

3) Die Formeln III. und IV. sind auch auf solche Functionen anwendbar, die für $x = 0$ unendlich werden, sobald nur das Integral

$$\int_0^\varrho f(t)\, dt$$

beim unendlichen ϱ einen endlichen Werth besitzt.

4) Ist für $b > \xi > a$, $f(\xi)$ discontinuirlich, nicht aber unendlich, so ist nicht $f(x)$, sondern

$$\frac{1}{2} [f(x-0) + f(x+0)]$$

der gemeinschaftliche Werth der Doppelintegrale in II. und III.

5) Die Differentiation der Gleichung $\begin{Bmatrix} \text{I.} \\ \text{IV.} \end{Bmatrix}$ ist nur dann erlaubt, wenn $\begin{Bmatrix} f(b) = 0 \\ f(b) = 0 \text{ und } f(0) = 0 \end{Bmatrix}$ ist.

Litteratur.

Die Litteratur der bestimmten Integrale findet man in den ausgezeichneten Werken von Bierens de Haan vollständig.

1) Tables d'intégrales définies av. supl. 4 parties. Amsterd. 1858 bis 1864. 4.

2) Exposé de la theorie des prop. des form. de transf. et des méth. d'évaluat. des intégrales définies. 3. part. Amsterd. 1862.

3) Nouv. Tables d'intégrales définies. Leyde 1867.
Besonders zu empfehlende Bücher sind:
Riemann, Partielle Differentialgleichungen. Braunschweig. 3. Aufl. 1882.
A. Meyer, Théorie d. intégrales définies. Brux. 1851.
G. Meyer, Theorie der bestimmten Integrale nach Dirichlet's Vorlesungen. Leipzig 1871.

ANHANG.

EINIGE NUMERISCHE TAFELN.

Zur Tafel der Function $Log\,\Gamma(1+x)$.

Es ist klar, dass $\Gamma(x)$ für beliebiges x gegeben ist, sobald man die Werthe dieser Function für

$$n < x < n + 1,$$

wobei n eine positive ganze Zahl bezeichnet, kennt. Es folgt dies unmittelbar aus dem Satze:

$$\Gamma(n+x) = x(x+1)\ldots(x+n-1)\,\Gamma(x).$$

Die Anwendung der Tafel ergiebt sich hieraus sofort.

Die Tafel gilt für die gewöhnlichen Logarithmen und ihre Berechnung gab die Reihe

$$Log\,\Gamma(1+x) = \frac{1}{2}\,Log\left(\frac{x\pi}{\sin\pi x}\right) - \frac{1}{2}\,Log\left(\frac{1+x}{1-a}\right) + T_1 x - T_3 x^3 - T_5 x^5 - T_7 x^7 - \ldots$$

Wobei die Coefficienten T folgende Werthe haben:

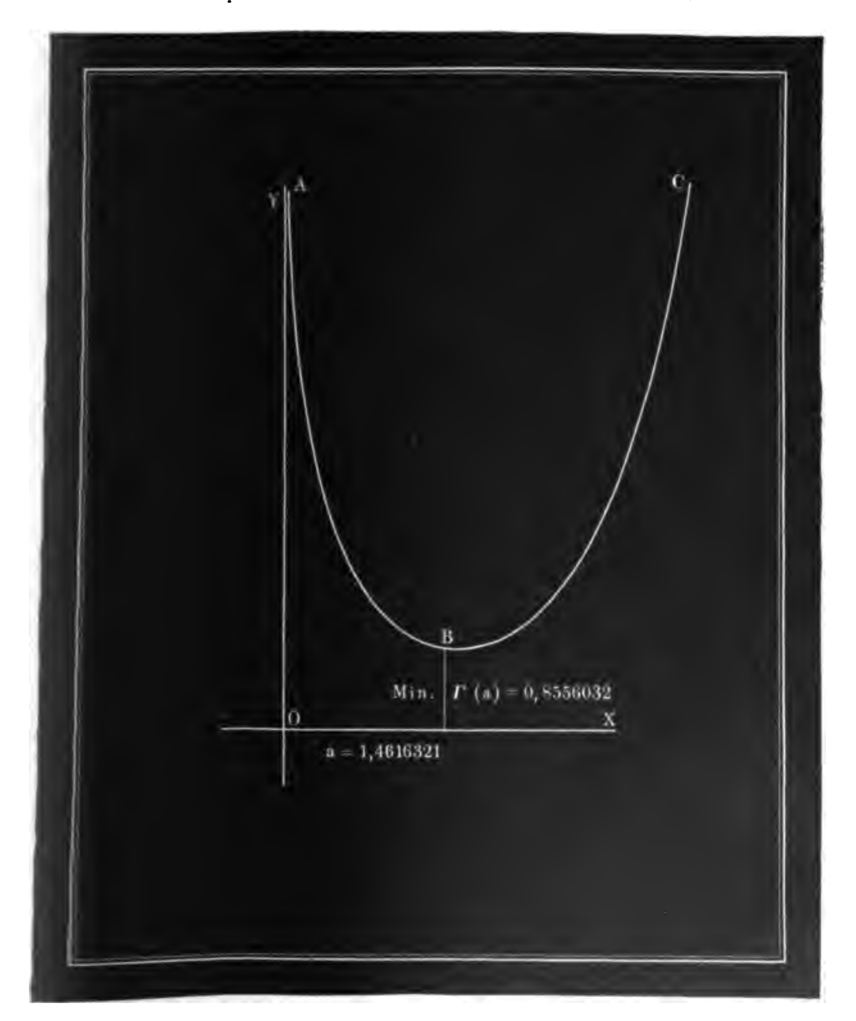
n	T_n	$Log\ T_n$
1	0,18361 29038	9,26390 31989
3	0,02925 07327	8,46613 67490
5	0,00320 75041	7,50616 72144
7	0,00051 80064	6,71433 51608
9	0,00009 69149	5,98639 04633
11	0,00001 95112	5,29028 43534
13	0,00000 40995	4,61273 27627
15	0,00000 08856	3,94724 74888

Ausführlichere Tafel findet man in Schlömilch's Analytischen Studien, I. Abtheilung.

Tafel der Function $Log\,\Gamma(x)$.

x	$Log\,\Gamma(x)$	x	$Log\,\Gamma(x)$	x	$Log\,\Gamma(x)$
1,01	9,997 528 731	1,34	9,950 469 767	1,67	9,955 830 327
1,02	9,995 127 872	1,35	9,949 951 514	1,68	9,956 649 074
1,03	9,992 796 421	1,36	9,949 480 044	1,69	9,957 502 802
1,04	9,990 533 400	1,37	9,949 054 889	1,70	9,958 391 246
1,05	9,988 337 859	1,38	9,948 675 590	1,71	9,959 314 139
1,06	9,986 208 869	1,39	9,948 341 698	1,72	9,960 271 222
1,07	9,984 145 526	1,40	9,948 052 771	1,73	9,961 262 237
1,08	9,982 146 949	1,41	9,947 808 376	1,74	9,962 282 933
1,09	9,980 212 278	1,42	9,947 608 086	1,75	9,963 345 059
1,10	9,978 340 674	1,43	9,947 451 484	1,76	9,964 436 370
1,11	9,976 531 319	1,44	9,947 338 158	1,77	9,965 560 623
1,12	9,974 783 415	1,45	9,947 267 707	1,78	9,966 717 580
1,13	9,973 096 181	1,46	9,947 239 734	1,79	9,967 907 005
1,14	9,971 468 856	1,47	9,947 253 850	1,80	9,969 128 666
1,15	9,969 900 696	1,48	9,947 309 673	1,81	9,970 382 334
1,16	9,968 390 974	1,49	9,947 406 826	1,82	9,971 667 782
1,17	9,966 938 981	1,50	9,947 544 941	1,83	9,972 984 788
1,18	9,965 544 021	1,51	9,947 723 654	1,84	9,974 333 132
1,19	9,964 205 416	1,52	9,947 942 609	1,85	9,975 712 597
1,20	9,962 922 504	1,53	9,947 201 454	1,86	9,977 122 968
1,21	9,961 694 639	1,54	9,948 499 845	1,87	9,978 564 036
1,22	9,960 521 172	1,55	9,948 837 441	1,88	9,980 035 591
1,23	9,959 401 496	1,56	9,949 213 910	1,89	9,981 537 428
1,24	9,958 334 998	1,57	9,949 628 923	1,90	9,983 069 344
1,25	9,957 321 084	1,58	9,950 082 156	1,91	9,984 631 138
1,26	9,956 359 170	1,59	9,950 573 292	1,92	9,986 222 613
1,27	9,955 448 665	1,60	9,951 102 017	1,93	9,987 843 574
1,28	9,954 589 072	1,61	9,951 668 024	1,94	9,989 493 827
1,29	9,953 779 781	1,62	9,952 271 010	1,95	9,991 173 182
1,30	9,953 020 277	1,63	9,952 910 675	1,96	9,992 881 452
1,31	9,952 310 034	1,64	9,953 586 727	1,97	9,994 618 451
1,32	9,951 648 537	1,65	9,954 298 875	1,98	9,997 277 416
1,33	9,951 035 279	1,66	9,955 046 836	1,99	9,998 177 905

Zu Seite 290.



Tafel der Function $\Gamma(x)$.

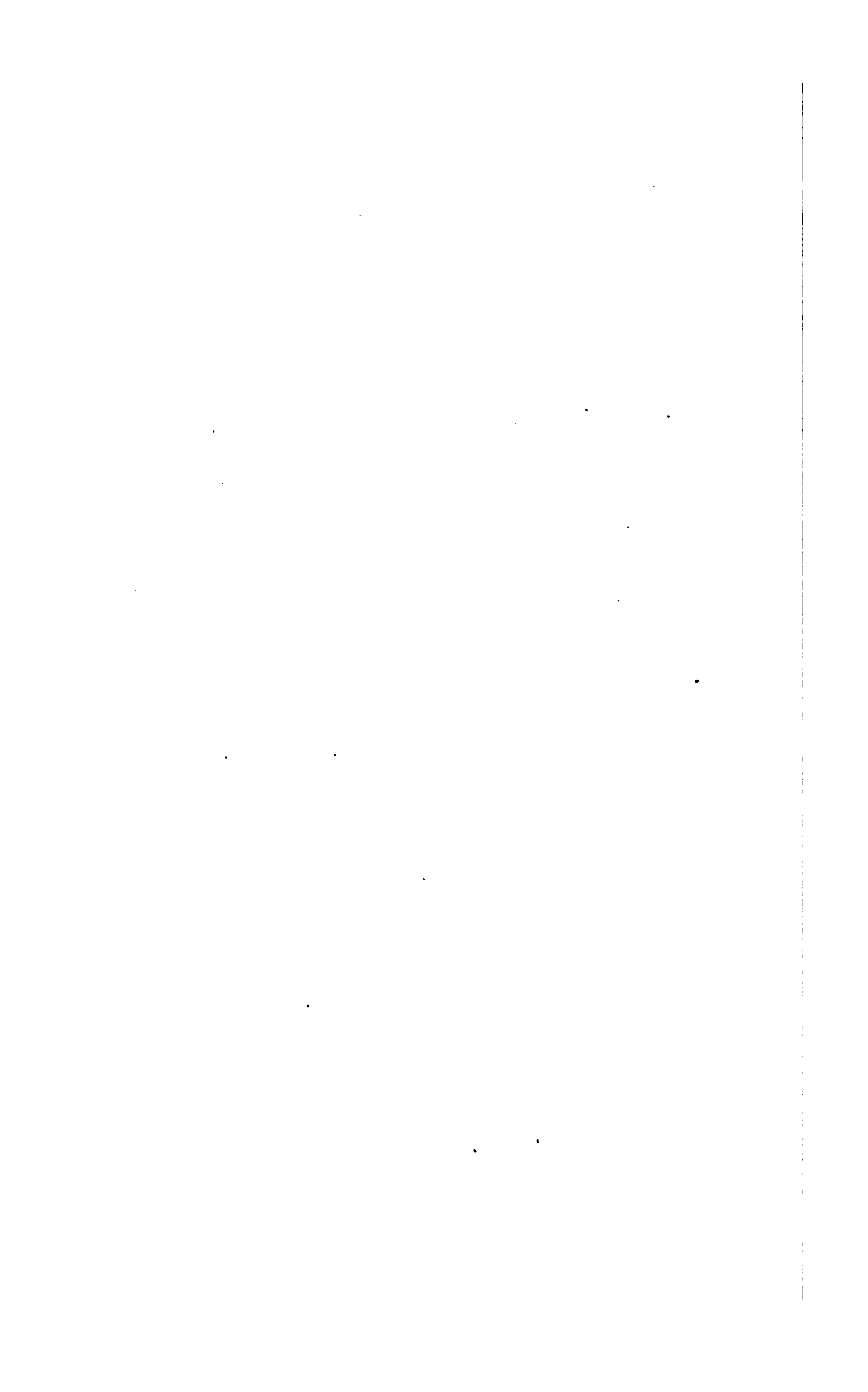
Tafel der Function $Log\,\Gamma(x)$.

x	$Log\,\Gamma(x)$	x	$Log\,\Gamma(x)$	x	$Log\,\Gamma(x)$
1,01	9,997 528 731	1,34	9,950 469 767	1,67	9,955 830 327
1,02	9,995 127 872	1,35	9,949 951 514	1,68	9,956 649 074
1,03	9,992 796 421	1,36	9,949 480 044	1,69	9,957 502 802
1,04	9,990 533 400	1,37	9,949 054 889	1,70	9,958 391 246
1,05	9,988 337 859	1,38	9,948 675 590	1,71	9,959 314 139
1,06	9,986 208 869	1,39	9,948 341 698	1,72	9,960 271 222
1,07	9,984 145 526	1,40	9,948 052 771	1,73	9,961 262 237
1,08	9,982 146 949	1,41	9,947 808 376	1,74	9,962 282 933
1,09	9,980 212 278	1,42	9,947 608 086	1,75	9,963 345 059
1,10	9,978 340 674	1,43	9,947 451 484	1,76	9,964 436 370
1,11	9,976 531 319	1,44	9,947 338 158	1,77	9,965 560 623
1,12	9,974 783 415	1,45	9,947 267 707	1,78	9,966 717 580
1,13	9,973 096 181	1,46	9,947 239 734	1,79	9,967 907 005
1,14	9,971 468 856	1,47	9,947 253 850	1,80	9,969 128 666
1,15	9,969 900 696	1,48	9,947 309 673	1,81	9,970 382 334
1,16	9,968 390 974	1,49	9,947 406 826	1,82	9,971 667 782
1,17	9,966 938 981	1,50	9,947 544 941	1,83	9,972 984 788
1,18	9,965 544 021	1,51	9,947 723 654	1,84	9,974 333 132
1,19	9,964 205 416	1,52	9,947 942 609	1,85	9,975 712 597
1,20	9,962 922 504	1,53	9,947 201 454	1,86	9,977 122 968
1,21	9,961 694 639	1,54	9,948 499 845	1,87	9,978 564 036
1,22	9,960 521 172	1,55	9,948 837 441	1,88	9,980 035 591
1,23	9,959 401 496	1,56	9,949 213 910	1,89	9,981 537 428
1,24	9,958 334 998	1,57	9,949 628 923	1,90	9,983 069 344
1,25	9,957 321 084	1,58	9,950 082 156	1,91	9,984 631 138
1,26	9,956 359 170	1,59	9,950 573 292	1,92	9,986 222 613
1,27	9,955 448 685	1,60	9,951 102 017	1,93	9,987 843 574
1,28	9,954 589 072	1,61	9,951 668 024	1,94	9,989 493 827
1,29	9,953 779 781	1,62	9,952 271 010	1,95	9,991 173 182
1,30	9,953 020 277	1,63	9,952 910 675	1,96	9,992 881 452
1,31	9,952 310 034	1,64	9,953 586 727	1,97	9,994 618 451
1,32	9,951 648 537	1,65	9,954 298 875	1,98	9,997 277 416
1,33	9,951 035 279	1,66	9,955 046 836	1,99	9,998 177 905

Zu Seite 290.



Tafel der Function $\Gamma(x)$.



Tafeln der transcendenten Integrale.

I.

NB. $\int\limits_{\infty}^{-x} \frac{dx}{x} e^{-x} = Ei(x) = A + \frac{1}{4} \log(x^4) + x + \frac{1}{2} \cdot \frac{x^2}{2!} + \frac{1}{3} \cdot \frac{x^3}{3!} + \cdots \quad Ei\, e^x = Ei(x).$

x	$Ei(x)$	$Ei(-x)$
1	1,895 117 816	— 0,219 383 934
2	4,954 234 356	— 0,048 900 511
3	9,933 832 571	— 0,013 048 382
4	19,630 874 470	— 0,003 779 352
5	40,185 275 356	— 0,001 148 296
6	85,989 762 142	— 0,000 360 082
7	191,504 743 336	— 0,000 115 482
8	440,379 899 535	— 0,000 037 666
9	1037,878 290 717	— 0,000 012 447
10	2492,228 976 242	— 0,000 004 157

$Ei(+\infty) = \infty$ $\qquad$ $Ei(-\infty) = 0$

II.

NB. $Si(x) = x - \frac{1}{3} \frac{x^3}{3!} + \frac{1}{5} \frac{x^5}{5!} - \cdots = \int\limits_0^x \frac{dx}{x} \sin x$

$Ci(x) = A + \frac{1}{4} \log x^4 - \frac{1}{2} \frac{x^2}{2!} + \frac{1}{4} \frac{x^4}{4!} - \cdots = \int\limits_{\infty}^{x} \frac{dx}{x} \cos x.$

x	$Si(x)$	$Ci(x)$
1	0,946 083 070	+ 0,337 403 923
2	1,605 412 977	+ 0,422 980 829
3	1,848 652 528	+ 0,119 629 786
4	1,758 203 139	— 0,140 981 698
5	1,549 931 245	— 0,190 029 750
6	1,424 687 551	— 0,068 057 244
7	1,454 596 614	+ 0,076 695 278
8	1,574 186 822	+ 0,122 433 883
9	1,665 040 076	+ 0,055 347 531
10	1,658 347 594	— 0,045 456 433
100	1, 56 222 55	— 0,51488
1000	1, 57 023 31	+ 0,0008263
10 000	1, 57 089 15	+ 0,0000306
100 000	1, 57 079 54	— 0,0000004

$Si(\infty) = \frac{\pi}{2}$ $\qquad$ $Ci(\infty) = 0$

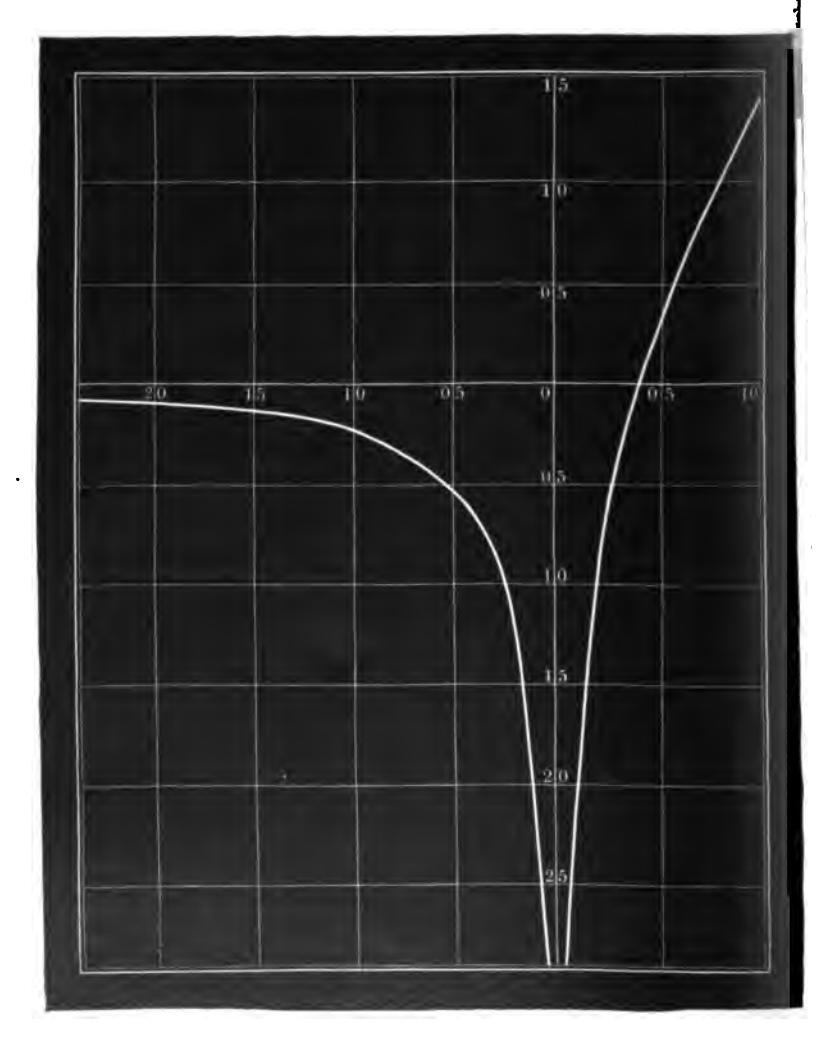
III.

Tafel der Function $Ei(-x)$.

$$Ei(-x) = \int_{\infty}^{x} \frac{e^{-u}}{u}\, du.$$

x	$Ei(-x)$	x	$Ei(-x)$	x	$Ei(-x)$
0,01	— 4,037 929 577	0,34	— 0,814 745 580	0,67	— 0,395 852 563
0,02	— 3,354 707 783	0,35	— 0,794 215 435	0,68	— 0,388 309 243
0,03	— 2,959 118 724	0,36	— 0,774 462 218	0,69	— 0,380 950 010
0,04	— 2,681 263 689	0,37	— 0,755 441 428	0,70	— 0,373 768 843
0,05	— 2,467 898 489	0,38	— 0,737 112 144	0,71	— 0,366 759 981
0,06	— 2,295 306 918	0,39	— 0,719 436 652	0,72	— 0,359 917 914
0,07	— 2,150 838 180	0,40	— 0,702 380 119	0,73	— 0,353 237 361
0,08	— 2,026 941 003	0,41	— 0,685 910 311	0,74	— 0,346 713 279
0,09	— 1,918 744 770	0,42	— 0,669 997 342	0,75	— 0,340 340 813
0,10	— 1,822 923 958	0,43	— 0,654 613 448	0,76	— 0,334 115 321
0,11	— 1,737 106 694	0,44	— 0,639 732 798	0,77	— 0,328 032 346
0,12	— 1,659 541 752	0,45	— 0,625 331 316	0,78	— 0,322 087 610
0,13	— 1,588 899 305	0,46	— 0,611 386 530	0,79	— 0,316 277 004
0,14	— 1,524 145 722	0,47	— 0,597 877 429	0,80	— 0,310 596 579
0,15	— 1,464 461 671	0,48	— 0,584 784 344	0,81	— 0,305 042 539
0,16	— 1,409 186 699	0,49	— 0,572 088 836	0,82	— 0,299 611 236
0,17	— 1,357 780 653	0,50	— 0,559 773 595	0,83	— 0,294 299 155
0,18	— 1,309 796 135	0,51	— 0,547 822 352	0,84	— 0,289 102 918
0,19	— 1,264 858 424	0,52	— 0,536 219 798	0,85	— 0,284 019 269
0,20	— 1,222 650 544	0,53	— 0,524 951 510	0,86	— 0,279 045 070
0,21	— 1,182 901 986	0,54	— 0,514 003 886	0,87	— 0,274 177 301
0,22	— 1,145 380 055	0,55	— 0,503 364 081	0,88	— 0,269 413 046
0,23	— 1,109 883 139	0,56	— 0,493 019 959	0,89	— 0,264 749 496
0,24	— 1,076 235 415	0,57	— 0,482 960 034	0,90	— 0,260 183 939
0,25	— 1,044 282 634	0,58	— 0,473 173 433	0,91	— 0,255 713 758
0,26	— 1,013 888 737	0,59	— 0,463 649 849	0,92	— 0,251 336 425
0,27	— 0,984 933 101	0,60	— 0,454 379 503	0,93	— 0,247 049 501
0,28	— 0,957 308 300	0,61	— 0,445 353 112	0,94	— 0,242 850 627
0,29	— 0,930 918 246	0,62	— 0,436 561 854	0,95	— 0,238 737 524
0,30	— 0,905 676 652	0,63	— 0,427 997 338	0,96	— 0,234 707 988
0,31	— 0,881 505 746	0,64	— 0,419 651 581	0,97	— 0,230 759 890
0,32	— 0,858 335 189	0,65	— 0,411 516 976	0,98	— 0,226 891 167
0,33	— 0,836 101 161	0,66	— 0,403 586 275	0,99	— 0,223 099 826

Zu Seite 293.



Tafel der Function $Ei(x)$.

IV.

Tafel der Function $Ei(x)$.

$$Ei(x) = \int_{\infty}^{-x} \frac{e^{-u}}{u}\,du.$$

x	$Ei(x)$	x	$Ei(x)$	x	$Ei(x)$
0,01	— 4,017 929 465	0,34	— 0,130 363 294	0,67	0,978 019 042
0,02	— 3,314 706 894	0,35	— 0,089 434 002	0,68	1,007 116 121
0,03	— 2,899 115 724	0,36	— 0,049 258 018	0,69	1,036 076 576
0,04	— 2,601 256 576	0,37	— 0,009 790 149	0,70	1,064 907 195
0,05	— 2,367 884 599	0,38	+ 0,029 011 221	0,71	1,093 614 501
0,06	— 2,175 282 916	0,39	0,067 184 501	0,72	1,122 204 777
0,07	— 2,010 800 064	0,40	0,104 765 219	0,73	1,150 684 069
0,08	— 1,866 884 103	0,41	0,141 786 307	0,74	1,179 058 208
0,09	— 1,738 663 750	0,42	0,178 278 353	0,75	1,207 332 816
0,10	— 1,622 812 814	0,43	0,214 269 821	0,76	1,235 513 319
0,11	— 1,516 958 751	0,44	0,249 787 245	0,77	1,263 604 960
0,12	— 1,419 349 669	0,45	0,284 855 405	0,78	1,291 612 805
0,13	— 1,328 655 070	0,46	0,319 497 483	0,79	1,319 541 753
0,14	— 1,243 840 654	0,47	0,353 735 196	0,80	1,347 396 548
0,15	— 1,164 086 417	0,48	0,387 588 924	0,81	1,375 181 783
0,16	— 1,088 731 238	0,49	0,421 077 819	0,82	1,402 901 910
0,17	— 1,017 234 290	0,50	0,454 219 905	0,83	1,430 561 245
0,18	— 0,949 147 505	0,51	0,487 032 167	0,84	1,458 163 978
0,19	— 0,884 095 487	0,52	0,519 530 632	0,85	1,485 714 176
0,20	— 0,821 760 588	0,53	0,551 730 445	0,86	1,513 215 791
0,21	— 0,761 871 624	0,54	0,583 645 931	0,87	1,540 672 664
0,22	— 0,704 195 225	0,55	0,615 290 657	0,88	1,568 088 534
0,23	— 0,648 529 103	0,56	0,646 677 490	0,89	1,595 467 036
0,24	— 0,594 696 758	0,57	0,677 818 642	0,90	1,622 811 714
0,25	— 0,542 543 265	0,58	0,708 725 720	0,91	1,650 126 019
0,26	— 0,491 931 883	0,59	0,739 409 764	0,92	1,677 413 317
0,27	— 0,442 741 312	0,60	0,769 881 290	0,93	1,704 676 891
0,28	— 0,394 863 445	0,61	0,800 150 320	0,94	1,731 919 946
0,29	— 0,348 201 510	0,62	0,830 226 417	0,95	1,759 145 612
0,30	— 0,302 668 539	0,63	0,860 118 716	0,96	1,786 356 947
0,31	— 0,258 186 076	0,64	0,889 835 948	0,97	1,813 556 941
0,32	— 0,214 683 096	0,65	0,919 386 468	0,98	1,840 748 519
0.33	— 0,172 095 092	0,66	0,948 778 276	0.99	1,867 934 543

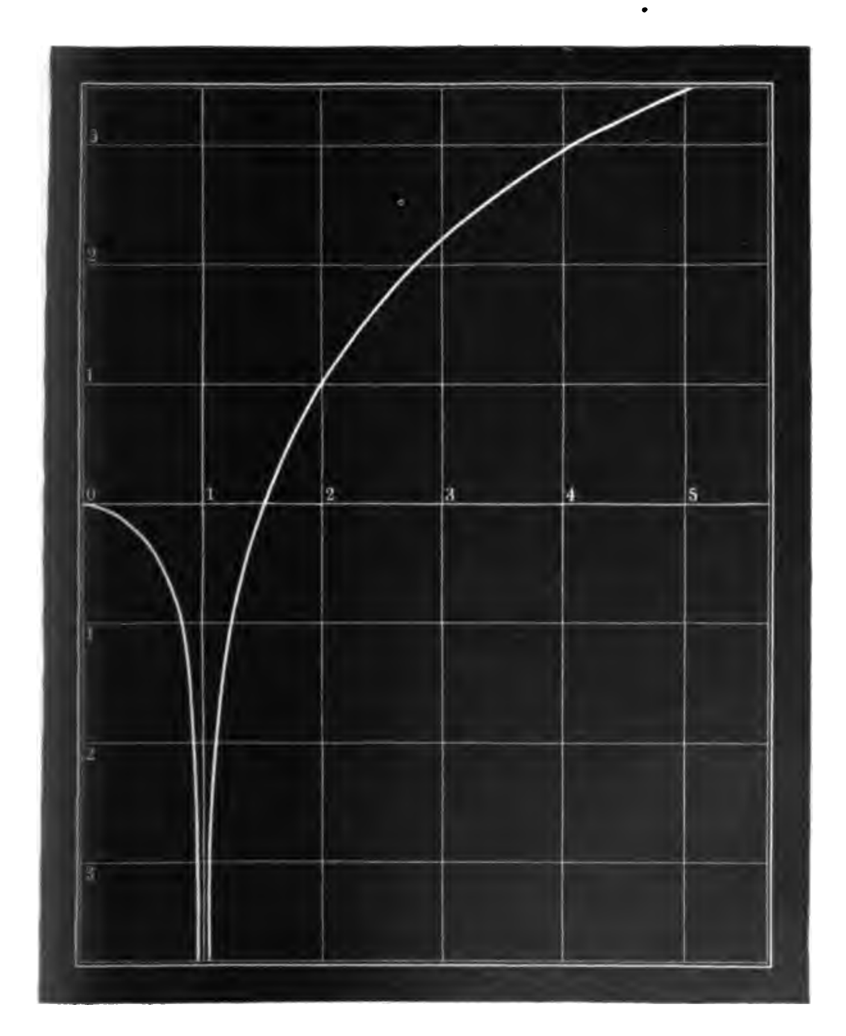
V.

Tafel der Function $Ci(x)$.

$$Ci(x) = \int_{\infty}^{x} \frac{\cos u}{u}\, du.$$

x	$Ci(x)$	x	$Ci(x)$	x	$Ci(x)$
0,01	— 4,027 979 521	0,34	— 0,530 355 152	0,67	0,066 591 359
0,02	— 3,334 907 339	0,35	— 0,503 075 569	0,68	0,078 157 666
0,03	— 2,929 567 224	0,36	— 0,476 661 126	0,69	0,089 463 320
0,04	— 2,642 060 133	0,37	— 0,451 066 976	0,70	0,100 514 707
0,05	— 2,419 141 544	0,38	— 0,426 251 855	0,71	0,111 317 953
0,06	— 2,237 094 917	0,39	— 0,402 177 704	0,72	0,121 878 932
0,07	— 2,083 269 122	0,40	— 0,378 809 346	0,73	0,132 203 288
0,08	— 1,950 112 553	0,41	— 0,356 114 201	0,74	0,142 296 440
0,09	— 1,832 754 260	0,42	— 0,334 062 035	0,75	0,152 163 601
0,10	— 1,727 868 387	0,43	— 0,312 624 740	0,76	0,161 809 783
0,11	— 1,633 082 724	0,44	— 0,291 776 136	0,77	0,171 239 811
0,12	— 1,546 645 712	0,45	— 0,271 491 800	0,78	0,180 458 334
0,13	— 1,467 227 190	0,46	— 0,251 748 910	0,79	0,189 469 829
0,14	— 1,393 793 192	0,47	— 0,232 526 107	0,80	0,198 278 616
0,15	— 1,325 524 049	0,48	— 0,213 803 373	0,81	0,206 888 861
0,16	— 1,261 758 976	0,49	— 0,195 561 917	0,82	0,215 304 586
0,17	— 1,201 957 483	0,50	— 0,177 784 079	0,83	0,223 529 675
0,18	— 1,145 671 836	0,51	— 0,160 453 239	0,84	0,231 567 882
0,19	— 1,092 526 978	0,52	— 0,143 553 736	0,85	0,239 422 837
0,20	— 1,042 205 596	0,53	— 0,127 070 794	0,86	0,247 098 049
0,21	— 0,994 436 845	0,54	— 0,110 990 457	0,87	0,254 596 915
0,22	— 0,948 987 692	0,55	— 0,095 299 527	0,88	0,261 922 726
0,23	— 0,905 656 189	0,56	— 0,079 985 513	0,89	0,269 078 669
0,24	— 0,864 266 175	0,57	— 0,065 036 574	0,90	0,276 067 830
0,25	— 0,824 663 063	0,58	— 0,050 411 481	0,91	0,282 893 207
0,26	— 0,786 710 453	0,59	— 0,036 189 571	0,92	0,289 557 702
0,27	— 0,750 287 386	0,60	— 0,022 270 707	0,93	0,296 064 136
0,28	— 0,715 286 096	0,61	— 0,008 675 249	0,94	0,302 415 246
0,29	— 0,681 610 154	0,62	+ 0,004 605 985	0,95	0,308 613 691
0,30	— 0,649 172 933	0,63	+ 0,017 581 742	0,96	0,314 662 055
0,31	— 0,617 896 322	0,64	0,030 260 369	0,97	0,320 562 849
0,32	— 0,587 709 640	0,65	0,042 649 829	0,98	0,326 318 518
0,33	— 0,558 548 725	0,66	0,054 757 734	0,99	0,331 931 438

Zu Seite 294.



Tafel der Function $Ci(x)$.

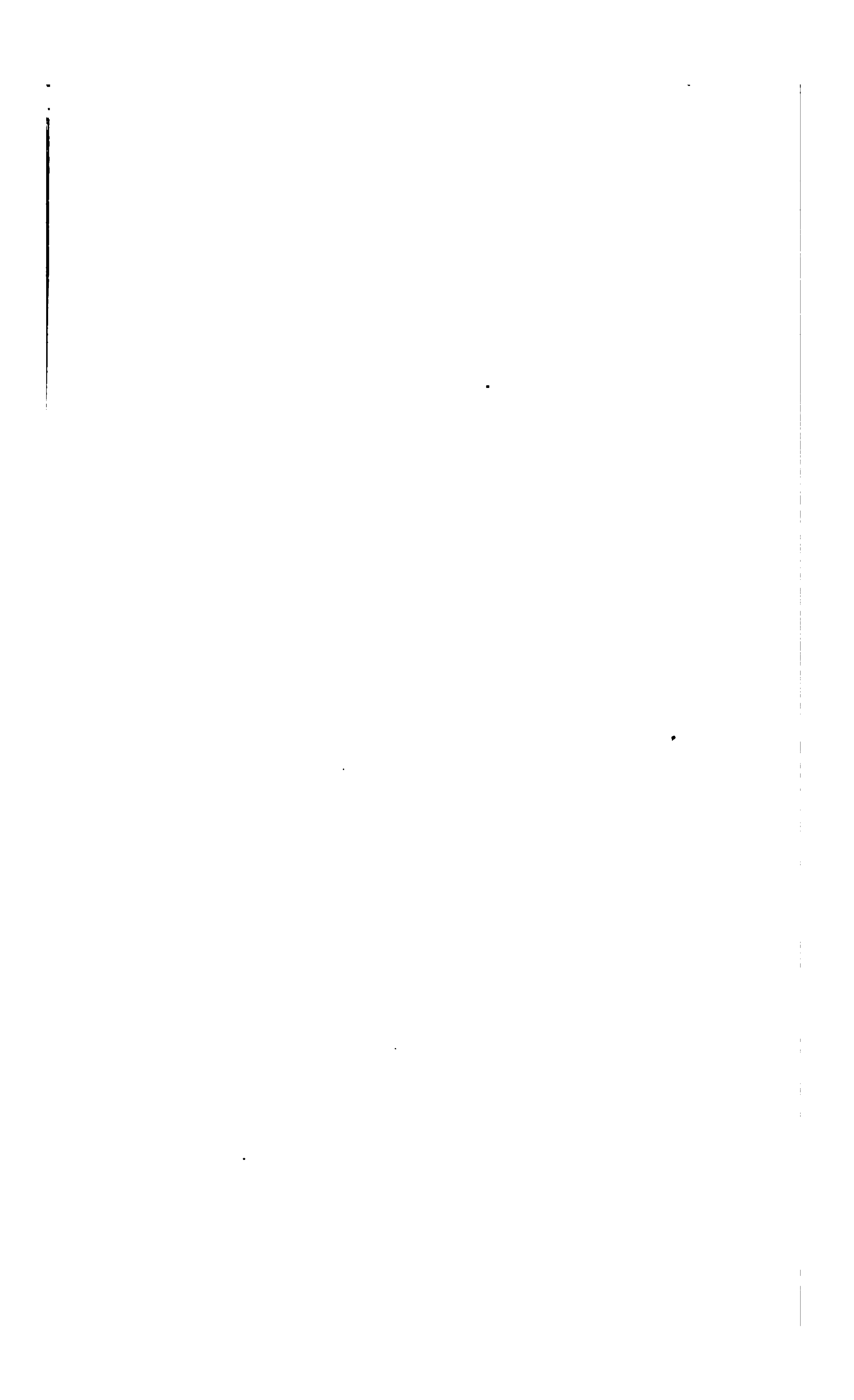
VI. Tafel der Function $Si(x)$.

$$Si(x) = \int_0^x \frac{\sin u}{u}\, du.$$

x	$Si(x)$	x	$Si(x)$	x	$Si(x)$
0,01	0,009 999 944	0,34	0,337 824 002	0,67	0,653 514 256
0,02	0,019 999 556	0,35	0,347 626 791	0,68	0,662 771 982
0,03	0,029 998 500	0,36	0,357 418 056	0,69	0,672 008 072
0,04	0,039 996 445	0,37	0,367 197 475	0,70	0,681 222 239
0,05	0,049 993 056	0,38	0,376 964 729	0,71	0,690 414 196
0,06	0,059 988 001	0,39	0,386 719 499	0,72	0,699 583 659
0,07	0,069 980 947	0,40	0,396 461 465	0,73	0,708 730 343
0,08	0,079 971 561	0,41	0,406 190 310	0,74	0,717 853 966
0,09	0,089 959 510	0,42	0,415 905 717	0,75	0,726 954 247
0,10	0,099 944 461	0,43	0,425 607 369	0,76	0,736 030 907
0,11	0,109 926 082	0,44	0,435 294 951	0,77	0,745 083 666
0,12	0,119 904 041	0,45	0,444 968 149	0,78	0,754 112 249
0,13	0,129 878 006	0,46	0,454 626 648	0,79	0,763 116 380
0,14	0,139 847 645	0,47	0,464 270 136	0,80	0,772 095 785
0,15	0,149 812 627	0,48	0,473 898 301	0,81	0,781 050 192
0,16	0,159 772 619	0,49	0,483 510 832	0,82	0,789 979 329
0,17	0,169 729 292	0,50	0,493 107 418	0,83	0,798 882 928
0,18	0,179 676 315	0,51	0,502 687 751	0,84	0,807 760 719
0,19	0,189 619 357	0,52	0,512 251 521	0,85	0,816 612 437
0,20	0,199 556 089	0,53	0,521 798 423	0,86	0,825 437 817
0,21	0,209 486 180	0,54	0,531 328 150	0,87	0,834 236 595
0,22	0,219 409 303	0,55	0,540 840 395	0,88	0,843 008 510
0,23	0,229 325 127	0,56	0,550 334 856	0,89	0,851 753 302
0,24	0,239 233 326	0,57	0,559 811 230	0,90	0,860 470 711
0,25	0,249 133 570	0,58	0,569 269 214	0,91	0,869 160 481
0,26	0,259 025 534	0,59	0,578 708 507	0,92	0,877 822 356
0,27	0,268 908 889	0,60	0,588 128 810	0,93	0,886 456 084
0,28	0,278 783 309	0,61	0,597 529 823	0,94	0,895 061 411
0,29	0,288 648 469	0,62	0,606 911 250	0,95	0,903 638 088
0,30	0,298 504 044	0,63	0,616 272 794	0,96	0,912 185 866
0,31	0,308 349 708	0,64	0,625 614 160	0,97	0,920 704 497
0,32	0,318 185 138	0,65	0,634 935 054	0,98	0,929 193 737
0,33	0,328 010 010	0,66	0,644 235 183	0,99	0,937 653 342

II.

FUNCTIONENTHEORIE.



§. 110.

Einwerthige Functionen.

1) Die nothwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass eine einwerthige Function in einem Punkte $z = a$ endlich und stetig bleibt, ist

$$\lim_{z=a} \{(z - a)\,\varphi(z)\} = 0.$$

2) Wird eine einwerthige Function für keinen endlichen oder unendlichen Werth der Variabelen unendlich gross, so ist sie eine Constante.

3) Eine einwerthige Function muss mindestens einmal einen beliebigen Werth (auch 0 und ∞) annehmen.

4) Wird eine einwerthige Function unendlich, so kann sie nur von einer ganzen Ordnung unendlich werden.

5) Die endlichen Unstetigkeitspunkte einer einwerthigen Function $\varphi(z)$ sind mit denen der derivirten $\varphi'(z)$ identisch.

6) Ist eine einwerthige Function im Punkte $z = \infty$ endlich, so ist ihre Derivirte in diesem Punkte gleich Null, und zwar mindestens von der zweiten Ordnung.

7) Wird eine einwerthige Function nur für $z = \infty$ unendlich von endlicher Ordnung (n), so ist sie eine ganze Function $n$ten Grades.

Wird sie von unendlicher Ordnung unendlich, so lässt sie sich nach Potenzen von z in eine stets convergirende Reihe verwandeln.

8) Wird eine einwerthige Function nur eine endliche Anzahl von Malen unendlich, so ist sie eine rationale Function.

9) Eine einwerthige Function wird ebenso oft Mal 0 als $\varkappa$ als ∞, wenn $\varkappa$ eine beliebige Zahl bedeutet.

10) Die allgemeine Form einer einwerthigen Function ist

$$\varphi(z) = C \cdot \frac{\Pi(z - a_\varkappa)^{n_\varkappa}}{\Pi(z - b_\varkappa)^{m_\varkappa}}.$$

C ist eine Constante, $a_\varkappa$ sind die Nullpunkte, $b_\varkappa$ jene, in denen $\varphi(z)$ unendlich wird.

Functionen mit Verzweigungspunkten.

1) Sind $z = a$ und $w_a = f(a)$ zwei einander entsprechende endliche Punkte und ist weder $z = a$ ein Verzweigungspunkt von w, noch w_a ein solcher von z, so ist

$$lim \frac{w - w_a}{z - a}$$

endlich und nicht Null.

2) Hat w in $z = b$ einen Windungspunkt $(m - 1)$ter Ordnung, z aber, als Function von w betrachtet, in $w = w_b$ keinen Verzweigungspunkt, so ist

$$lim \frac{w - w_b}{(z - b)^{\frac{1}{m}}}$$

endlich und von Null verschieden. Es ist sodann $\frac{dw}{dz}$ in b unendlich gross, jedoch so, dass

$$lim \{w - w_b\}^{m-1} \frac{dw}{dz}$$

und

$$lim (z - b)^{\frac{m-1}{m}} \frac{dw}{dz}$$

weder Null noch unendlich ist.

3) Hat w an der Stelle $z = b$ einen Windungspunkt $(m-1)$ter Ordnung, z als Function von w einen solchen von $(\mu - 1)$ter Ordnung an der entsprechenden Stelle $w = w_b$, so ist

$$lim \frac{(w - w_b)^{\frac{1}{\mu}}}{(z - b)^{\frac{1}{m}}}$$

endlich und von Null verschieden. Es wird in diesem Falle $\frac{dw}{dz}$ Null oder unendlich gross, je nachdem $\mu >$ oder $< m$ ist, und zwar so, dass

$$lim \{w - w_b\}^{\frac{m-\mu}{\mu}}$$

und

$$lim \{z - b\}^{\frac{m-\mu}{m}}$$

weder Null noch unendlich ist.

4) Wird w in einem Windungspunkte $(m - 1)$ter Ordnung $z = b$ unendlich gross von der Ordnung $\frac{\mu}{m}$, so ist $w = \infty$ selbst zugleich ein Windungspunkt $(\mu - 1)$ter Ordnung und umgekehrt: $\frac{dw}{dz}$ wird von der Ordnung $\frac{m+\mu}{m}$ unendlich.

5) Eine Function w, die für jeden Werth von $z\, n$ Werthe besitzt und nur eine endliche Anzahl von Malen unendlich wird, ist eine algebraische Function.

6) Eine n werthige Function, die m Mal unendlich wird, die Wurzel einer algebraischen Gleichung zwischen w und z, die in Bezug auf w vom n ten, und deren Coefficienten in Bezug auf z vom m ten Grade sind.

§. 111.

Integrale.

1) Wird das Integral $\int f(z)\,dz$ auf die Begrenzung eines Flächentheiles ausgedehnt, in welchem $f(z)$ nur in dem Punkte $z = a$, der kein Verzweigungspunkt ist, unstetig wird, so dass

$$\left\{(z-a)f(z)\right\}_{z=a} = p$$

und p weder Null noch unendlich, so wird

$$\int f(z)\,dz = 2\,i\,\pi\,p.$$

2) Sei $\varphi(z)$ eine Function, die im Flächentheile T stetig bleibt und ohne Verzweigungspunkte ist, so hat

$$f(z) = \frac{\varphi(z)}{z-t},$$

wenn t ein beliebiger Punkt der Fläche T ist, die verlangte Eigenschaft, und wir haben

$$\varphi(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_T \frac{\varphi(z)}{z-t}\,dz$$

und innerhalb dieses Gebietes auch

$$\varphi^{(n)}(t) = \frac{n!}{2\pi i}\int_T \frac{\varphi(z)}{(z-t)^{n+1}}\,dz.$$

3) Sei $mod(t-a) < mod(z-a)$, so wird

$$\varphi(t) = \varphi(a) + (t-a)\varphi'(a) + \frac{(t-a)^2}{1.2}\varphi''(a) + \cdots$$

4) Besitzt die Function innerhalb des Gebietes T auch Unstetigkeitspunkte, die jedoch keine Verzweigungspunkte sind, etwa

$$a_1, a_2, \ldots a_n,$$

so wird, wenn

$$Q^{(m)} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\varphi(z)}{z^m}\, d\vartheta, \quad z = R(\cos\vartheta + i\sin\vartheta)$$

$$C_x^{(p)} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} (z-a_x)^p\, \varphi(z)\, d\vartheta, \quad z - a_x = r_x(\cos\vartheta + i\sin\vartheta)$$

gesetzt wird,

$$\varphi(t) = \sum_0^\infty{}^x Q^x t^x + \sum_1^n{}^\lambda \sum_0^\infty{}^x \frac{c^{(x)}}{(t-a_\lambda)^x}.$$

5) Das Integral $\int f(z)dz$ genommen um einen Unstetigkeitspunkt, um welchem die z Fläche sich m Mal windet, und in welchem nur eine polare Unstetigkeit stattfindet, hat dann und nur dann einen von Null verschiedenen Werth, wenn in dem Ausdrucke, welcher die Art des Unendlichwerdens angiebt, das Glied, das von der ersten Ordnung unendlich gross wird, vorhanden ist; und dieser Werth ist dann $2m\pi i$ Mal dem Coefficienten dieses Gliedes.

War also b ein Unstetigkeitspunkt, in welchem m Blätter der Fläche zusammenhängen, so hat man im Convergenzbereich des Punktes b

$$f(z) = \frac{g'}{(z-b)^{\frac{1}{m}}} + \cdots \frac{g^{(m)}}{z-b} + \cdots \frac{g^{(n)}}{(z-b)^{\frac{n}{m}}} + \psi(z),$$

wo $\psi(z)$ in $z = b$ endlich und stetig ist, so wird

$$\int f(z)\, dz = 2m\pi i g^m.$$

Alle diese Sätze bezogen sich auf Integrale über geschlossene Flächen.

6) Aus

$$\varphi(z) = \sum_1^n \frac{c^{(x)}}{(z-a)^x} + \psi(z),$$

wo $\psi(z)$ für $z = a$ endlich bleibt, folgt, wenn

$$F(t) = \int_h^t \varphi(z)\,dz$$

h, eine Constante gesetzt wird

$$F(t) = c' \log(t-a) - \sum_1^n \frac{c^{(n)}}{(n-1)(t-a)^{n-1}} + \lambda(t)$$

wird $t = a$, so wird $F(t)$ logarithmisch unendlich und wir erhalten den allgemeinen Satz: Die Integralfunction

$$F(t) = \int_h^t \varphi(z)\,dz$$

einer algebraischen Function $\varphi(z)$ hat für $t = a$ dann und nur dann einen endlichen Werth, wenn $\lim(z-a)\varphi(z) = 0$ ist.

Ist $\lim(z-a)\varphi(z)$ endlich, aber von Null verschieden, so ist $F(t)$ für $t = a$ logarithmisch unendlich.

Ist

$$\lim(z-a)^\mu \varphi(z), \quad \mu \gtrless 1$$

endlich und von Null verschieden, so ist $F(t)$ von einer ganzen oder gebrochenen Ordnung, und wenn in der Entwickelung von $\varphi(z)$ das Glied von der Form $\frac{g}{z-a}$ vorhanden ist, zugleich logarithmisch unendlich.

Für den Fall $t = \infty$ setze $z = \frac{1}{u}$ und bilde

$$F(t) = \int_h^t \varphi(z)\,dz = -\int_{\frac{1}{h}}^u \frac{\varphi_1(u)\,du}{u^2} = F_1(u)$$

und man hat sofort den vorigen Fall vor sich.

§. 112.

Einige Begriffe aus der neueren Functionentheorie.

1) Eine Reihe von der Form

$$\mathfrak{P}(x/a) = \sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu (x-a)^\nu,$$

deren Convergenzbereich ein mit dem Radius a beschriebener Kreis ist, an dessen Stellen die Reihe einen bestimmten Werth annimmt und stetig ist, ferner Ableitungen aller Ordnungen besitzt, ist eine convergente Potenzreihe im Bereiche A.

2) Sei b irgend eine Stelle in A, und B der Convergenzbereich von b, so kann es geschehen, dass ein Theil von B über A hinausragt, dann nennen wir die Reihe $\mathfrak{P}(x/a, b)$ die Fortsetzung von $\mathfrak{P}(x/a)$. (Vergl. §. 113, 8.)

3) Unter singulären Stellen verstehen wir solche Stellen der wahren Convergenzgrenze von A, in deren Umgebung keine durch Vermittlung einer Stelle b aus $\mathfrak{P}(x/a)$ ableitbare Reihe existirt.

4) Sodann definiren wir die Gesammtheit der aus einer gegebenen Reihe ableitbaren und in einander fortsetzbaren Potenzreihen als eine monogene analytische Function.

5) Eine jede Reihe heisst ein Element der Function.

6) Erhält man auf allen Uebergängen von dem Elemente $\mathfrak{P}(x/a)$ zu einem anderen $\mathfrak{P}_1(x/a)$ dieselbe Reihe, so nennt man die durch ihre Gesammtheit dargestellte Function eine eindeutige analytische Function im Gegensatz zu der viel- oder mehrdeutigen.

7) Sei $f(x)$ eine eindeutige Function. Lässt sich dieselbe in der Umgebung von a in eine Reihe $\mathfrak{P}(x/a)$ darstellen, so sagt man, die Function sei an dieser Stelle regulär.

8) Sei $f(x)$ eine gegebene Function und c eine singuläre Stelle derselben, und sei das Product

$$(x - c)^m f(x),$$

wo m eine positive ganze Zahl bezeichnet, eine in der Umgebung von c reguläre Function, so dass

$$(x - c)^m f(x) = \sum_{\mu=-m}^{\infty} a_\mu (x - c)^\mu.$$

Alsdann können zwei Fälle eintreten, entweder giebt es eine solche Potenz m, oder es giebt keine; im ersteren Falle nennen wir die Potenz c eine ausserwesentlich, im letzteren eine wesentlich singuläre. Versteht man unter $x - \infty$ stets die Grösse $\frac{1}{x}$, so sind die ausserwesentlichen Stellen der Function $f(x)$ dadurch gekennzeichnet, dass für sie

$$\{(x-c)^m f(x)\}_{x=c}, \quad \left\{\frac{1}{x^m} f(x)\right\}_{x=\infty}$$

weder Null noch unendlich werden. Nach dem Exponenten m heisst die ausserwesentliche Stelle eine $m$fache oder von der $m$ten Ordnung.

9) Eine rationale Function hat keine wesentlich singuläre Stelle und umgekehrt ist eine jede eindeutige analytische Function, deren Stetigkeitsbereich nur durch ausserwesentlich singuläre Stellen begrenzt ist, eine rationale Function.

10) Fügt man dem Stetigkeitsbereich einer Function die ausserwesentlich singulären Stellen hinzu, so entsteht ein Bereich A', in welchem sich die Function wie eine rationale verhält. Dieser Bereich ist ein begrenzter oder unbegrenzter, je nachdem die Function eine rationale oder transcendente ist.

11) Analytische Functionen, mit einer singulären Stelle im ganzen Gebiet der unabhängig Veränderlichen, die zugleich eindeutig und regulär sind, heissen ganze Functionen $[G(x)]$, und zwar ganze rationale oder ganze transcendente, je nachdem die Stelle ∞ eine ausserwesentlich oder wesentlich singuläre ist.

12) Jede ganze rationale Function hat Nullstellen.

13) Unter Primfunction von x versteht man jede eindeutige Function dieser Grösse, die nur eine (wesentlich oder ausserwesentlich) singuläre Stelle und entweder eine oder gar keine Nullstelle hat. Der allgemeinste Ausdruck einer solchen Function ist

$$\left\{\frac{k}{x-c} + l\right\} e^{G\left(\frac{1}{x-c}\right)},$$

wobei k und l Constanten, und G eine rationale ganze Function von $\dfrac{1}{x-c}$ sein soll.

14) Der allgemeine Ausdruck einer eindeutigen Function von x mit nur einer (wesentlich oder ausserwesentlich) singulären Stelle (c) ist

$$G\left(\frac{1}{x-c}\right),$$

wo, wenn $c = \infty$, $\dfrac{1}{x-c}$ durch x zu ersetzen ist. Die singuläre Stelle ist eine wesentliche oder ausserwesentliche, je nachdem G

eine transcendente oder eine rationale ganze Function von $\frac{1}{x-c}$ ist.

15) Der allgemeine Ausdruck einer eindeutigen Function von x mit n (wesentlich oder ausserwesentlich) singulären Stellen $(c_1, c_2, \dots c_n)$ kann in mannigfaltiger Weise aus n Functionen mit je einer singulären Stelle zusammengesetzt, am einfachsten aber in den nachstehenden Formen aufgestellt werden:

$$\sum_{\nu=1}^{n} G_\nu \left(\frac{1}{x-c_\nu}\right); \quad \prod_{\nu=1}^{n} G\left(\frac{1}{x-c_\gamma}\right) R(x),$$

wo $R(x)$ eine rationale Function bedeutet, welche nur an den wesentlich singulären Stellen der darzustellenden Function Null und unendlich gross wird.

16) Jede eindeutige Function von x, welche n wesentliche singuläre Stellen $(c_1, c_2, \dots c_n)$ und ausserdem noch beliebig (auch unendlich) viele ausserwesentliche hat, kann in jeder der beiden Formen

$$1) \qquad \frac{\sum_{\nu=1}^{n} G_\nu \left(\frac{1}{x-c_\nu}\right)}{\sum_{\nu=1}^{n} G_{n+\nu} \left(\frac{1}{x-c_\nu}\right)}$$

$$2) \qquad \frac{\prod_{\nu=1}^{n} G_\nu \left(\frac{1}{x-c_\nu}\right)}{\prod_{\nu=1}^{n} G_{n+\nu} \left(\frac{1}{x-c_\nu}\right)} \cdot R(x)$$

ausgedrückt werden, und zwar dergestalt, dass Zähler und Nenner für keinen Werth von x beide verschwinden.

Umgekehrt stellt jeder dieser Ausdrücke, wenn die Functionen $G_1, G_2, \dots G_{2n}$ willkürlich angenommen werden, eine eindeutige Function von x dar, welche im Allgemeinen n, in speciellen Fällen auch weniger als n wesentlich singuläre Stellen hat, während die Anzahl der ausserwesentlichen singulären Stellen, an denen die Function unendlich wird, unbeschränkt ist.

17) Eine jede ganze Function mit gegebenen Nullstellen

$$a_1, a_2, a_3, \dots a_\nu, \dots$$

ist in der Form

$$G(x) = e^{g_0(x)} \prod_{\nu=1}^{\infty} \left\{1 - \frac{x}{a_\nu}\right\}^{n_\nu} e^{n_\nu \sum_{\mu=1}^{m_\nu} \frac{1}{\mu}\left(\frac{x}{a_\nu}\right)^\mu}$$

darstellbar.

Es sind beispielsweise

$$0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Nullstellen von $\sin \pi x$, demnach wird

$$\sin \pi x = \pi x \prod_{\nu=-\infty}^{\infty}{}' \left(1 - \frac{x}{\nu}\right) e^{\frac{x}{\nu}},$$

wobei Π' bedeutet, dass gewisse Werthe, nämlich jene, für die die einzelnen Factoren ∞ werden, ausgenommen werden müssen.

18) Eine eindeutige analytische Function $f(x)$, die in der Umgebung jeder Stelle x_0 eines um $x = c$ gelegten ringförmigen Gebietes, wo

$$R_1 < x - c < R_2$$

ist, regulär bleibt, lässt sich daselbst durch eine nach positiven und negativen Potenzen von $(x - c)$ fortschreitende Potenzreihe

$$\mathfrak{P}_1(x - c) + \frac{1}{x - c} \mathfrak{P}_2\left(\frac{1}{x - c}\right)$$

darstellen. {Der Laurent'sche Satz.}

§. 113.

Einige auf die Potenzreihen sich beziehende Sätze.

1) Ist

$$\mathfrak{P}(x) = \sum a_\nu x^\nu$$

so beschaffen, dass der absolute Betrag von $a_\nu x^\nu$, also

$$|a_\nu x^\nu| = |a_\nu| \xi^\nu < g \left(\frac{\xi}{\xi_0}\right)^\nu,$$

wobei g eine angebbare Grösse und zugleich

$$\xi < \xi_0,$$

so convergirt die Reihe für alle Werthe von x von der Bedingung

$$|x| = \xi < \xi_0.$$

2) Das Product zweier in der Umgebung R der Stellen $x = 0$ convergenten Potenzreihen

$$\mathfrak{P}_1(x) = \sum_0^\infty a_\nu x^\nu$$

$$\mathfrak{P}_2(x) = \sum_0^\infty a_\mu x^\mu$$

lässt sich in eine Potenzreihe entwickeln, die in demselben Bereiche convergirt.

3) Eine ganze rationale Function

$$f(y_1 y_2 \dots y_n)$$

der n Potenzreihen

$$y_\nu = \mathfrak{P}_\nu(x), \quad \nu = 1, 2, \dots n$$

mit einem gemeinsamen Convergenzbereich

$$(x) < R$$

lässt sich in eine ebendaselbst convergente Potenzreihe $\mathfrak{P}(x)$ transformiren.

4) Setzt man für y_ν Potenzreihen mehrerer Variabelen

$$y_\nu = \mathfrak{P}_\nu(x_1 \dots x_n),$$

so geht

$$f(y_1, y_2, \dots y_n)$$

in eine in dem gemeinsamen Convergenzbereich der Reihen $\mathfrak{P}_\nu$ convergente Potenzreihe über.

5) Tritt an die Stelle der ganzen rationalen Function f eine convergente Potenzreihe

$$f(y) = \sum_0^\infty a_\nu y^\nu$$

und setzt man hierin für y eine Potenzreihe mit dem Convergenzradius R

$$y = \sum b_\mu x^\mu = \mathfrak{P}(x),$$

so wird $f(y)$ in eine nach Potenzen von x fortschreitende convergente Potenzreihe zu entwickeln sein, wenn die Summe der unendlich vielen Reihen

$$\sum_0^\infty a_\nu \mathfrak{P}^\nu(x)$$

in einer Umgebung der Stelle $x = 0$ gleichmässig convergirt.

6) Der Quotient ganzer Functionen ohne gemeinsamen Theiler:

$$\frac{f(y_1 y_2 \dots y_n)}{g(y_1 y_2 \dots y_n)}$$

geht durch die Substitutionen

$$y_\nu = \mathfrak{P}_\nu(x), \quad \nu = 1, 2, \ldots n$$

in eine Potenzreihe $\mathfrak{P}(x)$ über, die in dem gemeinsamen Convergenzbereich der Reihen $\mathfrak{P}_\nu(x)$ so lange convergirt, als x nicht einen Werth annimmt, dem eine Nullstelle (y) von g entspricht.

7) Der Quotient zweier Potenzreihen

$$\frac{\mathfrak{P}_1(y_1 y_2 \ldots y_n)}{\mathfrak{P}_2(y_1 y_2 \ldots y_n)},$$

dessen Nenner an der Stelle (0) nicht verschwindet, kann auch wieder durch die obigen Substitutionen in eine Potenzreihe $\mathfrak{P}(x)$ verwandelt werden, nur muss die Stelle

$$y_\nu^{(0)} = \mathfrak{P}_\nu(0), \quad \nu = 1, 2, \ldots n$$

in dem Convergenzbereich der gegebenen Reihen liegen; dann giebt es einen Bereich $|x| < r$, dem nur Stellen (y) des Convergenzbereiches von $\mathfrak{P}_1$ und $\mathfrak{P}_2$ angehören, und die Transformation in $\mathfrak{P}(x)$ ist möglich.

8) Sei eine Reihe

$$\mathfrak{P}(x \mid a) = \sum_0^\infty c_\nu (x - a)^\nu,$$

und sei a_1 eine Stelle des Convergenzbereiches R unserer Reihe, so wird

$$\mathfrak{P}(x \mid a, a_1) = \sum_0^\infty c_\nu^{(1)} (x - a_1)^\nu,$$

wobei

$$c_n^{(1)} = \frac{1}{n!} \{\mathfrak{P}^{(n)}(x - a)\}_{x = a_1}$$

$$= \frac{1}{n!} \left\{\frac{a^n \mathfrak{P}(x - a)}{d x^n}\right\}_{x = a_1}$$

die aus $\mathfrak{P}(x|a)$ durch Vermittlung von a_1 abgeleitete Reihe $\mathfrak{P}(x|a, a_1)$ genannt, und sie convergirt mindestens so lange, als

$$|x - a_1| < R - |a_1 - a|.$$

Auf dieselbe Art kann man fortfahren.

9) Kann aus $\mathfrak{P}(x|a)$ eine Reihe $\mathfrak{P}(x|a, b)$ direct abgeleitet werden, so kann man auch umgekehrt $\mathfrak{P}(x|a)$ aus $\mathfrak{P}(x|a, b)$ ableiten.

10) Der wahre Convergenzradius R einer Potenzreihe $\mathfrak{P}(x - a)$ ist geradezu dadurch charakterisirt, dass die untere Grenze der Convergenzradien der abgeleiteten Reihen Null ist; ist diese nicht Null, so ist der Convergenzradius nicht R, sondern grösser als R.

§. 114.

Von den periodischen Functionen.

1) Eine analytische Function $F(x)$ wird periodisch genannt, wenn für eine gewisse constante Grösse w die Gleichung

$$F(x+\omega)=F(x)$$

besteht. ω und jedes ganzzahlige Vielfache von ω heisst die Periode. Lassen sich alle Perioden durch Addition und Subtraction aus r Grössen

$$2\,\omega_1,\; 2\,\omega_2, \ldots\; 2\,\omega_r$$

ableiten, so wird die Function $r$fach periodisch genannt.

2) Ein Periodenpaar der doppeltperiodischen Function, durch welches alle Perioden ganzzahlig in der Form

$$\omega = 2\,\mu\,\omega + 2\,\mu\,\omega'$$

auszudrücken sind, heisst ein primitives.

Die dem Paare $[2\,\omega,\, 2\,\omega']$ äquivalenten Periodenpaare $(2\,\tilde{\omega},\, 2\,\tilde{\omega}')$ sind gegeben durch

$$2\,\tilde{\omega} = 2\,p\;\omega + 2\,q\;\omega'$$
$$2\,\tilde{\omega}' = 2\,p'\,\omega + 2\,q'\,\omega'$$

wobei die ganzen Zahlen

$$p\,q\,p'q'$$

die Bedingung

$$p\,q' - p'q = \pm 1$$

zu erfüllen haben.

3) Zwei Werthe des Arguments sind congruent oder äquivalent, wenn ihre Differenz eine Periode ist.

4) Die Gesammtheit der x Stellen, welche der x_0 Stelle

$$x_0 + 2\,t\,\omega + 2\,t'\,\omega', \quad 0 \leqq t < 1, \quad 0 \leqq t' < 1,$$

congruent sind, wird ein Periodenparallelogramm genannt.

5) Unter dem Grade einer doppeltperiodischen Function versteht man jene ganze Zahl, welche die Anzahl der Unendlichkeitsstellen im Periodenparallelogramm, jede in der zugehörigen Ordnungszahl gezählt, angiebt.

6) Eine eindeutige, doppeltperiodische Function, die im Endlichen den Charakter einer rationalen Function besitzt, wird in jedem Periodenparallelogramm eben so oft Null als unendlich und

hat daselbst jeden Werth in derjenigen Anzahl, welche der Grad anzeigt.

7) Wir bilden nun eine fundamentale Function.

Sei

$$\omega = 2\mu\omega + 2\mu'\omega',$$

wobei μ und μ' alle Zahlen von $-\infty$ bis $+\infty$, Null ausgenommen, zu durchlaufen haben.

Sodann bezeichnen wir mit σu die Function

$$\sigma u = u\,\Pi\left\{1 - \frac{u}{\omega}\right\} e^{-\frac{u}{\omega} + \frac{1}{2}\left(\frac{u}{\omega}\right)^2}.$$

Es wird

$$\sigma 0 = 0$$
$$\sigma \omega = 0$$
$$\sigma(-u) = -\sigma(u).$$

8) Sei

$$\gamma u = -\frac{d^2 \log \sigma u}{du^2} = \frac{1}{u^2} + \sum\left\{\frac{1}{(u-\omega)^2} - \frac{1}{\omega^2}\right\},$$

also

$$\gamma u = \gamma(-u)$$
$$\gamma(u) = \gamma(u + 2\mu\omega + 2\mu'\omega')$$

und

$$\eta = \frac{\sigma'(\omega)}{\sigma(\omega)}, \quad \eta' = \frac{\sigma'(\omega')}{\sigma(\omega')}$$
$$\sigma' = \frac{d\sigma}{du},$$

so wird

$$\sigma(u + 2\omega) = -e^{2\eta(u+\omega)}\sigma u$$
$$\sigma(u + 2\omega') = -e^{2\eta(u+\omega')}\sigma u.$$

9) Es ist

$$\frac{d\gamma u}{du} = \gamma' u = -\gamma' u = -\frac{2}{u^3} - 2\sum\frac{1}{(u-\omega)^3}$$
$$\gamma'\omega = 0, \quad \gamma'\omega' = 0$$
$$\gamma'(\omega + \omega') = 0.$$

10) Wird

$$\gamma\omega = e_1, \quad \gamma\omega' = e_2$$
$$\gamma(\omega + \omega') = e_3$$

gesetzt, so wird

$$(\gamma' u)^2 = 4\{\gamma u - e_1\}\{\gamma u - e_2\}\{\gamma u - e_3\}.$$

11) Der allgemeinste Ausdruck einer eindeutigen doppeltperiodischen Function $m$ten Grades ist

$$\varphi(u) = c \prod_1^m \frac{\sigma(u - u_\mu)}{\sigma(u - v_\mu)} e^{2\tilde{\eta} u},$$

und zwar ist die Summe der incongruenten Nullstellen

$$\sum_1^m u_\mu$$

der Summe der Unendlichkeitsstellen

$$\sum_1^m v_\mu$$

congruent.

$$\sum u_\mu = \sum v_\mu + 2\mu\omega + 2\mu'\omega'$$
$$\tilde{\eta} = 2\mu\eta + 2\mu'\eta'.$$

12) Eine eindeutige doppeltperiodische Function ersten Grades existirt nicht.

Vergleiche: Königsberger, 17. Vorlesung [Ueber periodische Functionen im Allgemeinen].

§. 115.

Elliptische Reductionsformeln.

A. Algebraische.

1) $$\int \frac{dx}{\sqrt{(1+x)^2(1+c^2x^2)}} = \int \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \varkappa^2 \sin^2\varphi}},$$
$$x = tgn\,\varphi, \quad \varkappa^2 = 1 - c^2$$

2) $$\int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1+c^2x^2)}} = -\int \frac{\sqrt{1-\varkappa^2}\, d\varphi}{\sqrt{1 - \varkappa^2 \sin^2\varphi}},$$
$$x = \cos\varphi, \quad \varkappa^2 = \frac{c^2}{1+c^2}$$

3) $$\int \frac{dx}{\sqrt{(x^2-1)(1+c^2x^2)}} = \varkappa \int \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \varkappa^2 \sin^2\varphi}},$$
$$x = \frac{1}{\cos\varphi}, \quad \varkappa^2 = \frac{1}{1+c^2}$$

4) $$\int \frac{dx}{\sqrt{(1+x^2)(1-c^2x^2)}} = -\varkappa \int \frac{d\varphi}{\sqrt{1-\varkappa^2 \sin^2\varphi}},$$
$$x = \frac{1}{c}\cos\varphi, \quad \varkappa^2 = \frac{1}{1+c^2}$$

5) $$\int \frac{dx}{\sqrt{(1+x^2)(c^2x^2-1)}} = \sqrt{1-\varkappa^2} \int \frac{d\varphi}{\sqrt{1-\varkappa^2 \sin^2\varphi}},$$
$$x = \frac{1}{c\cos\varphi}, \quad \varkappa^2 = \frac{c^2}{1+c^2}$$

6) $$\int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-c^2x^2)}} = \int \frac{d\varphi}{\sqrt{1-\varkappa^2 \sin^2\varphi}},$$
$$x = \sin\varphi, \quad \varkappa = c$$

7) $$\int \frac{dx}{\sqrt{(x^2-1)(c^2x^2-1)}} = -\int \frac{d\varphi}{\sqrt{1-\varkappa^2 \sin^2\varphi}},$$
$$x = \frac{1}{c\sin\varphi}, \quad \varkappa = c$$

8) $$\int \frac{dx}{\sqrt{(x^2-1)(1-c^2x^2)}} = -\int \frac{d\varphi}{\sqrt{1-\varkappa^2 \sin^2\varphi}},$$
$$x^2 = \sin^2\varphi + \frac{1}{c^2}\cos^2\varphi, \quad \varkappa = \sqrt{1-c^2}$$

9) Man merke für den Fall, dass $\varkappa^2 > 1$ werden sollte,
$$\int \frac{d\varphi}{\sqrt{1-\varkappa^2 \sin^2\varphi}} = \frac{1}{\varkappa} \int \frac{d\psi}{\sqrt{1-\frac{1}{\varkappa^2}\sin^2\psi}}, \quad \varkappa \sin\varphi = \sin\psi$$

10) Setzt man in
$$J = \int \frac{dx}{\sqrt{A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 + A_4 x^4}}, \quad x = \frac{p+qy}{1+y},$$
so folgt
$$J = (q-p) \int \frac{dy}{\sqrt{a_0 + a_1 y + a_2 y^2 + a_3 y^3 + a y^4}}.$$
Können nun p und q aus den Bedingungen
$$a_1 = 0, \quad a_3 = 0$$
bestimmt werden, so liefert die Anwendung obiger Formeln die gewünschte Reduction.

11) Seien a, b, c, d reelle Grössen, und
$$|a| > |b| > |c| > |d|,$$

ferner

$$0 < \varphi < \frac{\pi}{2},$$

so wird

$$\alpha) \quad \frac{dy}{\sqrt{(y-a)(y-b)(y-c)(y-d)}} = \frac{2}{\sqrt{(a-c)(b-d)}} \cdot \frac{d\varphi}{\sqrt{1-\varepsilon^2 \sin^2\varphi}}$$

$$\varepsilon^2 = \frac{b-c}{a-c} \cdot \frac{a-d}{b-d}$$

Grenzen von y

$$y = \frac{a(b-d) - b(a-d)\sin^2\varphi}{b-d-(a-d)\sin^2\varphi}, \quad a, \infty \text{ oder } -\infty, d$$

$$y = \frac{c(b-d) - d(b-c)\sin^2\varphi}{b-d-(b-c)\sin^2\varphi}, \quad c \text{ und } b.$$

$$\beta) \quad \frac{dy}{\sqrt{-(y-a)(y-b)(y-c)(y-d)}} = \frac{2}{\sqrt{(a-c)(b-d)}} \cdot \frac{d\varphi}{\sqrt{1-\varepsilon^2 \sin^2\varphi}}$$

$$\varepsilon^2 = \frac{(a-b)(c-d)}{(a-c)(b-d)}$$

Grenzen von y

$$y = \frac{d(a-c) + a(c-d)\sin^2\varphi}{(a-c)+(c-d)\sin^2\varphi}, \quad d, c$$

$$y = \frac{b(a-c) - c(a-b)\sin^2\varphi}{a-c-(a-b)\sin^2\varphi}, \quad b, c.$$

Speciell wird:

$$\frac{dy}{\sqrt{(y-a)(y-b)(y-c)}} = \frac{2}{\sqrt{a-c}} \cdot \frac{d\varphi}{\sqrt{1-\varepsilon^2 \sin^2\varphi}}$$

$$\varepsilon^2 = \frac{b-c}{a-c}$$

$$y = \frac{a - b\sin^2\varphi}{\cos^2\varphi} \qquad \text{Grenzen von } y\text{: } a, \infty$$

$$y = c + (b-c)\sin^2\varphi \qquad \text{" \quad " \quad " } \; c, \; b$$

$$\frac{dy}{\sqrt{-(y-a)(y-b)(y-c)}} = \frac{2}{\sqrt{a-c}} \cdot \frac{d\varphi}{\sqrt{1-\varepsilon^2 \sin^2\varphi}}$$

$$\varepsilon^2 = \frac{a-b}{a-c}$$

$$y = \frac{c - a\cos^2\varphi}{\sin^2\varphi} \qquad \text{Grenzen von } y\text{: } -\infty, c$$

$$y = \frac{b(a-c) - c(a-b)\sin^2\varphi}{a-c-(a-b)\sin^2\varphi} \qquad \text{„ „ „ } b, a$$

12) Seien a und b reelle Grössen $|a| > |b|$, und es werde

$$(m-a)^2 + n^2 = \alpha^2, \quad (m-b)^2 + n^2 = \beta^2$$

zur Abkürzung gesetzt, sei ferner

$$0 < \varphi < \pi.$$

α) $$\frac{dy}{\sqrt{(y-a)(y-b)[(y-m)^2+n^2]}} = \frac{1}{\sqrt{\alpha\beta}} \cdot \frac{d\varphi}{\sqrt{1-\varepsilon^2\sin^2\varphi}}$$

$$\varepsilon^2 = \frac{1}{2}\left\{1 + \frac{\alpha^2 + B^2 - (a-b)^2}{2\alpha\beta}\right\}$$

$$\frac{y-a}{y-b} = \frac{\alpha}{\beta}\,\frac{1-\cos\varphi}{1+\cos\varphi} \qquad \text{Grenzen von } y\text{: } a, \infty \text{ oder } -\infty, b.$$

β) $$\frac{dy}{\sqrt{-(y-a)(y-b)[(y-m)^2+n^2]}} = \frac{1}{\sqrt{\alpha\beta}} \cdot \frac{d\varphi}{\sqrt{1-\varepsilon^2\sin^2\varphi}}$$

$$\varepsilon^2 = \frac{1}{2}\left\{1 - \frac{\alpha^2 + \beta^2 - (a-b)^2}{2\alpha\beta}\right\}$$

$$-\frac{a-y}{b-y} = \frac{\alpha}{\beta}\,\frac{1+\cos\varphi}{1-\cos\varphi} \qquad \text{Grenzen von } y\text{: } b, a.$$

Speciell ist

$$\frac{dy}{\sqrt{(y-a)[(y-m)^2+n^2]}} = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \cdot \frac{d\varphi}{\sqrt{1-\varepsilon^2\sin^2\varphi}}$$

$$\varepsilon^2 = \frac{1}{2}\left\{1 + \frac{m-a}{\alpha}\right\}$$

$$y - a = \alpha\,\frac{1-\cos\varphi}{1+\cos\varphi} \qquad \text{Grenzen von } y\text{: } a, \infty$$

$$\frac{dy}{\sqrt{(a-y)[(y-m)^2+n^2]}} = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \cdot \frac{d\varphi}{\sqrt{1-\varepsilon^2\sin^2\varphi}}$$

$$\varepsilon^2 = \frac{1}{2}\left\{1 - \frac{m-a}{\alpha}\right\}$$

$$a - y = \alpha\,\frac{1+\cos\varphi}{1-\cos\varphi} \qquad \text{Grenzen von } y\text{: } -\infty, a$$

NB. Wird $a + b = 2m$, so werden die obigen Formeln ungültig. Alsdann ist $y - m = z$ zu substituiren und man erhält eine von den Formeln 1) bis 8).

13) Sei zur Abkürzung:

$$(m_1 - m)^2 + (n_1 + n)^2 = r^2$$
$$(m_1 - m)^2 + (n_1 - n)^2 = r_1^2,$$

ferner

$$cotg\, w = \sqrt{\frac{(r + r_1)^2 - 4n^2}{4n^2 - (r - r_1)^2}},$$

so wird für

$$\frac{y - m}{n} = tgn(\varphi - w)$$

$$\frac{dy}{\sqrt{(y-m)^2 + n^2}\,\sqrt{(y - m_1)^2 + n_1^2}} = \frac{2}{r + r_1}\,\frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \varepsilon^2 \sin^2\varphi}}$$

$$\varepsilon^2 = \frac{4rr_1}{(r + r_1)^2}.$$

Die Beweise suche in Enneper, „Elliptische Functionen“, §. 3 und 4. Vergl. Schellbach: Die Lehre von den elliptischen Integralen, §. 143 bis 155.

B. Goniometrische.

Sei zur Abkürzung

$$\varDelta\varphi = \sqrt{1 - \varepsilon^2 \sin^2\varphi}$$
$$F(\varphi, \varepsilon) = F;\quad E(\varphi, \varepsilon) = E,$$

so wird:

1) $$\int\frac{\sin^n x\,dx}{\varDelta x} = \frac{n-2}{n-1}\cdot\frac{1+\varepsilon^2}{\varepsilon^2}\int\frac{\sin^{n-2} x\,dx}{\varDelta x} - \frac{n-3}{(n-1)\varepsilon^2}$$
$$\int\frac{\sin^{n-4} x\,dx}{\varDelta x} + \frac{\sin^{n-3} x}{(n-1)\varepsilon^2}\sqrt{1 - (1+\varepsilon^2)\sin^2 x + e^4 \sin^4 x}$$

$$\int\frac{\sin^2 x\,dx}{\varDelta x} = \frac{1}{\varepsilon^2}\int\frac{dx}{\sqrt{1 - \varepsilon^2\sin^2 x}} - \frac{1}{\varepsilon^2}\int dx\sqrt{1 - \varepsilon^2 \sin^2 x}$$

2) $$\int\frac{\cos^n x\,dx}{\varDelta x} = \frac{n-2}{n-1}\cdot\frac{2\varepsilon^2 - 1}{\varepsilon^2}\int\frac{\cos^{n-2} x\,dx}{\varDelta x} + \frac{n-3}{n-1}\cdot\frac{1-\varepsilon^2}{\varepsilon^2}$$
$$\int\frac{\cos^{n-4}\,dx}{\varDelta x} + \frac{\cos^{n-3} x}{(n-1)\varepsilon^2}\sqrt{(1-\varepsilon^2) + (1 - 2\varepsilon^2)\cos^2 x - \varepsilon^2\cos^4 x}$$

$$\int\frac{\cos^2 x\,dx}{\varDelta x} = \int\frac{dx}{\sqrt{1 - \varepsilon^2\sin^2 x}} - \int\frac{\sin^2 x\,dx}{\sqrt{1 - \varepsilon^2 \sin^2 x}}$$

3) $$\int \frac{tgn^n x\,dx}{\Delta x} = -\frac{n-2}{n-1}\cdot\frac{2-\varepsilon^2}{1-\varepsilon^2}\int\frac{tgn^{n-2} x\,dx}{\Delta x} - \frac{n-3}{n-1}\cdot\frac{1}{1-\varepsilon^2}$$
$$\int\frac{tgn^{n-4}x\,dx}{\Delta x} + \frac{tgn^{n-3}x}{(n-1)(1-\varepsilon^2)}\sqrt{1+(2-\varepsilon^2)tgn^2 x+(1-\varepsilon^2)tgn^4 x}$$
$$\int\frac{tgn^2 x\,dx}{\Delta x} = -\frac{1}{1-\varepsilon^2}\int dx\sqrt{1-\varepsilon^2 sin^2 x}$$
$$+\frac{1}{1-\varepsilon^2}tgn\,x\sqrt{1-\varepsilon^2 sin^2 x}.$$

Setzt man $-n+4$ an die Stelle von n, so ergiebt sich (4) (5) (6).

4) $$\int\frac{dx}{sin^n x.\Delta x} = \frac{n-2}{n-1}(1+\varepsilon^2)\int\frac{dx}{sin^{n-2}x\,\Delta x}$$
$$-\frac{n-3}{n-1}\cdot\varepsilon^2\int\frac{dx}{sin^{n-4}x\,\Delta x} - \frac{cos\,x}{sin^{n-1}x}\cdot\frac{\Delta x}{n-1}$$

5) $$\int\frac{dx}{cos^n x.\Delta x} = -\frac{n-2}{n-1}\cdot\frac{2\varepsilon^2-1}{1-\varepsilon^2}\int\frac{dx}{cos^{n-2}x\,\Delta x}$$
$$+\frac{n-3}{n-1}\cdot\frac{\varepsilon^2}{1-\varepsilon^2}\int\frac{dx}{cos^{n-4}x\,\Delta x}+\frac{sin\,x}{cos^{n-1}x}\,\frac{dx}{(1-\varepsilon^2)(n-1)}$$

6) $$\int\frac{dx}{tgn^n x\,\Delta x} = -\frac{n-2}{n-1}(2-\varepsilon^2)\int\frac{dx}{tgn^{n-2}x\,\Delta x}$$
$$-\frac{n-3}{n-1}\cdot(1-\varepsilon^2)\int\frac{dx}{tgn^{n-4}x\,\Delta x} - \frac{\sqrt{1-\varepsilon^2 sin^2 x}}{(n-1)\,cos^2 x\,tgn^{n-1}x}$$

7) $$\int\frac{[1-\varepsilon^2 sin^2 x]^{\frac{n}{2}}}{\Delta x}dx = \frac{n-2}{n-1}(2-\varepsilon^2)\int\frac{[1-\varepsilon^2 sin^2 x]^{\frac{n-2}{2}}}{\Delta x}dx$$
$$-\frac{n-3}{n-1}(2-\varepsilon^2)\int\frac{[1-\varepsilon^2 sin^2 x]^{\frac{n-4}{2}}}{\Delta x}dx$$
$$+\frac{\varepsilon^2}{n-1}sin\,x\,cos\,x(1-\varepsilon^2 sin^2 x)^{\frac{n-3}{2}}$$

8) $$\int\frac{dx}{\Delta x[1-\varepsilon^2 sin^2 x]^{\frac{n}{2}}} = \frac{n-2}{n-1}\cdot\frac{2-\varepsilon^2}{1-\varepsilon^2}\int\frac{dx}{\Delta x[1-\varepsilon^2 sin^2 x]^{\frac{n-2}{2}}}$$
$$-\frac{n-3}{n-1}\cdot\frac{1}{1-\varepsilon^2}\int\frac{dx}{\Delta x[1-\varepsilon^2 sin^2 x]^{\frac{n-2}{2}}}$$
$$-\frac{e^2 sin\,x\,cos\,x}{(n-1)(1-\varepsilon^2)[1-\varepsilon^2 sin^2 x]^{\frac{n-1}{2}}}$$

$$\int \frac{dx}{[1-\varepsilon^2 \sin^2 x]^{3/2}} = \frac{1}{1-\varepsilon^2}\int \sqrt{1-\varepsilon^2 \sin^2 x}\, dx$$
$$- \frac{\varepsilon^2}{1-\varepsilon^2} \frac{\sin x \cos x}{\sqrt{1-\varepsilon^2 \sin^2 x}}.$$

9) Beachtet man die Identitäten

$$\sin^2 x = \frac{1-[1-\varepsilon^2 \sin^2 x]}{\varepsilon^2}$$
$$\cos^2 x = \frac{\varepsilon^2 - 1 + [1-\varepsilon^2 \sin^2 x]}{\varepsilon^2},$$

so lassen sich die Integrale

$$\int \frac{\sin^{2m} x\, dx}{[1-\varepsilon^2 \sin^2 x]^{\frac{n}{2}} \Delta x}$$
$$\int \frac{\cos^{2m} x\, dx}{[1-\varepsilon^2 \sin^2 x]^{\frac{n}{2}} \Delta x}$$

leicht auf obige zurückführen.

10) Man merke auch folgende Reductionsformel: Sei

$$R_n = \int \frac{\xi^n\, dx}{(1 \pm e\xi)\Delta x}$$
$$P_n = \int \frac{\xi^n\, dx}{\Delta x}$$

so wird

$$R_n \pm e R_{n-1} = P_n$$

oder

$$R_0 \pm e R_1 = P_0, \quad R_1 \pm e R_2 = P_1, \ldots$$

wobei P_0, P_1 nach dem Obigen bekannt sind, und demnach $R_0, R_1 \ldots$ gefunden werden können. Insbesondere ist für $\xi = \sin x$

$$\int \frac{dx}{(1 \pm \varepsilon \sin x)\sqrt{1-\varepsilon^2 \sin^2 x}} = \int \frac{dx}{(1-\varepsilon^2 \sin^2 x)^{3/2}}$$
$$\mp \int \frac{\sin x\, dx}{(1-\varepsilon^2 \sin^2 x)^{3/2}}$$

11) Sei

$$\int \frac{d\varphi}{(a+\sin\varphi)^{\varkappa} \sqrt{1-\varepsilon^2 \sin^2 \varphi}} = [\varkappa],$$

so wird

$$-\frac{\cos\varphi\,\varDelta\varphi}{(a+\sin\varphi)^{n-1}}=(n-1)(1-a^2)(1-a^2\varepsilon^2)[n]+(2n-3)(1+\varepsilon^2$$
$$-2a^2\varepsilon^2)\,a\,[n-1]+(n-2)(6a^2\varepsilon^2-\varepsilon^2-1)[n-2]$$
$$+(10-4n)\,a\,\varepsilon^2[n-3]+(n-3)\,\varepsilon^2[n-4].$$

Insbesondere ist

$$\int\frac{d\varphi}{(a+\sin\varphi)\varDelta\varphi}=a\int\frac{d\varphi}{(a^2-\sin^2\varphi)\sqrt{1-\varepsilon^2\sin^2\varphi}}$$
$$-\int\frac{\sin\varphi\,d\varphi}{[a^2-\sin^2\varphi]\varDelta\varphi}.$$

12) Sei

$$\int\frac{d\varphi}{(a+\cos\varphi)^\lambda\varDelta\varphi}=[\lambda],$$

so wird:

$$\frac{\sin\varphi\,\varDelta\varphi}{(a+\cos\varphi)^{n-1}}=-(n-3)e^2[n-4]+(4n-10)a\,\varepsilon^2[n-3]$$
$$+(n-2)(2\varepsilon^2-1-6a^2\varepsilon^2)[n-2]+(2n-3)(1-2\varepsilon^2$$
$$+2a^2\varepsilon^2)\,a\,[n-1]+(n-1)(1-a^2)(1-\varepsilon^2+a^2\varepsilon^2)[n].$$

Speciell für $n=1$ findet man:

$$\int\frac{d\varphi}{(a+\cos\varphi)\varDelta\varphi}=a\int\frac{d\varphi}{(a^2-1+\sin^2\varphi)\varDelta\varphi}$$
$$-\int\frac{\cos\varphi\,d\varphi}{(a^2-\cos^2\varphi)\varDelta\varphi}.$$

13) Setzt man

$$\int\frac{d\varphi}{(a+tgn\,\varphi)^\mu\varDelta\varphi}=[\mu],$$

so wird

$$\frac{\sqrt{1-\varepsilon^2\sin^2\varphi}}{(a+tgn\,\varphi)^{n-1}\cos^2\varphi}=-(n-3)(1-\varepsilon^2)[n-4]$$
$$-(4n-10)a(1-\varepsilon^2)[n-3]-(n-2)(2-\varepsilon^2+6a^2-6a^2\varepsilon^2)[n-2]$$
$$+(2n-3)\,a\,(2-\varepsilon^2+2a^2-2a^2\varepsilon^2)[n-1]$$
$$-(n-1)\{1+a^2(1-\varepsilon^2)\}(1+a^2)[n].$$

Insbesondere ist

$$\int\frac{d\varphi}{(a+tgn\,\varphi)\varDelta\varphi}=a\int\frac{\cos^2\varphi}{a^2-(1+a^2)\sin^2\varphi}\,\frac{d\varphi}{\varDelta\varphi}$$
$$-\int\frac{\sin\varphi\cos\varphi\,d\varphi}{\{a^2-(1+a^2)\}\varDelta\varphi}$$

das erstere Integral ist gleich:

$$\frac{1}{1+a^2}\int\frac{d\varphi}{[a^2-(1+a^2)\sin^2\varphi]\varDelta\varphi}+\frac{1}{1+a^2}\int\frac{d\varphi}{\varDelta\varphi}.$$

14) Sei

$$\int\frac{d\varphi}{(a+\sin^2\varphi)^n\varDelta\varphi}=[n],$$

so wird:

$$\frac{\sin\varphi\cos\varphi\varDelta\varphi}{(a+\sin^2\varphi)^{n-1}}=(2n-2)\{a+a^2(1+\varepsilon^2)+a^3\varepsilon^2\}[n]$$
$$-(2n-3)\{1+2a(1+\varepsilon^2)+3a^2\varepsilon^2\}[n-1]$$
$$+2(n-2)(3a\varepsilon^2+1+\varepsilon^2)[n-2]$$
$$-(2n-5)\varepsilon^2[n-3].$$

Beweise suche in Dienger, Differential- und Integralrechnung.

15) Sei

$$A_n=\int\frac{(a+\sin\varphi)}{\varDelta\varphi}d\varphi,$$

so wird:

$$(a+\sin\varphi)^n\cos\varphi.\varDelta\varphi=n(1-a^2)(1-a^2\varepsilon^2)A_{n-1}$$
$$+a(2n+1)(1+\varepsilon^2-2a^2\varepsilon^2)A_n-(n+1)(1+\varepsilon^2-6a^2\varepsilon^2)A_{n+1}$$
$$-2(2n+3)a\varepsilon^2A_{n+2}+(n+2)\varepsilon^2A_{n+3}.$$

Sei

$$B_n=\int\frac{(b+\cos\varphi)}{\varDelta\varphi}d\varphi,$$

so wird:

$$\varepsilon_1^2(b+\cos\varphi)^n\sin\varphi\varDelta\varphi=n(1-b^2)(\varepsilon_1^2+\varepsilon^2b^2)B_{n-1}$$
$$+(2n+1)b(\varepsilon_1^2-\varepsilon^2+2\varepsilon^2b^2)B_n-(n+1)(\varepsilon_1^2-\varepsilon^2+6b^2\varepsilon^2)B_{n+1}$$
$$+2(2n+3)b\varepsilon^2B_{n+2}-(n+2)\varepsilon^2B_{n+3}.$$

Sei

$$C_n=\int\frac{(c+tgn\,\varphi)^n}{\varDelta\varphi}d\varphi,$$

so wird:

$$(c+tgn\,\varphi)^n\frac{\varDelta\varphi}{\cos^2\varphi}=n(1+c^2)(1+\varepsilon_1^2c^2)C_{n-1}$$
$$-(2n+1)c(1+\varepsilon_1^2+2c^2\varepsilon_1^2)C_n+(n+1)(1+\varepsilon_1^2+6c^2\varepsilon_1^2)C_{n+1}$$
$$-2(2n+3)c\varepsilon_1^2C_{n+2}+(n+2)\varepsilon_1^2C_{n+3}.$$

Alle diese Integrale lassen sich auf folgende zwölf zurückführen:

$$A_0, \quad A_1, \quad A_2, \quad A_{-1}$$
$$B_0, \quad B_1, \quad B_2, \quad B_{-1}$$
$$C_0, \quad C_1, \quad C_2, \quad C_{-1}.$$

Es ist

$$A_0 = B_0 = C_0 = \int \frac{d\varphi}{\varDelta\varphi}$$

$$A_1 = a\int \frac{d\varphi}{\varDelta\varphi} + \int \frac{\sin\varphi\, d\varphi}{\varDelta\varphi}$$

$$B_1 = b\int \frac{d\varphi}{\varDelta\varphi} + \int \frac{\cos\varphi\, d\varphi}{\varDelta\varphi}$$

$$C_1 = c\int \frac{d\varphi}{\varDelta\varphi} + \int \frac{tgn\,\varphi\, d\varphi}{\varDelta\varphi},$$

wobei

$$\int \frac{\sin\varphi}{\varDelta\varphi}\, d\varphi = \frac{1}{2\varepsilon} \log \frac{1 - \dfrac{\varepsilon\cos\varphi}{\varDelta\varphi}}{1 + \dfrac{\varepsilon\cos\varphi}{\varDelta\varphi}}$$

$$\int \frac{\cos\varphi}{\varDelta\varphi}\, d\varphi = \frac{1}{\varepsilon} \arcsin[\varepsilon\sin\varphi]$$

$$\int \frac{tgn\,\varphi}{\varDelta\varphi}\, d\varphi = \frac{1}{2\varepsilon_1} \log \frac{1 + \dfrac{\varepsilon_1}{\varDelta\varphi}}{1 - \dfrac{\varepsilon_1}{\varDelta\varphi}}, \quad \varepsilon^2 + \varepsilon_1^2 = 1.$$

Ferner hat man:

$$\varepsilon^2 A_2 = (1 + \varepsilon^2 a^2)\int \frac{d\varphi}{\varDelta\varphi} - \int \varDelta\varphi\, d\varphi + 2a\varepsilon^2 \int \frac{\sin\varphi}{\varDelta\varphi}\, d\varphi$$

$$\varepsilon^2 B_2 = (b^2\varepsilon^2 - \varepsilon_1^2)\int \frac{d\varphi}{\varDelta\varphi} + \int \varDelta\varphi\, d\varphi + 26\,\varepsilon^2 \int \frac{\cos\varphi}{\varDelta\varphi}\, d\varphi$$

$$\varepsilon^2 C_2 = c^2\varepsilon_1^2 \int \frac{d\varphi}{\varDelta\varphi} - \int \varDelta\varphi . d\varphi + 2c\varepsilon_1^2 \int \frac{tgn\,\varphi}{\varDelta\varphi} d\varphi + tgn\,\varphi . \varDelta\varphi.$$

$$A_{-1} = \frac{1}{a}\int \frac{d\varphi}{\varDelta\varphi} + \frac{1}{a^3}\int \frac{\sin^2\varphi}{1 - \dfrac{\sin^2\varphi}{a^2}} \frac{d\varphi}{\varDelta\varphi} - \int \frac{\sin\varphi}{a^2 - \sin^2\varphi} \frac{d\varphi}{\varDelta\varphi}$$

$$B_{-1} = -\frac{b}{1 - b^2}\int \frac{d\varphi}{\varDelta\varphi} - \frac{b}{(1 - b^2)^2}\int \frac{\sin^2\varphi}{1 - \dfrac{\sin^2\varphi}{1 - b^2}} \frac{d\varphi}{\varDelta\varphi}$$

$$+ \int \frac{\cos\varphi}{1 - b^2 - \sin^2\varphi} \frac{d\varphi}{\varDelta\varphi}$$

$$C_{-1} = \frac{1}{c}\int\frac{d\varphi}{\Delta\varphi} + \frac{1}{c^3}\int\frac{\sin^2\varphi}{1-\frac{1+c^2}{c^2}\sin^2\varphi}\frac{d\varphi}{\Delta\varphi}$$
$$-\int\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{c^2-(1+c^2)\sin^2\varphi}\frac{d\varphi}{\Delta\varphi}.$$

Für die hier vorkommenden Integrale merke man:

$$\int\frac{\sin\varphi}{a^2-\sin^2\varphi}\frac{d\varphi}{\Delta\varphi}$$
$$= -\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{1-a^2}\sqrt{1-a^2\varepsilon^2}}\log\frac{1+\frac{\cos\varphi}{\Delta\varphi}\sqrt{\frac{1-\varepsilon^2a^2}{1-a^2}}}{1-\frac{\cos\varphi}{\Delta\varphi}\sqrt{\frac{1-\varepsilon^2a^2}{1-a^2}}}$$

$$\int\frac{\cos\varphi}{1-b^2-\sin^2\varphi}\frac{d\varphi}{\Delta\varphi}$$
$$= \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{1-b^2}\sqrt{\varepsilon^2+\varepsilon^2b^2}}\log\frac{1+\frac{\varepsilon\sin\varphi}{\Delta\varphi}\sqrt{\frac{\varepsilon^2+\varepsilon^2b^2}{1-b^2}}}{1-\frac{\varepsilon\sin\varphi}{\Delta\varphi}\sqrt{\frac{\varepsilon^2+\varepsilon^2b^2}{1-b^2}}}$$

$$\int\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{c^2-(\gamma^2+1)\sin^2\varphi}\frac{d\varphi}{\Delta\varphi}$$
$$= \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{1+c^2}\sqrt{1+\varepsilon_1^2c^2}}\log\frac{1+\Delta\varphi\sqrt{\frac{c^2+1}{1+\varepsilon_1^2c^2}}}{1-\Delta\varphi\sqrt{\frac{c^2+1}{1+\varepsilon_1^2c^2}}}.$$

16) Sei

$$P_n = \int\frac{(a+\sin^2\varphi)^n}{\Delta\varphi}\,d\varphi$$
$$Q_n = \int\frac{(b+\cos^2\varphi)^n}{\Delta\varphi}\,d\varphi$$
$$R_n = \int\frac{(c+tgn^2\varphi)^n}{\Delta\varphi}\,d\varphi,$$

so gelten folgende Relationen:

$$(a+\sin^2\varphi)^n\sin\varphi\cos\varphi\,\Delta\varphi = -2na(1+a)(1+\varepsilon^2a)P_{n-1}$$
$$+(2n+1)[1+2a(1+\varepsilon^2)+3a^2\varepsilon^2]P_n$$
$$-(2n+2)(1+\varepsilon^2+3a\varepsilon^2)P_{n+1}+(2n+3)\varepsilon^2P_{n+2}.$$

$$(b+\cos^2\varphi)^n\sin\varphi\cos\varphi\,\Delta\varphi = 2nb(1-b)(\varepsilon_1^2-\varepsilon^2b)\,Q_{n-1}$$
$$-(2n+1)[\varepsilon_1^2+2b(\varepsilon_1^2-\varepsilon^2)-3b^2\varepsilon^2]\,Q_n$$
$$+(2n+2)(\varepsilon_1^2-\varepsilon^2-3b\varepsilon^2)\,Q_{n+1}+(2n+3)\varepsilon^2\,Q_{n+2}.$$

$$\frac{(c + tgn^2 \varphi)^n \, tgn\, \varphi \, \varDelta \varphi}{cos^2 \varphi} = - 2nc(1-c)(1-\varepsilon^2 c) R_{n-1}$$
$$- (2n+1)[1 - 2c(1+\varepsilon_1^2) + 3c^2\varepsilon_1^2] R_n$$
$$+ (2n+2)(1+\varepsilon_1^2 - 3c\varepsilon_1^2) R_{n+1} + (2n+3)\varepsilon_1^2 R_{n+2}.$$

17) Sei

$$T_n = \int \frac{d\varphi}{(h + g\, sin^2 \varphi)^m \varDelta \varphi},$$

so wird:

$$\frac{g^2 sin\, \varphi \, cos\, \varphi \, \varDelta \varphi}{(h + g\, sin^2 \varphi)^m} = -(2m-5)\varepsilon^2 T_{m-3}$$
$$+ 2(m-2)[g(1+\varepsilon^2) + 3h\varepsilon^2] T_{m-2}$$
$$-(2m-3)[g^2 + 2hg(1+\varepsilon^2) + 3h^2\varepsilon^2] T_{m-1}$$
$$+ 2(m-1)h(g+h)(g+h\varepsilon^2) T_m.$$

Die Beweise suche in Enneper, „Elliptische Functionen".

§. 116.

Einige Integrale, die sich auf elliptische zurückführen lassen.

1) $\int \frac{dz}{\sqrt{z^3 \pm 1}}, \quad z = u^2 \mp 1$

2) $\int \frac{dz}{\sqrt{1 + z^4}}, \quad z = tgn \frac{\varphi}{2}$

3) $\int \frac{dz}{\sqrt{1 - z^6}}, \quad z^2 = \frac{1}{1 + y^2}$

4) $\int \frac{dz}{\sqrt{\pm (1 - x^3)}}$. Vergl. Crelle, Journ., 32, S. 213.

5) $\int \frac{dz}{\sqrt[3]{z(1 - z^4)}}, \quad z = t^{1/2}, \quad t^3 - \frac{1}{t^3} = -2v, \quad v = w^{3/2}$

6) $\int \frac{dt}{\sqrt{t^8 + \alpha t^4 + 1}}, \quad \frac{1}{t} = z, \quad z = tgn \frac{\varphi}{2}, \quad cos\, \varphi = x$

7) $\int \frac{dz}{\sqrt{z^6 + \alpha z^3 + 1}}, \quad z = tgn \frac{\varphi}{2}, \quad 2 cos \frac{\varphi}{2} = \sqrt{1 + sin\, \varphi}$
$+ \sqrt{1 - sin\, \varphi}, \quad 1 + sin\, \varphi = x_1, \quad 1 - sin\, \varphi = x_2,$

8) $\int \frac{dz}{\sqrt{a + bz^2 + cz^4 + dz^6}}$, $z^2 = x$,

9) $\int \frac{x\,dx}{\sqrt[4]{a + bx^2 + cx^4}}$, $a + bx^2 + cx^4 = z^4$,

10) $\int \frac{dx}{\sqrt[4]{a + bx^2 + cx^4}}$, $a + bx^2 + cx^4 = x^2 z^2$,

11) $\int dx(a + bx + cx^2 + dx^3)^{\pm\frac{1}{3}}$, $\sqrt[3]{a + bx + cx^2 + dx^3}$

$$= \begin{cases} \sqrt[3]{a + z} \\ x\sqrt[3]{a + z} \end{cases}$$

12) $\int \frac{dx}{\sqrt{a + bx + cx^2 + dx^3 + cx^4 + bx^5 + ax^6}}$, $x + \frac{1}{x} = 2z$

13) $\int \frac{d\varphi}{\sqrt{a + b\cos\varphi + c\sin\varphi}}$. Setze $\varphi = 2\psi + \alpha$ und bestimme α aus $b\sin\alpha = c\cos\alpha$.

14) $\int \frac{d\varphi}{\sqrt{A + B\cos\varphi + C\sin\varphi + D\cos\varphi + E\sin\varphi\cos\varphi + F\sin^2\varphi}}$,

$z = tgn\,\varphi$.

Vergleiche Gauss' Werke III, S. 333.

15) $A = \int \frac{d\varphi}{\sqrt[4]{1 - \cos^2\alpha\sin^2\varphi}}$, $\sqrt[4]{1 - \cos^2\alpha\sin^2\varphi} = y\sqrt[4]{\sin\alpha}$

16) $B = \int \frac{d\varphi}{\sqrt[3]{1 - \cos^2\alpha\sin^2\varphi}}$, $\sqrt[3]{1 - \cos^2\alpha\sin^2\varphi} = y\sqrt[3]{\sin\alpha}$

17) $C = \int \sqrt{\frac{1 - \cos^2\alpha\sin^2\varphi}{\sin\varphi}}\,d\varphi$, $\sin\varphi = \frac{y^2}{\sqrt{\cos\alpha}}$.

Diese Integrale reduciren sich auf

$$A = -2\int \frac{y^2\sqrt[4]{\sin\alpha}\,dy}{\sqrt{-\sin\alpha(1 + y^8) + (1 + \sin^2\alpha)y^4}}$$

$$B = -\frac{3}{2}\int \frac{x\sqrt[3]{\sin\alpha}\,dx}{\sqrt{-\sin\alpha(1 + x^6) + (1 + \sin^2\alpha)x^3}}$$

$$C = 2\sqrt[4]{\cos\alpha}\int \frac{(1 - \cos\alpha\, y^4)\,dy}{\sqrt{(1 + y^8)\cos\alpha - (1 + \cos^2\alpha)y^4}}.$$

Vergleiche: Verhust: Chap. XIV. Dasselbe erweitert mit Literatur, Enneper: Note I.

§. 117.

Pseudo-elliptische Integrale.

1) Sei F eine algebraische rationale Function, so wird, wenn

$$sin^2 \varphi = z$$

gesetzt wird,

$$\int \frac{sin\,\varphi\, F(sin^2 \varphi)\, d\varphi}{\sqrt{1 - \varepsilon^2 sin^2 \varphi}} = \frac{1}{2} \int \frac{F(z)\, dz}{\sqrt{(1 - z)(1 - \varepsilon^2 z)}}$$

$$\int \frac{cos\,\varphi\, F(cos^2 \varphi)\, d\varphi}{\sqrt{1 - \varepsilon^2 sin^2 \varphi}} = \frac{1}{2} \int \frac{F(1 - z)\, dz}{\sqrt{z(1 - \varepsilon^2 z)}}$$

$$\int \frac{tgn\,\varphi\, F(tgn^2 \varphi)\, d\varphi}{\sqrt{1 - \varepsilon^2 sin^2 \varphi}} = \frac{1}{2} \int \frac{F\left(\frac{z}{1 - z}\right) dz}{z(1 - z)\sqrt{1 - \varepsilon^2 z}}.$$

Diese Integrale sind also nicht elliptisch.

2) Ebenso lassen sich die Integrale von der Form

$$\int \frac{f(x)\, dx}{\sqrt{(1 - x^2)(1 - \varepsilon^2 x^2)}},$$

wenn f eine solche Function ist, dass resp.

$$f(x^2) = -f\left(\frac{1}{\varepsilon^2 x^2}\right)$$

$$f(x^2) = -f\left\{\frac{1 - \varepsilon^2 x^2}{\varepsilon^2(1 - x^2)}\right\}$$

$$f(x^2) = -f\left\{\frac{1 - x^2}{1 - \varepsilon^2 x^2}\right\},$$

durch die Substitutionen

$$p = \frac{1}{x}\sqrt{(1 - x^2)(1 - x^2 \varepsilon^2)}, \quad p = x\sqrt{\frac{1 - \varepsilon^2 x^2}{1 - x^4}}$$

$$p = x\sqrt{\frac{1 - x^2}{1 - x^2 \varepsilon^2}}$$

auf algebraische Integrale zurückführen.

Vergl. Hermitte: Liouville Journ. VI, p. 5 bis 18.

§. 118.

Elliptische Integrale erster Gattung.

1) $$F(\varphi, \varepsilon) = \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \varepsilon^2 \sin^2 \varphi}}, \quad \varepsilon^2 < 1.$$

2) Sei
$$\varDelta \varphi = \sqrt{1 - \varepsilon^2 \sin^2 \varphi},$$
so wird, wenn
$$\cos \sigma = \cos \varphi \cos \psi \mp \sin \varphi \sin \psi \varDelta \sigma,$$
$$F(\varphi) \pm F(\psi) = F(\sigma).$$

3) Es ist auch
$$- F(\varphi) = + F(- \varphi)$$
$$\frac{d\varphi}{\varDelta \varphi} + \frac{d\psi}{\varDelta \psi} = 0.$$

4) Sei ε_1 der complementäre Modul, so dass
$$\varepsilon^2 + \varepsilon_1^2 = 1,$$
so sollen die vollständigen Integrale bezeichnet werden wie folgt:
$$\varkappa = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \varepsilon^2 \sin^2 \varphi}}, \quad \varkappa' = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \varepsilon_1^2 \sin^2 \varphi}}.$$

5) Sei
$$\left. tgn\, \varphi = \frac{\sin 2w}{\varepsilon + \cos 2w}, \quad \frac{2\sqrt{\varepsilon}}{1+\varepsilon} = \varepsilon_1 \right\} \text{ Landen'sche Transformation,}$$
so wird
$$\int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\varDelta \varphi} = \frac{2}{1+\varepsilon} \int_0^{w} \frac{dw}{\sqrt{1 - \varepsilon_1^2 \sin^2 w}}.$$

6) Sei
$$\frac{2\sqrt{\varepsilon_{n-1}}}{1 + \varepsilon_{n-1}} = \varepsilon_n$$
$$\sin \{2\varphi_n - \varphi_{n-1}\} = \varepsilon_{n-1} \sin \varphi_{n-1},$$
so wird
$$F(\varphi, \varepsilon) = \varepsilon_n F(\varphi_n, \varepsilon_n) \sqrt{\frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2 \ldots \varepsilon_{n-1}}{\varepsilon}}.$$

Wird

$$\varepsilon_n = 1,$$

so folgt

$$F(\varphi, \varepsilon) = \varepsilon\, \varepsilon_1\, \varepsilon_2 \ldots \varepsilon_{n-1} \log tgn \left\{ \frac{1}{2} \varphi_n + \frac{\pi}{4} \right\}.$$

7) Setzt man

$$tgn^2 \varphi = \frac{1}{\varepsilon_1} \frac{1 + \sin\psi}{1 - \sin\psi},$$

so folgt:

$$\frac{d\varphi}{\Delta\varphi} = \frac{1}{1 + \varepsilon_1} \frac{d\psi}{\sqrt{1 - \left(\frac{1 - \varepsilon_1}{1 + \varepsilon_1}\right)^2 \sin^2\psi}}.$$

8) Wird weiter

$$\sin\psi = \frac{2(1 + \varepsilon_1)\cos\theta}{(1 + \sqrt{\varepsilon_1})^2 + (1 - \sqrt{\varepsilon_1})^2 \sin^2\theta}$$

gesetzt, so ergiebt sich:

$$\frac{d\psi}{\sqrt{1 - \left(\frac{1 - \varepsilon_1}{1 + \varepsilon_1}\right)^2 \sin^2\psi}} = \frac{2(1 + \varepsilon_1)\, d\theta}{\sqrt{(1 + \sqrt{\varepsilon_1})^4 - (1 - \sqrt{\varepsilon_1})^4 \sin^2\theta}}.$$

9) Verbindet man beide Substitutionen, so wird für

$$(1 + \varepsilon_1)\sin^2\varphi = \frac{(1 + \sqrt{\varepsilon_1})^2 + 2(1 + \varepsilon_1)\sin\theta + (1 - \sqrt{\varepsilon_1})^2 \sin^2\theta}{\{1 + \sqrt{\varepsilon_1} + (1 - \sqrt{\varepsilon_1})\sin\theta\}^2}$$

$$\frac{d\varphi}{\Delta\varphi} = \frac{2}{(1 + \sqrt{\varepsilon_1})^2} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - \left(\frac{1 - \sqrt{\varepsilon_1}}{1 + \sqrt{\varepsilon_1}}\right)^4 \sin^2\theta}}.$$

§. 119.

Elliptische Integrale zweiter Gattung.

1) Bestehen die Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} F(\varphi) + F(\psi) &= F(\sigma) \\ \cos\sigma &= \cos\varphi\cos\psi - \sin\varphi\sin\psi\,\Delta\sigma \\ \frac{d\varphi}{\Delta\varphi} + \frac{d\psi}{\Delta\psi} &= 0 \end{aligned}\right\} (A)$$

so wird, wenn

$$\dot{E}(\varphi) = E(\varphi, \varepsilon) = \int_0^{\varphi} \varDelta \varphi \, d\varphi$$

gesetzt wird,

$$E(\varphi) + E(\psi) - E(\sigma) = \varepsilon^2 \sin\varphi \sin\psi \sin\sigma.$$

2) Für die vollständigen Integrale

$$E = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \sqrt{1 - \varepsilon^2 \sin^2\varphi}, \quad E' = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \sqrt{1 - \varepsilon_1^2 \sin^2\varphi}$$

gilt die Beziehung

$$K'E + KE' = KK' + \frac{\pi}{2}.$$

3) Setzt man

$$u = \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\varDelta\varphi},$$

so wird

$$\int_0^{\varphi} \varDelta \varphi \, d\varphi = \int_0^{u} \varDelta n^2 u \, du = E(u)$$

und

$$E = \int_0^{K} \varDelta n^2 u \, du - E(K),$$

wobei

$$K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\varDelta\varphi}.$$

Diese Form der Integrale zweiter Gattung rührt von Jacobi her.

4) Die Landen'sche Substitution liefert

$$E(\varphi_n, \varepsilon_n) = (1 + \varepsilon_n) E(\varphi_{n+1}, \varepsilon_{n+1}) + \frac{1 - \varepsilon_n^2}{2} F(\varphi_n, \varepsilon_n) - \varepsilon_n \sin\varphi_n,$$

wird $\varepsilon_n = 1$, so folgt hieraus

$$E(\varphi_n \varepsilon_n) = \sin\varphi_n.$$

5) $$\frac{d}{d\varepsilon}\{F(\varphi, \varepsilon)\} = -\frac{1}{\varepsilon} F(\varphi, \varepsilon) + \frac{1}{\varepsilon \varepsilon_1^2} E(\varphi, \varepsilon) - \frac{\varepsilon}{\varepsilon_1^2} \frac{\sin\varphi \cos\varphi}{\varDelta\varphi}$$

6) $\frac{d}{d\varepsilon}\{F(\varphi,\varepsilon_1)\} = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_1^2}F(\varphi,\varepsilon_1) - \frac{1}{\varepsilon\,\varepsilon_1^2}E(\varphi,\varepsilon_1)$

$$+ \frac{1}{\varepsilon}\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{\sqrt{1-\varepsilon_1^2\sin^2\varphi}}$$

7) $\frac{d}{d\varepsilon}\{E(\varphi,\varepsilon)\} = -\frac{1}{\varepsilon}\{F(\varphi,\varepsilon) - E(\varphi,\varepsilon)\}$

8) $\frac{d}{d\varepsilon}\{E(\varphi,\varepsilon_2)\} = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_1^2}\{F(\varphi,\varepsilon_2) - E(\varphi,\varepsilon_2)\}.$

Speciell für $\varphi = \frac{\pi}{2}$

9) $\frac{dK}{d\varepsilon} = -\frac{1}{\varepsilon}\left\{K - \frac{1}{\varepsilon_1^2}E\right\}$

10) $\frac{dK'}{d\varepsilon} = \frac{1}{\varepsilon_1^2}\left\{\varepsilon K - \frac{1}{\varepsilon}E'\right\}$

11) $\frac{dE}{d\varepsilon} = -\frac{1}{\varepsilon}\{K - E\}$

12) $\frac{dE'}{d\varepsilon} = \frac{1}{\varepsilon_1^2}\{\varepsilon K' - \varepsilon E\}$

Vergl. Enneper: Elliptische Functionen, §. 27.

13) $\sin\beta\cos\beta\sqrt{1-\varepsilon_1^2\sin^2\beta}\int_0^\alpha \frac{\cos^2\theta}{1-\cos^2\beta\cos^2\theta}\frac{d\theta}{\sqrt{1-\varepsilon^2\sin^2\theta}}$

$$+\sin\alpha\cos\alpha\sqrt{1-\varepsilon^2\sin^2\alpha}\int_0^\beta \frac{\cos^2\theta}{1-\cos^2\alpha\cos^2\theta}\frac{d\theta}{\sqrt{1-\varepsilon_1^2\sin^2\theta}}$$

$$= \frac{\pi}{2} - \{F(\alpha,\varepsilon)E(\beta,\varepsilon_1) + E(\alpha,\varepsilon)F(\beta,\varepsilon_1) - F(\alpha,\varepsilon)F(\beta,\varepsilon_1)\}.$$

Ibid. §. 28, 29.

§. 120.

Elliptische Integrale dritter Gattung.

1) Sei

$$\Pi(\varphi,a,\varepsilon) = \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{(1+a\sin^2\varphi)\Delta\varphi},$$

so kann dieses Integral immer in ein solches verwandelt werden, bei dem a negativ und der absolute Betrag von a, $|a|$

$$0 < |a| < 1$$

wird.

I. a zwischen $-\infty$ und -1.

Setze

$$a = -\frac{1 - \varepsilon^2 \sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha},$$

so wird

$$\sin^2 \alpha = \frac{a+1}{a+\varepsilon}, \quad 0 < \alpha < \frac{\pi}{2},$$

sodann ist:

$$\Pi(\varphi, a, \varepsilon) = \frac{1 - \varepsilon^2 \sin^2 \alpha}{1 - \varepsilon^2} \operatorname{cotg}^2 \alpha \, \Pi(\varphi, -\varepsilon^2 \sin^2 \alpha, \varepsilon) - \frac{\operatorname{cotg}^2 \alpha}{1 - \varepsilon^2} F(\varphi, \varepsilon)$$

$$+ \frac{\sqrt{1 - \varepsilon^2 \sin^2 \alpha}}{2(1 - \varepsilon^2)} \operatorname{cotg} \alpha \log \left\{ \frac{1 + \operatorname{tgn} \alpha \operatorname{tgn} \varphi \sqrt{(1 - \varepsilon^2 \sin^2 \alpha)(1 - \varepsilon^2 \sin^2 \varphi)}}{1 - \operatorname{tgn} \alpha \operatorname{tgn} \varphi \sqrt{(1 - \varepsilon^2 \sin^2 \alpha)(1 - \varepsilon^2 \sin^2 \varphi)}} \right\}.$$

II. Ist a zwischen 0 und ∞, so setze

$$a = \varepsilon^2 \operatorname{tgn}^2 \alpha,$$

so dass:

$$\Pi(\varphi, a, \varepsilon) = -\frac{(1 - \varepsilon^2) \sin^2 \alpha}{1 + \varepsilon^2 \operatorname{tgn}^2 \alpha} \Pi\{\varphi, -(\cos^2 \alpha + \varepsilon^2 \sin^2 \alpha), \varepsilon\} + \frac{F(\varphi, \varepsilon)}{1 + \varepsilon^2 \operatorname{tgn}^2 \alpha}$$

$$+ \frac{\sin \alpha}{\sqrt{1 + \varepsilon^2 \operatorname{tgn}^2 \alpha}} \operatorname{arc\,tgn} \left\{ \sin \alpha \operatorname{tgn} \varphi \sqrt{(1 + \varepsilon^2 \operatorname{tgn}^2 \alpha)(1 - \varepsilon^2 \sin^2 \varphi)} \right\}.$$

2) Setzen wir also

$$\Pi(\varphi, n) = \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{(1 + n \sin^2 \varphi) \Delta \varphi}, \quad 0 < |n| < 1$$

und es mögen die Gleichungen (A) des vorhergehenden Abschnittes bestehen, so wird, wenn

$$\omega = \frac{(1+n)(\varepsilon^2 + n)}{n}$$

$$\Pi(\varphi, n) + \Pi(\psi, n) - \Pi(\sigma, n)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\omega}} \operatorname{arc\,tgn} \frac{n \sqrt{\omega} \sin \varphi \sin \psi \sin \sigma}{1 - n \sin^2 \sigma - n \sin \varphi \sin \psi \cos \sigma \Delta \sigma}.$$

3) Sei

$$\varrho = \frac{\operatorname{tgn} \varphi}{\sqrt{1 - \lambda^2 \sin^2 \varphi}}$$

$$\lambda = (1 + n)\left(1 + \frac{\varepsilon^2}{n}\right),$$

so wird

$$\Pi(\varphi, n, \varepsilon) + \Pi\left(\varphi, \frac{\varepsilon^2}{n}, \varepsilon\right) = F(\varphi, \varepsilon) + \int_0^\varrho \frac{dz}{1 + \lambda z^2}.$$

4) Sei

$$\Pi(\varphi, n) = \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{(1 + n \sin^2\varphi) \Delta\varphi},$$

so haben wir die Normalform von Legendre vor uns. Die Normalform von Jacobi lautet:

$$\Pi'(u, a) = \int_0^u \frac{\varepsilon^2 sn\, a\, cn\, a\, \Delta n\, a\, m^2 u}{1 - \varepsilon^2 sn^2 a\, sn^2 u}\, du$$

und es besteht die Beziehung

$$\Pi(\varphi, n) = u + \frac{tgnam\, a}{\Delta n\, a} \Pi'(u, a),$$

wobei

$$n = -\varepsilon^2 sn^2 a, \quad u = \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\Delta\varphi}.$$

5) Man merke auch

$$\Pi'(u, a) = \Pi'(a, u) + u E(a) - a E(u).$$

Diese Formel führt das Integral der dritten Gattung auf ein anderes zurück, in welchem das Argument und der Parameter mit einander vertauscht sind.

6) Wir haben folgende Reductionsformel:

1) n zwischen 0 und $-\varepsilon^2$, $n = -\varepsilon^2 sn^2 a$

$$\int_0^\varphi \frac{d\varphi}{(1 + n \sin^2\varphi) \Delta\varphi} = u + \frac{tgnam\, a}{\Delta n\, a} \Pi'(u, a)$$

2) n zwischen $-\varepsilon^2$ und -1, $n = -\varepsilon^2 sn^2(ia + K)$

$$\int_0^\varphi \frac{d\varphi}{(1 + n \sin^2\varphi) \Delta\varphi} = u + \frac{\Delta n(a, \varepsilon_1)}{\varepsilon_1^2 sn(a, \varepsilon_1) cn(a, \varepsilon_1)} i \Pi'(u, ia + \varkappa)$$

3) n zwischen -1, und $-\infty$, $n = -\varepsilon^2 sn^2(a + i\varkappa')$

$$\int^\varphi \frac{d\varphi}{(1 + n \sin^2\varphi) \Delta\varphi} = u - \frac{tgnam\, a}{\Delta n\, a} \Pi'(u, a + i\varkappa)$$

4) n positiv, $n = -\varepsilon^2 sn^2 i a$

$$\int_0^\varphi \frac{d\varphi}{(1 + n \sin^2\varphi)\Delta\varphi} = u + \frac{sn(a, \varepsilon_1)\, cn(a, \varepsilon_1)}{\Delta n(a, \varepsilon_1)}\, i\, \Pi(u, i a)$$

7) Man merke insbesondere:

$$\Pi(0, a) = 0, \quad \Pi(\varphi, \varkappa) = 0, \quad \Pi(\varphi, i\varkappa') = \infty,$$
$$\Pi(\varphi, \varkappa \pm i\varkappa') = 0, \quad \Pi(\varkappa, a) = \Pi E(a) - a E.$$

§. 121.

Reihenentwickelungen für elliptische Integrale.

1) $$F(\varphi, \varepsilon) = \varphi K - \sin\varphi \cos\varphi \left\{\frac{1.1}{2.2}\varepsilon^2 + \frac{1.3}{2.4} A_1 \varepsilon^4 + \frac{1.3.5}{2.4.6} A_2 \varepsilon^6 + \cdots\right\}$$

$$A_1 = \frac{1}{4}\sin^2\varphi + \frac{3}{2.4}$$
$$A_2 = \frac{1}{6}\sin^4\varphi + \frac{5}{6.4}\sin^2\varphi + \frac{5.3}{6.4.2}$$
$$A_3 = \frac{1}{8}\sin^6\varphi + \frac{7}{8.6}\sin^4\varphi + \frac{7.5}{8.6.4}\sin^2\varphi + \frac{7.5.3}{8.6.4.2}$$

etc.

Für den Fall, dass ε nahe an 1 ist, wendet man bequemer die folgende Entwickelung an:

2) $$F(\varphi, \varepsilon) = K' \log tgn\left(45^0 + \frac{\varphi}{2}\right) - \frac{1}{\sin\varphi}\left\{\frac{1}{2} . A_1 \varepsilon_1^2 - \frac{1.3}{2.4} A_2 \varepsilon_1^4 + \frac{1.3.5}{2.4.6} A_3 \varepsilon_1^6 - \cdots\right\}$$

$$A_1 = \frac{1}{2} tgn^2\varphi$$
$$A_2 = \frac{1}{4} tgn^2\varphi - \frac{3}{2.4} tgn^2\varphi$$
$$A_3 = \frac{1}{6} tgn^4\varphi - \frac{5}{6.4} tgn^4\varphi + \frac{5.3}{6.4.2} tgn^2\varphi$$

etc.

3) Sei

$$\eta = \frac{1 - \varepsilon_1}{1 + \varepsilon_1}$$

und

$$F(\varphi, \varepsilon) = A\varphi - A_1 \sin 2\varphi + A_2 \sin 4\varphi - A_3 \sin 6\varphi + \cdots,$$

so wird

$$A = (1 + \eta)\left\{1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \eta^2 + \left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2 \eta^4 + \left(\frac{1.3.5}{2.4.6}\right)^2 \eta^6 + \cdots\right.$$

$$A_1 = \frac{1 + \eta}{1}\left\{\frac{1}{2}\eta + \frac{1}{2}\cdot\frac{1.3}{2.4}\eta^3 + \frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{1.3.5}{2.4.6}\eta^5 + \cdots\right.$$

$$A_2 = \frac{1 + \eta}{2}\left\{\frac{1}{1}\cdot\frac{1.3}{2.4}\eta^2 + \frac{1}{2}\cdot\frac{1.3.5}{2.4.6}\eta^4 + \frac{1.3}{2.4}\cdot\frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}\eta^6 + \cdots\right.$$

$$A_3 = \frac{1 + \eta}{3}\left\{\frac{1}{1}\cdot\frac{1.3.5}{2.4.6}\eta^3 + \frac{1}{2}\cdot\frac{1.3.5.7}{2.4.6.8}\eta^5 + \cdots\right.$$

etc.

Man merke insbesondere:

$$K = \frac{\pi}{2}\left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \varepsilon^2 + \left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2 \varepsilon^4 + \left(\frac{1.3.5}{2.4.6}\right)^2 \varepsilon^6 + \cdots\right.$$

$$E = \frac{\pi}{2}\left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 \varepsilon^2 + \left(\frac{1}{2.4}\right)^2 3\varepsilon^4 - \left(\frac{1.3}{2.4.6}\right)^2 5\varepsilon^6 + \cdots\right.$$

$$K = \log\left(\frac{4}{\varepsilon_1}\right)\left\{1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \varepsilon_1^2 + \left(\frac{3}{2.4}\right)^2 \varepsilon_1^4 + \left(\frac{1.3.5}{2.4.6}\right)^2 \varepsilon_1^6 + \cdots\right.$$

$$- \frac{1}{4}\left\{1 + \frac{21}{32}\varepsilon_1^2 + \frac{185}{384}\varepsilon_1^4 + \frac{18\,655}{49\,152}\varepsilon_1^6 + \cdots\right.$$

4) $$E(\varphi, \varepsilon) = \varphi E + \sin\varphi\cos\varphi\left\{\frac{1.1}{2.2}\varepsilon^2 + \frac{1}{2.4}\varepsilon^4 A_1 + \frac{1.3}{2.4.6}\varepsilon^6 A_2 + \cdots\right.$$

$$A_1 = \frac{1}{4}\sin^2\varphi + \frac{3}{4.2}$$

$$A_2 = \frac{1}{6}\sin^4\varphi + \frac{5}{6.4}\sin^2\varphi + \frac{5.3}{6.4.2}$$

$$A_3 = \frac{1}{8}\sin^6\varphi + \frac{7}{8.6}\sin^4\varphi + \frac{7.5}{8.6.4}\sin^2\varphi + \frac{7.5.3}{8.6.4.2}$$

etc.

5) $$E(\varphi, \varepsilon) = \sin\varphi - \log tgn\left(45^0 + \frac{\varphi}{2}\right) E'$$
$$- \frac{1}{\sin\varphi}\left\{\frac{1}{2} A_1 \varepsilon_1^2 - \frac{1}{2.4} A_2 \varepsilon_1^4 + \frac{1.3}{2.4.6} A_3 \varepsilon_1^6 - \cdots\right\}$$
$$A_1 = \frac{1}{2} tgn^2\varphi$$
$$A_2 = \frac{1}{4} tgn^4\varphi + \frac{3}{4.2} tgn^2\varphi$$
$$A_3 = \frac{1}{6} tgn^6\varphi - \frac{5}{6.4} tgn^4\varphi + \frac{5.3}{6.4.2} tgn^2\varphi$$
etc.

6) Seien η und ε beide sehr klein, so wird
$$\Pi(\varphi, -\eta^2, \varepsilon) = \varphi\left\{1 + \frac{1}{2} A_0 + \frac{1.3}{2.4} A_1 + \frac{1.3.5}{2.4.6} A_2 + \cdots\right\}$$
$$- \sin\varphi\cos\varphi\left\{\frac{1}{2} A + A_1 B_1 + A_2 B_2 + \cdots\right\}$$
wobei
$$A_0 = \eta^2 + \frac{1}{2}\varepsilon^2$$
$$A_1 = \eta^4 + \frac{1}{2}\eta^2\varepsilon^2 + \frac{1.3}{2.4}\varepsilon^4$$
$$A_2 = \eta^6 + \frac{1}{2}\eta^4\varepsilon^2 + \frac{1.3}{2.4}\varepsilon^2\eta^2 + \frac{1.3.5}{2.4.6}\varepsilon^6$$
etc.
$$B_1 = \frac{1}{4}\sin^2\varphi + \frac{3}{4.2}$$
$$B_2 = \frac{1}{6}\sin^4\varphi + \frac{5}{6.4}\sin^2\varphi + \frac{5.3}{6.4.2}$$
$$B_3 = \frac{1}{8}\sin^6\varphi + \frac{7}{8.6}\sin^4\varphi + \frac{7.5}{8.6.4}\sin^2\varphi + \frac{7.5.3}{8.6.4.2}$$
etc.

7) Sei η nahe an 1, ε sehr klein, so wird $-\eta^2 = \varepsilon\sin\theta$ gesetzt:
$$\Pi(\varphi, -\eta^2, \varepsilon) = \varphi\left\{1 - \frac{1}{2} A_0 + \frac{1.3}{2.4} A_1 - \frac{1.3.5}{2.4.6} A_2 + \cdots\right\}$$
$$+ \sin\varphi\cos\varphi\left\{\frac{1}{2} A_0 - A_1 B_1 + A_2 B_2 - A_3 B_3 + \cdots\right\}$$

$$A_0 = \varepsilon \sin\theta - \frac{1}{2}\varepsilon^2$$

$$A_1 = \varepsilon^2 \sin^2\theta - \frac{1}{2}\varepsilon^3 \sin\theta + \frac{1.3}{2.4}\varepsilon^4$$

$$A_2 = \varepsilon^3 \sin^3\theta - \frac{1}{2}\varepsilon^4 \sin^2\theta + \frac{1.3}{2.4}\varepsilon^5 \sin\theta - \frac{1.3.5}{2.4.6}\varepsilon^6$$

etc.

$$B_1 = \frac{1}{4}\sin^2\varphi + \frac{3}{2.4}$$

$$B_2 = \frac{1}{6}\sin^4\varphi + \frac{5}{6.4}\sin^2\varphi + \frac{5.3}{6.4.2}$$

etc.

8) η und ε seien nahe an 1.

$$\Pi(\varphi, -\eta^2, \varepsilon) = \frac{1}{2}\log tgn\left(45^0 + \frac{\varphi}{2}\right)\left\{1 + \frac{1}{4}A_0 + \frac{1.3}{4.6}A_1 + \frac{1.3.5}{4.6.8}A_2 + \cdots\right\}$$

$$+ \sin\varphi\left\{\frac{1}{2}\frac{1}{\cos^2\varphi} - A_0 B_0 + A_1 B_1 - A_2 B_2 + \cdots\right\}$$

$$A_0 = 1 - \eta^2 + \frac{1}{2}(1 - \varepsilon^2)$$

$$A_1 = (1 - \eta^2)^4 + \frac{1}{2}\varepsilon_1^2(1 - \eta^2) + \frac{1.3}{2.4}\varepsilon_1^4$$

$$A_3 = (1 - \eta^2)^6 + \frac{1}{2}\varepsilon_1^2(1 - \eta^2)^4 + \frac{1.3}{2.4}\varepsilon_1^4(1 - \eta^2) + \frac{1.3.5}{2.4.6}\varepsilon_1^6$$

etc.

$$B_0 = \frac{1}{4}\frac{1}{\cos^4\varphi} - \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}\frac{1}{\cos^2\varphi}$$

$$B_1 = \frac{1}{6}\frac{\sin^2\varphi}{\cos^6\varphi} - \frac{3.1}{6.4}\frac{1}{\cos^4\varphi} + \frac{3.1.1}{6.4.2}\frac{1}{\cos^2\varphi}$$

$$B_3 = \frac{1}{8}\frac{\sin^4\varphi}{\cos^8\varphi} - \frac{5.1}{8.6}\frac{\sin^2\varphi}{\cos^6\varphi} + \frac{5.3.1}{8.6.4}\frac{1}{\cos^4\varphi} - \frac{5.3.1.1}{8.6.4.2}\frac{1}{\cos^2\varphi}$$

etc.

Elliptische Functionen.

Allgemeine Formeln.

§. 122.

Es werde zur Abkürzung

sinus amplitudo mit *sin am* oder *sn*,
cosinus amplitudo mit *cos am* oder *cn*,
Delta amplitudo mit *Δ am* oder *Δ n*

bezeichnet.

Sei ε reell und kleiner als 1, ebenso ε_1, und sei

$$\varepsilon^2 + \varepsilon_1^2 = 1,$$

ferner

$$u = arg[ument]\; am[plitudo]\,\{\varphi \text{ für den Modul } \varepsilon\}$$

oder kürzer

$$u = argam\,\{\varphi, \varepsilon\},$$

so wird:

$$u = \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \varepsilon^2 \sin^2\varphi}} = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}\sqrt{1 - \varepsilon^2 x^2}},$$

dabei ist

$$x = \sin\varphi$$
$$\varphi = am\,\{u, \varepsilon\}$$
$$x = \sin am\,\{u, \varepsilon\}$$
$$\sqrt{1 - x^2} = \cos am\,\{u, \varepsilon\}$$
$$\sqrt{1 - \varepsilon^2 x^2} = \Delta am\,\{u, \varepsilon\}.$$

Aus diesen Gleichungen folgt sofort:

$$sn^2 u + cn^2 u = 1$$
$$\Delta n^2 u + \varepsilon^2 sn^2 u = 1$$
$$\Delta n^2 u - cn^2 u = \varepsilon_1^2$$
$$\Delta n^2 u - \Delta n^2 v = \varepsilon^2\{sn^2 v - sn^2 u\}$$
$$sn^2 u - sn^2 v = cn^2 v - cn^2 u$$

$$sn\,u = \sqrt{1 - cn^2 u}$$

$$sn\,u = \frac{1}{\varepsilon}\sqrt{1 - \Delta n^2 u}$$

$$cn\,u = \sqrt{1 - sn^2 u}$$

$$cn\,u = \sqrt{\Delta n^2 u + \varepsilon_1^2}$$

$$\Delta n u = \sqrt{1 - \varepsilon^2 sn^2 u}$$

$$\Delta n u = \sqrt{\varepsilon_1^2 + cn^2 u}.$$

Wir führen noch die vollständigen Integrale $\varkappa$ und $\varkappa'$ durch die Gleichungen

$$\varkappa = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \varepsilon^2 sin^2 \varphi}} = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}\sqrt{1 - \varepsilon^2 x^2}}$$

$$\varkappa' = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \varepsilon_1^2 sin^2 \varphi}} = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}\sqrt{1 - \varepsilon_1^2 x^2}}$$

und bemerken, dass

$$am(\varkappa - u) = coam(u).$$

Sodann gelten folgende Formeln:

1)
$$-\,sn\,u = sn\,(-\,u)$$
$$cn\,u = cn\,(-\,u)$$
$$\Delta n\,u = \Delta n\,(-\,u).$$

2)
$$sin\,coam\,u = \frac{cn\,u}{\Delta n\,u}$$

$$cos\,coam\,u = \varepsilon_1 \frac{sn\,u}{\Delta n\,u}$$

$$\Delta\,coam\,u = \frac{\varepsilon_1}{\Delta n\,u}.$$

3)
$$1 = \varepsilon\, sn\,u\, sn(u \pm i\varkappa').$$

4) Seien m, n positive ganze Zahlen; δ_1 und δ_2 entweder $+1$ oder -1, so wird, wenn zur Abkürzung

$$\{u + 2n\delta_1\varkappa + i\,2m\delta_2\varkappa'\} = w_1$$
$$\{u + 2n\delta_1\varkappa + i(2m+1)\delta_2\varkappa'\} = w_2$$
$$\{u + (2n+1)\delta_1\varkappa + i\,2m\delta_2\varkappa'\} = w_3$$
$$\{u + (2n+1)\delta_1\varkappa + i(2m+1)\delta_2\varkappa'\} = w_3,$$

gesetzt wird:

$$sn\, w_1 = (-1)^n\, sn\, u$$
$$cn\, w_1 = (-1)^{m+n}\, cn\, u$$
$$\Delta n\, w_1 = (-1)^m\, \Delta n\, u$$

$$sn\, w_2 = \frac{(-1)^n}{\varepsilon\, sn\, u}$$

$$cn\, w_2 = i\,\delta_2\,(-1)^{m+n+1}\,\frac{\Delta n\, u}{\varepsilon\, sn\, u}$$

$$\Delta n\, w_2 = i\,\delta_2\,(-1)^{m+1}\,\frac{cn\, u}{sn\, u}$$

$$sn\, w_3 = \delta_1\,(-1)^n\,\frac{cn\, u}{\Delta n\, u}$$

$$cn\, w_3 = \delta_1\,(-1)^{m+n-1}\,\frac{\varepsilon_1\, sn\, u}{\Delta n\, u}$$

$$\Delta n\, w_3 = (-1)^m\,\frac{\varepsilon_1}{\Delta n\, u}$$

$$sn\, w_4 = \delta_1\,(-1)^n\,\frac{\Delta n\, u}{\varepsilon\, cn\, u}$$

$$cn\, w_4 = i\,\delta_1\,\delta_2\,(-1)^{m+n+1}\,\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon\, cn\, u}$$

$$\Delta n\, w_4 = i\,\delta_2\,(-1)^m\,\frac{\varepsilon_1\, sn\, u}{cn\, u}$$

5)
$$sn(2n\varkappa + 2mi\varkappa') = 0$$
$$cn[(2n+1)\varkappa + 2mi\varkappa'] = 0$$
$$\Delta n[(2n+1)\varkappa + (2m+1)i\varkappa'] = 0.$$

6)
$$sn[2n\varkappa + (2m+1)i\varkappa'] = \infty$$
$$cn[2n\varkappa + (2m+1)i\varkappa'] = \infty$$
$$\Delta n[2n\varkappa + (2m+1)i\varkappa'] = \infty$$

7) Ist $sn\, u = sn\, v$, so wird:

$$u - v = 4n\varkappa + 2im\varkappa'$$
$$u + v = (4n+2)\varkappa + 2mi\varkappa'.$$

Ist $cn\, u = cn\, v$, so folgt:

$$u - v = 4n\varkappa + 2n(\varkappa + i\varkappa')$$
$$u + v = 4n\varkappa + 2n(\varkappa + i\varkappa').$$

Ist $\Delta n\, u = \Delta n\, v$, so wird:

$$u - v = 2n\varkappa + 4mi\varkappa'$$
$$u + v = 2n\varkappa + 4mi\varkappa'.$$

8) Ist

$$sn\, u = -\, sn\, v,$$

so wird:

$$v = 2n\varkappa + 2mi\varkappa' - (-1)^n u.$$

Ist

$$cn\, u = -\, cn\, v,$$

so folgt:

$$v = 2(2n + m + 1)\varkappa + 2mi\varkappa' \pm u.$$

Ist

$$\Delta n = -\, \Delta n\, v,$$

so wird:

$$v = 2n\varkappa + 2(2m + 1)i\varkappa' \pm u.$$

Specielle Formeln.

§. 123.

1)
$$sn\, 0 = 0$$
$$cn\, 0 = 1$$
$$\Delta n\, 0 = 1$$

2)
$$sn\, \varkappa = 1$$
$$cn\, \varkappa = 0$$
$$\Delta n\, \varkappa = \varepsilon_1$$

3)
$$sn\, \varkappa' = 1$$
$$cn\, \varkappa' = 0$$
$$\Delta n\, \varkappa' = \varepsilon$$

4)
$$sn\, 2\varkappa = 0$$
$$cn\, 2\varkappa = -\, 1$$
$$\Delta n\, 2\varkappa = 1$$

5)
$$sn\, 4\varkappa = 0$$
$$cn\, 4\varkappa = 1$$
$$\Delta n\, 4\varkappa = 1$$

6)
$$sn\, i\varkappa' = \infty$$
$$cn\, i\varkappa' = \infty$$
$$\Delta n\, i\varkappa' = \infty$$

7)
$$sn\, 2i\varkappa' = 0$$
$$cn\, 2i\varkappa' = -\, 1$$
$$\Delta n\, 2i\varkappa' = -\, 1$$

8)
$$sn\, 4i\varkappa' = 0$$
$$cn\, 4i\varkappa' = 1$$
$$\Delta n\, 4i\varkappa' = 1$$

9)
$$sn(\varkappa \pm i\varkappa') = \frac{1}{\varepsilon}$$
$$cn(\varkappa \pm i\varkappa') = \mp\, i\, \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon}$$
$$\Delta n(\varkappa \pm i\varkappa') = 0$$

10)
$$sn\,\frac{\varkappa}{2} = \frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon_1}}$$
$$cn\,\frac{\varkappa}{2} = \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{1+\varepsilon_1}}$$
$$\Delta n\,\frac{\varkappa}{2} = \sqrt{\varepsilon_1}$$

11)
$$sn\,i\,\frac{\varkappa'}{2} = \frac{i}{\sqrt{\varepsilon}}$$
$$cn\,i\,\frac{\varkappa'}{2} = \sqrt{\frac{1+\varepsilon}{\varepsilon}}$$
$$\Delta n\,i\,\frac{\varkappa'}{2} = \sqrt{1+\varepsilon}$$

12)
$$sn\left(\frac{\varkappa}{2} \pm i\varkappa'\right) = \frac{1}{\sqrt{1-\varepsilon_1}}$$
$$cn\left(\frac{\varkappa}{2} \pm i\varkappa'\right) = \mp i\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{1-\varepsilon_1}}$$
$$\Delta n\left(\frac{\varkappa}{2} \pm i\varkappa'\right) = \mp i\sqrt{\varepsilon}$$

13)
$$sn\left(\varkappa \pm i\,\frac{\varkappa'}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$$
$$cn\left(\varkappa \pm i\,\frac{\varkappa'}{2}\right) = \mp i\sqrt{\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}}$$
$$\Delta n\left(\varkappa \pm i\,\frac{\varkappa'}{2}\right) = \sqrt{1-\varepsilon}$$

14)
$$sn\left(\frac{\varkappa \pm i\varkappa'}{2}\right) = \sqrt{1 \pm i\,\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon}}$$
$$cn\left(\frac{\varkappa \pm i\varkappa'}{2}\right) = (1 \mp i)\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{2\varepsilon}}$$
$$\Delta n\left(\frac{\varkappa \pm i\varkappa'}{2}\right) = \varepsilon_1\sqrt{1 \mp i\,\frac{\varepsilon}{\varepsilon_1}}$$

15)
$$sn\,(2\varkappa \pm 2i\varkappa') = 0$$
$$cn\,(2\varkappa \pm 2i\varkappa') = 1$$
$$\Delta n\,(2\varkappa \pm 2i\varkappa') = -1$$

16)
$$sn\,(4\varkappa \pm 4i\varkappa') = 0$$
$$cn\,(4\varkappa \pm 4i\varkappa') = 1$$
$$\Delta n\,(4\varkappa \pm 4i\varkappa') = 1$$

17)
$$sn\,(u \pm \varkappa) = \pm\frac{cn\,u}{\Delta n\,u}$$
$$cn\,(u \pm \varkappa) = \mp\varepsilon_1\frac{sn\,u}{\Delta n\,u}$$
$$\Delta n\,(u \pm \varkappa) = \frac{\varepsilon_1}{\Delta n\,u},$$

18) $$sn\,(u \pm i\varkappa') = \frac{1}{\varepsilon\, sn\, u}$$

$$cn\,(u \pm i\varkappa') = \mp \frac{i\,\Delta n\, u}{\varepsilon\, sn\, u}$$

$$\Delta n\,(u \pm i\varkappa') = \mp i\,\frac{cn\, u}{sn\, u}$$

19) $$sn\,(u \pm 4\varkappa) = sn\, u$$
$$cn\,(u \pm 4\varkappa) = cn\, u$$
$$\Delta n\,(u \pm 4\varkappa) = \Delta n\, u$$

20) $$sn\,(u \pm 2\varkappa) = -\, sn\, u$$
$$cn\,(u \pm 2\varkappa) = -\, cn\, u$$
$$\Delta n\,(u \pm 2\varkappa) = \Delta n\, u$$

21) $$sn\,(u \pm 2i\varkappa') = sn\, u$$
$$cn\,(u \pm 2i\varkappa') = -\, cn\, u$$
$$\Delta n\,(u \pm 2i\varkappa') = -\, \Delta n\, u$$

22) $$sn\,(u \pm 4i\varkappa') = sn\, u$$
$$cn\,(u \pm 4i\varkappa') = cn\, u$$
$$\Delta n\,(u \pm 4i\varkappa') = \Delta n\, u$$

23) $$sn\,(u + \varkappa \pm i\varkappa') = \frac{\Delta n\, u}{\varepsilon\, cn\, u}$$

$$cn\,(u + \varkappa \pm i\varkappa') = \mp \frac{i\,\varepsilon_1}{\varepsilon\, cn\, u}$$

$$\Delta n\,(u + \varkappa \pm i\varkappa') = \pm \frac{i\,\varepsilon_1\, sn\, u}{cn\, u}$$

24) $$sn\,(u - \varkappa \pm i\varkappa') = -\, \frac{\Delta n\, u}{\varepsilon\, cn\, u}$$

$$cn\,(u - \varkappa \pm i\varkappa') = \pm \frac{i\,\varepsilon_1}{\varepsilon\, cn\, u}$$

$$\Delta n\,(u - \varkappa \pm i\varkappa') = \pm\, i\,\varepsilon_1\,\frac{sn\, u}{cn\, u}$$

25) $$sn\,(u \pm 2\varkappa \pm 2i\varkappa') = -\, sn\, u$$
$$cn\,(u \pm 2\varkappa \pm 2i\varkappa') = cn\, u$$
$$\Delta n\,(u \pm 2\varkappa \pm 2i\varkappa') = -\, \Delta n\, u$$

26) $$sn\,(u \pm 4\varkappa \pm 4i\varkappa') = sn\, u$$
$$cn\,(u \pm 4\varkappa \pm 4i\varkappa') = cn\, u$$
$$\Delta n\,(u \pm 4\varkappa \pm 4i\varkappa') = \Delta n\, u$$

§. 124.

Einige Differentialformeln.

1) $$\frac{d\,sn\,u}{du} = cn\,u\,\Delta n\,u$$

$$\frac{d\,cn\,u}{du} = -\,sn\,u\,\Delta n\,u$$

$$\frac{d\,\Delta n\,u}{du} = -\,\varepsilon^2\,sn\,u\,cn\,u$$

2) $$\frac{d^2\,sn\,u}{du^2} = -\,(1+\varepsilon^2)\,sn\,u + 2\,\varepsilon^2\,sn^3\,u$$

$$\frac{d^2\,cn\,u}{du^2} = (2\,\varepsilon^2 - 1)\,cn\,u - (1+\varepsilon^2)\,cn^3\,u$$

$$\frac{d^2\,\Delta n\,u}{du^2} = (1 + \varepsilon^2\,\varepsilon_1)\,\Delta n - \varepsilon_1\,\Delta n^3$$

3) $$\frac{d\log sn\,u}{du} = \frac{cn\,u\,\Delta n\,u}{sn\,u} = \varepsilon_1\,\frac{cn\,u}{cn\,(\varkappa - u)}$$

$$\frac{d\log cn\,u}{du} = -\,\frac{sn\,u\,\Delta n\,u}{cn\,u} = -\,\frac{sn\,u}{sn\,(\varkappa - u)}$$

$$\frac{d\log \Delta n\,u}{du} = -\,\varepsilon^2\,\frac{sn\,u\,cn\,u}{\Delta n\,u} = -\,\varepsilon^2\,sn\,u\,sn\,(\varkappa - u)$$

4) $$\frac{d}{du}\log\sqrt{\frac{1 - sn\,u}{1 + sn\,u}} = -\,\frac{\Delta n\,u}{cn\,u} = -\,\frac{1}{sn\,(\varkappa - u)}$$

$$\frac{d}{du}\log\sqrt{\frac{1 - cn\,u}{1 + cn\,u}} = \frac{\Delta n\,u}{sn\,u} = \frac{\varepsilon_1}{cn\,(\varkappa - u)}$$

$$\frac{d}{du}\log\sqrt{\frac{1 - \Delta n\,u}{1 + cn\,u}} = \frac{cn\,u}{sn\,u} = \varepsilon_1\,\frac{sn\,(\varkappa - u)}{cn\,(\varkappa - u)}.$$

§. 125.

Elliptische Functionen mit doppeltem und mehrfachem Argument.

1) $sn\,2u = \dfrac{2\,sn\,u\,cn\,u\,\Delta n\,u}{1 - \varepsilon^2\,sn^4 u}$

2) $cn\,2u = \dfrac{1}{\varepsilon^2}\cdot\dfrac{\Delta^4 n\,u - \varepsilon'^2}{1 - \varepsilon^2\,sn^4 u} = \dfrac{cn^2 u - sn^2 u\,\Delta^2 n\,u}{1 - \varepsilon^2\,sn^4 u}$

$= \dfrac{1 - 2\,sn^2 u + \varepsilon^2\,sn^4 u}{1 - \varepsilon^2\,sn^4 u}$

3) $\Delta n\,2u = \dfrac{\varepsilon'^2 + \varepsilon^2\,cn^4 u}{1 - \varepsilon^2\,sn^4 u} = \dfrac{\Delta^2 n\,u - \varepsilon^2\,sn^2 u\,cn^2 u}{1 - \varepsilon^2\,sn^4 u}$

$= \dfrac{1 - 2\,\varepsilon^2\,sn^2 u + \varepsilon^2\,sn^2 u}{1 - \varepsilon^2\,sn^4 u}$

4) $cn\,2u + \Delta n\,2u = \dfrac{2\,cn^2 u\,\Delta^2 n\,u}{1 - \varepsilon^2\,sn^4 u}$

5) $cn\,2u - \Delta n\,2u = -\dfrac{2\,\varepsilon'^2\,sn^2 u}{1 - \varepsilon^2\,sn\,u}$

6) $sn^2 u = \dfrac{1}{\varepsilon^2}\,\dfrac{1 - \Delta n\,2u}{1 + cn\,2u} = \dfrac{1 - cn\,2u}{1 + \Delta n\,2u}$

7) $cn^2 u = \dfrac{cn\,2u + \Delta n\,2u}{1 + \Delta n\,2u} = \dfrac{\varepsilon'^2}{\varepsilon^2}\,\dfrac{1 - \Delta n\,2u}{\Delta n\,2u - cn\,2u}$

8) $\Delta^2 n\,u = \dfrac{cn\,2u + \Delta n\,2u}{1 + cn\,2u} = \varepsilon'^2\,\dfrac{1 - cn\,2u}{\Delta n\,2u - cn\,2u}$

9) $\dfrac{sn\,u}{cn\,u\,\Delta n\,u} = \dfrac{sn\,2u}{cn\,2u + \Delta n\,2u} = \dfrac{1}{\varepsilon'^2}\,\dfrac{\Delta n\,2u - cn\,2u}{sn\,2u}$

10) $\dfrac{cn\,u}{sn\,u\,\Delta n\,u} = \dfrac{1 + cn\,2u}{sn\,2u} = \dfrac{sn\,2u}{1 - cn\,2u}$

11) $\dfrac{\Delta n\,u}{sn\,u\,cn\,u} = \dfrac{1 + \Delta n\,2u}{sn\,2u} = \varepsilon^2\,\dfrac{sn\,2u}{1 - \Delta n\,2u}$

12) $\dfrac{cn\,u\,\Delta n\,u}{sn\,u} = \dfrac{cn\,2u}{sn\,2u} + \dfrac{\Delta n\,2u}{sn\,2u}$

13) $\dfrac{sn\,u\,\Delta n\,u}{cn\,u} = \dfrac{1}{sn\,2u} - \dfrac{cn\,2u}{sn\,2u}$

14) $\frac{sn\,u\,cn\,u}{\Delta n\,u} = \frac{1}{\varepsilon^2}\left\{\frac{1}{sn\,2u} - \frac{\Delta n\,2u}{sn\,2u}\right\}.$

Um die Formeln für halbe Argumente zu erhalten, vertausche man u mit $\frac{u}{2}$.

Sei zur Abkürzung

$$2\Delta n\,u\,cn\,u = p$$
$$1 - \varepsilon^2 sn^4 u = q$$
$$\varepsilon^2 sn^4 u = r$$
$$1 - 2\,sn^2 u + \varepsilon^2 sn^4 u = s,$$

so wird:

16) $sn\,2u = \frac{p}{q}\,sn\,u$

17) $sn\,3u = \frac{p^2 - q^2}{q^2 - rp^2}\,sn\,u$

18) $sn\,4u = \frac{(1 + r)p^2 - 2q^2}{q^4 - rp^4}\,pq\,sn\,u$

19) $sn\,5u = \frac{q^6 - 3p^2q^4 + (1 + 2r)p^4q^2 - r^2p^6}{q^6 - 3rp^2q^4 + r(r + 2)p^4q^2 - rp^6}\,sn\,u$

etc.

20) $cn\,2u = \frac{s}{q}$

21) $cn\,3u = \frac{2sq - q^2 + p^2r}{q^2 - rp^2}\,cn\,u$

22) $cn\,4u = \frac{q^4 - 2q^2p^2sn^2u + rp^4}{q^4 - rp^4}$

23) $cn\,5u = \left\{\frac{(2sq^3 - 2p^2qrs)(2sq - q^2 + rp^2)}{q^6 - 3rp^2q^4 + r(r + 2)p^4q^2 - rp^6} - 1\right\}cn\,u.$

Die ausgeführten Formeln für 16) bis 23) siehe Königsberger II, S. 194.

§. 126.

Summen und Differenzen.

1) $sn(u \pm v) = \frac{sn\,u\,sn\,v\,\Delta n\,v \pm sn\,v\,cn\,u\,\Delta n\,u}{1 - \varepsilon^2 sn^2 u\,sn^2 v}$

2) $cn(u + v) = \frac{cn\,u\,cn\,v \mp sn\,u\,sn\,v\,\Delta n\,u\,\Delta n\,v}{1 - \varepsilon^2 sn^2 u\,sn^2 v}$

$$3)\quad \Delta n(u \pm v) = \frac{\Delta n\, u\, \Delta n\, v \mp \varepsilon^2 sn\, u\, sn\, v\, cn\, u\, cn\, v}{1 - \varepsilon^2 sn^2 u\, sn^2 v}$$

$$4)\quad tg\, am(u \pm v) = \frac{tg\, am\, u\, \Delta n\, v \pm tgn\, am\, v\, \Delta n\, u}{1 \mp tgn\, am\, u\, tgn\, am\, v\, \Delta n\, u\, \Delta n\, v}$$

$$5)\quad sn(u + v) + sn(u - v) = \frac{2\, sn\, u\, cn\, v\, \Delta n\, v}{1 - \varepsilon^2 sn^2 u\, sn^2 v}$$

$$sn(u + v) - sn(u - v) = \frac{2\, sn\, v\, cn\, u\, \Delta n\, u}{1 - \varepsilon^2 sn^2 u\, sn^2 v}$$

$$6)\quad cn(u + v) + cn(u - v) = \frac{2\, cn\, u\, cn\, v}{1 - \varepsilon^2 sn^2 u\, sn^2 v}$$

$$cn(u + v) - cn(u - v) = -\frac{2\, sn\, u\, sn\, v\, \Delta n\, u\, \Delta n\, v}{1 - \varepsilon^2 sn^2 u\, sn^2 v}$$

$$7)\quad \Delta n(u + v) + \Delta n(u - v) = \frac{2\, \Delta n\, u\, \Delta n\, v}{1 - \varepsilon^2 sn^2 u\, sn^2 v}$$

$$\Delta n(u + v) - \Delta n(u - v) = -\frac{2\, \varepsilon^2 sn\, u\, sn\, v\, cn\, u\, cn\, v}{1 - \varepsilon^2 sn^2 u\, sn^2 v}$$

$$8)\quad sn(u + v)\, sn(u - v) = \frac{sn^2 u - sn^2 v}{1 - \varepsilon^2 sn^2 u\, sn^2 v}$$

$$9)\quad cn(u + v)\, cn(u - v) = \frac{cn^2 u - sn^2 v + \varepsilon^2 sn^2 u\, sn^2 v}{1 - \varepsilon^2 sn^2 u\, sn^2 v}$$

$$10)\quad \Delta n(u + v)\, \Delta n(u - v) = \frac{1 - \varepsilon^2 sn^2 u - \varepsilon^2 sn^2 v + \varepsilon^2 sn^2 u\, sn^2 v}{1 - \varepsilon^2 sn^2 u\, sn^2 v}$$

$$11)\quad sn(u \pm v)\, cn(u \mp v) = \frac{sn\, u\, cn\, u\, \Delta n\, v \pm sn\, v\, cn\, v\, \Delta n\, u}{1 - \varepsilon^2 sn^2 u\, sn^2 v}$$

$$12)\quad sn(u \pm v)\, \Delta n(u \mp v) = \frac{sn\, u\, \Delta n\, u\, cn\, u \pm sn\, v\, \Delta n\, v\, cn\, u}{1 - \varepsilon^2 sn^2 u\, sn^2 v}$$

$$13)\quad cn(u \pm v)\, \Delta n(u \mp v) = \frac{cn\, u\, \Delta n\, u\, cn\, v\, \Delta n\, v \mp \varepsilon_1\, sn\, u\, sn\, v}{1 - \varepsilon^2 sn^2 u\, sn^2 v}$$

$$14)\quad \frac{sn(u + v) + sn(u - v)}{sn(u + v) - sn(u - v)} = \frac{sn\, u\, cn\, v\, \Delta n\, v}{sn\, v\, cn\, u\, \Delta n\, u}$$

$$15)\quad \frac{cn(u - v) + cn(u + v)}{cn(u - v) - cn(u + v)} = \frac{cn\, u\, cn\, v}{sn\, u\, sn\, v\, \Delta n\, u\, \Delta n\, v}$$

$$16)\quad \frac{\Delta n(u - v) + \Delta n(u + v)}{\Delta n(u - v) - \Delta n(u + v)} = \frac{\Delta n\, u\, \Delta n\, v}{\varepsilon^2 sn\, u\, cn\, u\, sn\, v\, cn\, v}$$

$$17)\quad \frac{1}{sn(u + v)} + \frac{1}{sn(u - v)} = \frac{2\, sn\, u\, cn\, v\, \Delta n\, v}{sn^2 u - sn^2 v}$$

$$\frac{1}{sn(u + v)} - \frac{1}{sn(u - v)} = -\frac{2\, sn\, v\, cn\, u\, \Delta n\, u}{sn^2 u - sn^2 v}$$

$$18)\quad \frac{1}{cn(u+v)} + \frac{1}{cn(u-v)} = \frac{2\, cn\, u\, cn\, v}{cn^2 v - sn^2 u\, \Delta n^2 v}$$

$$\frac{1}{cn(u+v)} - \frac{1}{cn(u-v)} = \frac{2\, sn\, u\, sn\, v\, \Delta n\, u\, \Delta n\, v}{cn^2 v - sn^2 u\, \Delta n^2 v}$$

$$19)\quad \frac{1}{\Delta n(u+v)} + \frac{1}{\Delta n(u-v)} = \frac{2\, \Delta n\, u\, \Delta n\, v}{\Delta n^2 v - \varepsilon^2 sn^2 u\, cn^2 v}$$

$$\frac{1}{\Delta n(u+v)} - \frac{1}{\Delta n(u-v)} = \frac{2\, \varepsilon^2 sn\, u\, sn\, v\, cn\, u\, cn\, v}{\Delta n^2 v - \varepsilon^2 sn^2 u\, cn^2 v}$$

$$20)\quad \frac{sn(u+v)}{\Delta n(u+v)} + \frac{sn(u-v)}{\Delta n(u-v)} = \frac{2\, sn\, u\, cn\, v\, \Delta n\, u}{\Delta n^2 v - \varepsilon^2 sn^2 u\, cn^2 v}$$

$$\frac{sn(u+v)}{\Delta n(u+v)} - \frac{sn(u-v)}{\Delta n(u-v)} = \frac{2\, sn\, v\, cn\, u\, \Delta n\, v}{\Delta n^2 v - \varepsilon^2 sn^2 u\, cn^2 v}$$

$$21)\quad \frac{sn(u+v)}{cn(u+v)} + \frac{sn(u-v)}{cn(u-v)} = \frac{2\, sn\, u\, cn\, u\, \Delta n\, v}{cn^2 v - sn^2 u\, \Delta n^2 v}$$

$$\frac{sn(u+v)}{cn(u+v)} - \frac{sn(u-v)}{cn(u-v)} = \frac{2\, sn\, v\, cn\, v\, \Delta n\, u}{cn^2 v - sn^2 u\, \Delta n^2 v}$$

$$22)\quad \frac{cn(u+v)}{sn(u+v)} + \frac{cn(u-v)}{sn(u-v)} = -\frac{2\, \varepsilon^2 sn\, u\, cn\, u\, \Delta n\, v}{\Delta n^2 u - \Delta n^2 v}$$

$$\frac{cn(u+v)}{sn(u+v)} - \frac{cn(u-v)}{sn(u-v)} = \frac{2\, \varepsilon^2 sn\, v\, cn\, v\, \Delta n\, u}{\Delta n^2 u - \Delta n^2 v}$$

$$23)\quad \frac{cn(u+v)}{\Delta n(u+v)} + \frac{cn(u-v)}{\Delta n(u-v)} = \frac{2\, cn\, u\, cn\, v\, \Delta n\, u\, \Delta n\, v}{\Delta n^2 v - \varepsilon^2 sn^2 u\, cn^2 v}$$

$$\frac{cn(u+v)}{\Delta n(u+v)} - \frac{cn(u-v)}{\Delta n(u-v)} = -\frac{2\, \varepsilon_1^2 sn\, u\, sn\, v}{\Delta n^2 v - \varepsilon^2 sn^2 u\, cn^2 v}$$

$$24)\quad \frac{\Delta n(u+v)}{sn(u+v)} + \frac{\Delta n(u-v)}{sn(u-v)} = \frac{2\, sn\, u\, cn\, v\, \Delta n\, u}{sn^2 u - sn^2 v}$$

$$\frac{\Delta n(u+v)}{sn(u+v)} - \frac{\Delta n(u-v)}{sn(u-v)} = \frac{2\, \varepsilon^2 sn\, v\, cn\, u\, \Delta n\, v}{\Delta n^2 u - \Delta n^2 v}$$

$$25)\quad \frac{\Delta n(u+v)}{cn(u+v)} + \frac{\Delta n(u-v)}{cn(u-v)} = \frac{2\, cn\, u\, cn\, v\, \Delta n\, u\, \Delta n\, v}{cn^2 v - sn^2 u\, \Delta n^2 v}$$

$$\frac{\Delta n(u+v)}{cn(u+v)} - \frac{\Delta n(u-v)}{cn(u-v)} = \frac{2\, \varepsilon_1^2 sn\, u\, sn\, v}{cn^2 v - sn^2 u\, \Delta n^2 v}$$

$$26)\quad sn(u+v)\, cn(u-v) + sn(u-v)\, cn(u+v) = \frac{2\, sn\, u\, cn\, u\, \Delta n\, v}{1 - \varepsilon^2 sn^2 u\, sn^2 v}$$

$$sn(u+v)\, cn(u-v) - sn(u-v)\, cn(u+v) = \frac{2\, sn\, v\, cn\, v\, \Delta n\, u}{1 - \varepsilon^2 sn^2 u\, sn^2 v}$$

27) $sn(u+v)\Delta n(u-v)+sn(u-v)\Delta n(u+v)=\dfrac{2\,sn\,u\;cn\,v\;\Delta n\,u}{1-\varepsilon^2 sn^2 u\,sn^2 v}$

$sn(u+v)\Delta n(u-v)-sn(u-v)\Delta n(u+v)=\dfrac{2\,sn\,v\;cn\,u\;\Delta n\,v}{1-\varepsilon^2 sn^2 u\,sn^2 v}$

28) $cn\,(u-v)\Delta n(u+v)+cn\,(u+v)\Delta n(u-v)$

$=\dfrac{2\,cn\,u\,cn\,v\,\Delta n\,u\,\Delta n\,v}{1-\varepsilon^2 sn^2 u\,sn^2 v}$

$cn(u-v)\Delta n(u+v)-cn(u+v)\Delta n(u-v)=\dfrac{2\,\varepsilon_1^2\,sn\,u\,sn\,v}{1-\varepsilon^2 sn^2 u\,sn^2 v}$

29) $cn\,u = sn(u+v)\,sn\,v\,\Delta n\,u + cn(u+v)\,cn\,v$

30) $sn\,v\,cn\,u = sn(u+v)\Delta n\,u - \Delta n(u+v)\,cn\,v\,sn\,u$

31) $cn\,u\,cn\,v = cn(u+v) + \Delta n(u+v)\,sn\,u\,cn\,v$

32) $sn\,u\,\Delta n\,v = cn\,v\,sn(u+v) - sn\,v\,\Delta n\,u\,cn(u+v)$

33) $\Delta n\,u\,\Delta n\,v = \Delta n(u+v) + \varepsilon^2 sn\,u\,sn\,v\,cn(u+v)$

34) $\varepsilon_1^2 = \Delta n\,u\,\Delta n\,v\,\Delta n(u+v) - \varepsilon^2 cn\,v\,cn\,u\,cn\,(u+v)$

35) $\varepsilon_1^2 sn\,u\,sn\,v = cn\,u\,cn\,v\,\Delta n(u+v) - \Delta n\,u\,\Delta n\,v\,cn\,(u+v)$

36) $\Delta n\,u = \Delta n\,v\,\Delta n(u+v) + \varepsilon^2 sn\,v\,cn\,u\,sn\,(u+v)$

37) $cn(u+v) = cn\,u\,cn\,v - sn\,u\,sn\,v\,\Delta n\,(u+v)$

38) $\Delta n(u+v) = \Delta n\,u\,\Delta n\,v - \varepsilon^2 sn\,u\,sn\,v\,cn(u+v)$

39) $\varepsilon_1^2 sn\,u\,sn(u+v) = cn\,v\,\Delta n\,u\,\Delta n\,(u+v) - cn\,u\,\Delta n\,v\,cn\,(u+v)$

40) $sn\,u\,cn(u+v) = cn\,v\,\Delta n\,u\,sn(u+v) - sn\,u\,\Delta n\,(u+v)$

41) $sn\,u\,\Delta n\,(u+v) = cn\,v\,\Delta n\,u\,cn\,(u+v) - sn\,v\,cn\,(u+v)$

42) $cn\,u\,cn\,v\,\Delta n\,(u+v) = \Delta n\,u\,\Delta n\,v\,cn(u+v) + \varepsilon_1^2 sn\,u\,sn\,v$

43) $cn\,u\,\Delta n\,v\,\Delta n\,(u+v) = \Delta n\,u\,cn\,v\,cn\,(u+v) + \varepsilon_1^2 sn\,v\,sn\,(u+v)$

44) $1 + sn\,(u+v)\,sn(u-v) = \dfrac{cn^2 v + sn^2 u\,\Delta n^2 v}{1 - \varepsilon^2 sn^2 u\,sn^2 v}$

$1 - sn\,(u+v)\,sn\,(u-v) = \dfrac{cn^2 u + sn^2 v\,\Delta n^2 u}{1 - \varepsilon^2 sn^2 u\,sn^2 v}$

45) $1 + \varepsilon^2 sn\,(u+v)\,sn\,(u-v) = \dfrac{\Delta n^2 v + \varepsilon^2 sn^2 u\,cn^2 v}{1 - \varepsilon^2 sn^2 u\,sn^2 v}$

$1 - \varepsilon^2 sn\,(u+v)\,sn\,(u-v) = \dfrac{\Delta n^2 u + \varepsilon^2 sn^2 v\,cn^2 u}{1 - \varepsilon^2 sn^2 u\,sn^2 v}$

46) $1 + cn(u+v)\,cn(u-v) = \dfrac{cn^2 u + cn^2 v}{1 - \varepsilon^2 sn^2 u\,sn^2 v}$

$1 - cn(u+v)\,cn(u-v) = \dfrac{sn^2 u\,\Delta n^2 v + sn^2 v\,\Delta n^2 u}{1 - \varepsilon^2 sn^2 u\,sn^2 v}$

$$47)\quad 1 + \Delta n(u+v)\,\Delta n(u-v) = \frac{\Delta n^2 u + \Delta n^2 v}{1 - \varepsilon^2 sn^2 u\, sn^2 v}$$

$$1 - \Delta n(u+v)\,\Delta n(u-v) = \frac{\varepsilon^2 (sn^2 u\, cn^2 v + sn^2 v\, cn^2 u)}{1 - \varepsilon^2 sn^2 u\, sn^2 v}$$

$$48)\quad [1 \pm sn(u+v)][1 \pm sn(u-v)] = \frac{(cn\, v \pm sn\, u\, \Delta n\, v)^2}{1 - \varepsilon^2 sn^2 u\, sn^2 v}$$

$$49)\quad [1 \pm sn(u+v)][1 \mp sn(u-v)] = \frac{(cn\, u \pm sn\, v\, \Delta n\, u)^2}{1 - \varepsilon^2 sn^2 u\, sn^2 v}$$

$$50)\quad [1 \pm \varepsilon\, sn(u+v)][1 \pm \varepsilon\, sn(u-v)] = \frac{(\Delta n\, v + \varepsilon\, sn\, u\, sn\, v)^2}{1 - \varepsilon^2 sn^2 u\, sn^2 v}$$

$$51)\quad [1 \pm \varepsilon\, sn(u+v)][1 \mp \varepsilon\, sn(u-v)] = \frac{(\Delta n\, u \pm \varepsilon\, sn\, v\, cn\, u)^2}{1 - \varepsilon^2 sn^2 u\, sn^2 v}$$

$$52)\quad [1 \pm cn(u+v)][1 \pm cn(u-v)] = \frac{(cn\, u \pm cn\, v)^2}{1 - \varepsilon^2 sn^2 u\, sn^2 v}$$

$$53)\quad [1 \pm cn(u+v)][1 \mp cn(u-v)] = \frac{(sn\, u\, \Delta n\, v \mp sn\, v\, \Delta n\, u)^2}{1 - \varepsilon^2 sn^2 u\, sn^2 v}$$

$$54)\quad [1 \pm \Delta n(u+v)][1 \pm \Delta n(u-v)] = \frac{(\Delta n\, u \pm \Delta n\, v)^2}{1 - \varepsilon^2 sn^2 u\, sn^2 v}$$

$$55)\quad [1 \pm \Delta n(u+v)][1 \mp \Delta n(u-v)] = \frac{\varepsilon^2 \sin^2 (am\, u \mp am\, v)}{1 - \varepsilon^2 sn^2 u\, sn^2 v}.$$

§. 127.

Transformationsgleichungen.

$$1)\quad \begin{aligned} sn\left\{\varepsilon u, \frac{1}{\varepsilon}\right\} &= \varepsilon\, sn\, u \\ cn\left\{\varepsilon u, \frac{1}{\varepsilon}\right\} &= \Delta n\, u \\ \Delta n\left\{\varepsilon u, \frac{1}{\varepsilon}\right\} &= cn\, u \end{aligned}$$

$$2)\quad \begin{aligned} sn\,\{u, \varepsilon_1\} &= \frac{1}{i}\,\frac{sn(u i, \varepsilon)}{cn(u i, \varepsilon)} \\ cn\,\{u, \varepsilon_1\} &= \frac{1}{cn(u i, \varepsilon)} \\ \Delta n\,\{u, \varepsilon_1\} &= \frac{\Delta n(u i, \varepsilon)}{cn(u i, \varepsilon)} \end{aligned}$$

$$sn\{u i, \varepsilon\} = i \frac{sn(u, \varepsilon_1)}{cn(u, \varepsilon_1)}$$

$$3) \quad cn\{u i, \varepsilon\} = \frac{1}{cn(u, \varepsilon_1)}$$

$$\Delta n\{u i, \varepsilon\} = \frac{\Delta n(u, \varepsilon_1)}{cn(u, \varepsilon_1)}$$

$$sn\{u i, \varepsilon_1\} = i \frac{sn\, u}{cn\, u}$$

$$4) \quad cn\{u i, \varepsilon_1\} = \frac{1}{cn\, u}$$

$$\Delta n\{u i, \varepsilon_1\} = \frac{\Delta n\, u}{cn\, u}$$

$$sn\left\{\varepsilon_1 u i, \frac{1}{\varepsilon_1}\right\} = i\, \varepsilon_1 \frac{sn\, u}{cn\, u}$$

$$5) \quad cn\left\{\varepsilon_1 u i, \frac{1}{\varepsilon^1}\right\} = \frac{\Delta n\, u}{cn\, u}$$

$$\Delta n\left\{\varepsilon_1 u i, \frac{1}{\varepsilon_1}\right\} = \frac{1}{cn\, u}$$

$$sn\left\{\varepsilon_1 u, i \frac{\varepsilon}{\varepsilon_1}\right\} = \varepsilon_1 \frac{sn\, u}{\Delta n\, u} = cn(\varkappa - u)$$

$$6) \quad cn\left\{\varepsilon_1 u, i \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}\right\} = \frac{cn\, u}{\Delta n\, u} = sn(\varkappa - u)$$

$$\Delta n\left\{\varepsilon_1 u, i \frac{\varepsilon}{\varepsilon_1}\right\} = \frac{1}{\Delta n\, u} = \frac{1}{\varepsilon_1} \Delta n(\varkappa - u)$$

$$sn\left\{\varepsilon u i, i \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon}\right\} = i_2 \frac{sn\, u}{\Delta n\, u}$$

$$7) \quad cn\left\{\varepsilon u i, i \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon}\right\} = \frac{1}{\Delta n\, u}$$

$$\Delta n\left\{\varepsilon u i, i \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon}\right\} = \frac{cn\, u}{\Delta n\, u}$$

$$sn\left\{(1 \pm \varepsilon_1) u, \frac{1 \mp \varepsilon_1}{1 \pm \varepsilon_1}\right\} = \frac{(1 \pm \varepsilon_1) sn\, u\, cn\, u}{\Delta n\, u}$$

$$8) \quad cn\left\{(1 \pm \varepsilon_1) u, \frac{1 \mp \varepsilon_1}{1 \pm \varepsilon_1}\right\} = \frac{1 - (1 \pm \varepsilon_1) sn^2 u}{\Delta n\, u} \quad \text{(Landen)}$$

$$\Delta n\left\{(1 \pm \varepsilon_1) u, \frac{1 \mp \varepsilon_1}{1 \pm \varepsilon_1}\right\} = \frac{1 - (1 \mp \varepsilon_1) sn^2 u}{\Delta n\, u}$$

$$
9)\quad
\begin{aligned}
sn\left\{(1+\varepsilon)\,u,\ \frac{2\sqrt{\varepsilon}}{1+\varepsilon}\right\} &= \frac{(1+\varepsilon)\,sn\,u}{1+\varepsilon\,sn^2 u}\\
cn\left\{(1+\varepsilon)\,u,\ \frac{2\sqrt{\varepsilon}}{1+\varepsilon}\right\} &= \frac{cn\,u\,\Delta n\,u}{1+\varepsilon\,sn^2 u} \quad \text{(Gauss)}\\
\Delta n\left\{(1+\varepsilon)\,u,\ \frac{2\sqrt{\varepsilon}}{1+\varepsilon}\right\} &= \frac{1-\varepsilon\,sn^2 u}{1+\varepsilon\,sn^2 u}
\end{aligned}
$$

$$
10)\quad
\begin{aligned}
sn\left\{(1+\varepsilon_1)\,u\,i,\ \frac{2\sqrt{\varepsilon_1}}{1+\varepsilon_1}\right\} &= i(1+\varepsilon_1)\,\frac{sn\,u\,cn\,u}{1-(1+\varepsilon_1)\,sn^2 u}\\
cn\left\{(1+\varepsilon_1)\,u\,i,\ \frac{2\sqrt{\varepsilon_1}}{1+\varepsilon_1}\right\} &= \frac{\Delta n\,u}{1-(1+\varepsilon_1)\,sn^2 u}\\
\Delta n\left\{(1+\varepsilon_1)\,u\,i,\ \frac{2\sqrt{\varepsilon_1}}{1+\varepsilon_1}\right\} &= \frac{1-(1-\varepsilon_1)\,sn^2 u}{1+(1-\varepsilon_1)\,sn^2 u}
\end{aligned}
$$

$$
11)\quad
\begin{aligned}
sn\left\{2\,u\sqrt{\varepsilon},\ \frac{1+\varepsilon}{2\sqrt{\varepsilon}}\right\} &= \frac{2\sqrt{\varepsilon}\,sn\,u}{1+\varepsilon\,sn^2 u}\\
cn\left\{2\,u\sqrt{\varepsilon},\ \frac{1+\varepsilon}{2\sqrt{\varepsilon}}\right\} &= \frac{1-\varepsilon\,sn^2 u}{1+\varepsilon\,sn^2 u}\\
\Delta n\left\{2\,u\sqrt{\varepsilon},\ \frac{1+\varepsilon}{2\sqrt{\varepsilon}}\right\} &= \frac{cn\,u\,\Delta n\,u}{1+\varepsilon\,sn^2 u}
\end{aligned}
$$

$$
12)\quad
\begin{aligned}
sn\left\{(1+\varepsilon)\,u\,i,\ \frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}\right\} &= i(1+\varepsilon)\,\frac{sn\,u}{cn\,u\,\Delta n\,u}\\
cn\left\{(1+\varepsilon)\,u\,i,\ \frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}\right\} &= \frac{1+\varepsilon\,sn^2 u}{cn\,u\,\Delta n\,u}\\
\Delta n\left\{(1+\varepsilon)\,u\,i,\ \frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}\right\} &= \frac{1-\varepsilon\,sn^2 u}{cn\,u\,\Delta n\,u}
\end{aligned}
$$

$$
13)\quad
\begin{aligned}
sn\left\{(\varepsilon+i\,\varepsilon_1)\,u,\ \frac{\varepsilon-i\,\varepsilon_1}{\varepsilon+i\,\varepsilon_1}\right\} &= \frac{(\varepsilon+i\,\varepsilon_1)\,sn\,u\,\Delta n\,u}{cn\,u}\\
cn\left\{(\varepsilon+i\,\varepsilon_1)\,u,\ \frac{\varepsilon-i\,\varepsilon_1}{\varepsilon+i\,\varepsilon_1}\right\} &= \frac{1-\varepsilon(\varepsilon+i\,\varepsilon_1)\,sn^2 u}{cn\,u}\\
\Delta n\left\{(\varepsilon+i\,\varepsilon_1)\,u,\ \frac{\varepsilon-i\,\varepsilon_2}{\varepsilon+i\,\varepsilon_1}\right\} &= \frac{1-\varepsilon(\varepsilon-i\,\varepsilon_1)\,sn^2 u}{cn\,u}
\end{aligned}
$$

$$sn\left\{(\varepsilon_1 + i\,\varepsilon)\,u,\ \frac{2\sqrt{i\,\varepsilon\,\varepsilon_1}}{\varepsilon_1 + i\,\varepsilon}\right\} = \frac{(\varepsilon_1 + i\,\varepsilon)\,sn\,u\,\Delta n\,u}{1 - \varepsilon(\varepsilon - i\,\varepsilon_1)\,sn^2 u}$$

$$14)\quad cn\left\{(\varepsilon_1 + i\,\varepsilon)\,u,\ \frac{2\sqrt{i\,\varepsilon\,\varepsilon_1}}{\varepsilon_1 + i\,\varepsilon}\right\} = \frac{cn\,u}{1 - \varepsilon(\varepsilon - i\,\varepsilon_1)\,sn^2 u}$$

$$\Delta n\left\{(\varepsilon_1 + i\,\varepsilon)\,u,\ \frac{2\sqrt{i\,\varepsilon\,\varepsilon_1}}{\varepsilon_1 + i\,\varepsilon}\right\} = \frac{1 - \varepsilon(\varepsilon + i\,\varepsilon_1)\,sn^2 u}{1 - \varepsilon(\varepsilon - i\,\varepsilon_1)\,sn^2 u}.$$

§. 128.

Elliptische Functionen mit imaginären Argumenten.

1) $sn(u \pm i\,v, \varepsilon) = \{sn(u,\varepsilon)\,\Delta n(v,\varepsilon_1)$
$\pm\, i\,cn(u,\varepsilon)\,\Delta n(u,\varepsilon)\,sn(v,\varepsilon_1)\,(cn\,v,\varepsilon_1)\} : \{1 - sn^2(v,\varepsilon_1)\,\Delta^2 n(u,\varepsilon)\}$

2) $cn(u \pm i\,v, \varepsilon) = \{cn(u,\varepsilon)\,cn(v,\varepsilon_1)$
$\mp\, i\,sn(u,\varepsilon)\,\Delta n(u,\varepsilon)\,sn(v,\varepsilon_1)\,\Delta n(v,\varepsilon_1)\} : \{1 - sn^2(v,\varepsilon_1)\,\Delta^2 n(u,\varepsilon)\}$

3) $\Delta n(u \pm i\,v, \varepsilon) = \{\Delta n(u,\varepsilon)\,\Delta n(v,\varepsilon_1)\,cn(v,\varepsilon_1)$
$\mp\, i\,\varepsilon^2\,sn(u,\varepsilon)\,cn(u,\varepsilon)\,sn(v,\varepsilon_1)\} : \{1 - sn^2(v,\varepsilon_1)\,\Delta^2 n(u,\varepsilon)\}.$

§. 129.

Thetafunctionen.

$$1)\quad \vartheta_0(x) = \sum_{-\infty}^{+\infty} (-1)^n q^{n^2} e^{2nxi} = 1 + 2\sum_{1}^{\infty} (-1)^n q^{n^2} \cos 2nx$$

$$= \sum_{-\infty}^{+\infty} (-1)^n q^{n^2} \cos 2nx = 1 - 2q\cos 2x + 2q^4 \cos 4x$$

$$- 2q^9 \cos 6x + \cdots$$

$$2)\quad \vartheta_1(x) = \frac{1}{i}\sum_{-\infty}^{+\infty} (-1)^n q^{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2} e^{(2n+1)xi}$$

$$= 2\sum_{1}^{\infty} (-1)^n q^{\left(n-\frac{1}{2}\right)^2} \sin(2n-1)x$$

$$= -\sum_{-\infty}^{+\infty} (-1)^n q^{\left(n-\frac{1}{2}\right)^2} \sin(2u-1)x$$

$$= 2q^{\frac{1}{4}} \sin x - 2q^{\frac{9}{4}} \sin 3x + 2q^{\frac{25}{4}} \sin 5x - \cdots$$

3) $$\vartheta_2(x) = \sum_{-\infty}^{+\infty} q^{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2} e^{(2n+1)xi} = 2\sum_{1}^{\infty} q^{\left(n-\frac{1}{2}\right)^2} \cos(2n-1)x$$

$$= \sum_{-\infty}^{+\infty} q^{\left(n-\frac{1}{2}\right)^2} \cos(2n-1)x$$

$$= 2q^{\frac{1}{4}} \cos x + 2q^{\frac{9}{4}} \cos 3x + 2q^{\frac{25}{4}} \cos 5x + \cdots$$

4) $$\vartheta_3(x) = \sum_{-\infty}^{+\infty} q^{n^2} e^{2nxi} = 1 + 2\sum_{1}^{\infty} q^{n^2} \cos 2nx$$

$$= \sum_{-\infty}^{+\infty} q^{n^2} \cos 2nx = 1 + 2q\cos 2x + 2q^4 \cos 4x + 2q^9 \cos 6x + \cdots$$

5) $$\vartheta_0(x) = \prod_{1}^{\infty} (1 - 2q^{2n-1}\cos 2x + q^{2(2n-1)})(1 - q^{2n})$$

6) $$\vartheta_1(x) = 2\sqrt[4]{q}\sin x \prod_{1}^{\infty} (1 - 2q^{2n}\cos 2x + q^{4n})(1 - q^{2n})$$

7) $$\vartheta_2(x) = 2\sqrt[4]{q}\cos x \prod_{1}^{\infty} (1 + 2q^{2n}\cos 2x + q^{4n})(1 - q^{2n})$$

8) $$\vartheta_3(x) = \prod_{1}^{\infty} (1 + 2q^{2n-1}\cos 2x + q^{2(2n-1)})(1 - q^{2n})$$

9) $$sn\, u = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \frac{\vartheta_1\left(\frac{\pi u}{2\varkappa}\right)}{\vartheta_0\left(\frac{\pi u}{2\varkappa}\right)}, \quad sn\left(\frac{2\varkappa x}{\pi}\right) = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \frac{\vartheta_1(x)}{\vartheta_0(x)}$$

10) $$cn\, u = \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon}} \frac{\vartheta_2\left(\frac{\pi u}{2\varkappa}\right)}{\vartheta_0\left(\frac{\pi u}{2\varkappa}\right)}, \quad cn\left(\frac{2\varkappa x}{\pi}\right) = \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon}} \frac{\vartheta_2(x)}{\vartheta_0(x)}$$

11) $$\Delta n\, u = \sqrt{\varepsilon_1} \frac{\vartheta_3\left(\frac{\pi u}{2\varkappa}\right)}{\vartheta^0\left(\frac{\pi u}{2\varkappa}\right)}, \quad \Delta n\left(\frac{2\varkappa x}{\pi}\right) = \sqrt{\varepsilon_1} \frac{\vartheta_3(x)}{\vartheta_0(x)}$$

Sei zur Abkürzung $\frac{\pi u}{2\varkappa} = x$, ferner $\frac{d^2 \log \vartheta_x(x)}{dx^2} = e''\vartheta_x(x)$, so wird:

12) $$sn^2 u = \frac{1}{\vartheta_2(0)^4}\{e''\vartheta_0(0) - e''\vartheta_0(x)\}$$

$$cn^2 = \frac{1}{\vartheta_2(0)^4}\{e''\vartheta_0(0) - e''\vartheta_3(x)\}$$

$$\Delta n^2 u = \frac{1}{\vartheta_3(0)^4}\{e''\vartheta_0(x) - e''\vartheta_2(0)\}$$

13) $$\frac{1}{sn^2 u} = \frac{1}{\vartheta_3(0)^4}\{e''\vartheta_0(0) - e''\vartheta_1(x)\}$$

$$\frac{1}{cn^2 u} = \frac{1}{\vartheta_0(0)^4}\{e''\vartheta_3(0) - e''\vartheta_2(x)\}$$

$$\frac{1}{\Delta n^2 u} = \frac{1}{\vartheta_0(0)^4}\{e''\vartheta_3(x) - e''\vartheta_2(0)\}$$

14) $$\frac{sn^2 u}{cn^2 u} = \frac{1}{\vartheta_0(0)^4}\{e''\vartheta_2(0) - e''\vartheta_2(x)\}$$

$$\frac{sn^2 u}{\Delta n^2 u} = \frac{\vartheta_3(0)^4}{\vartheta_0(0)^4\,\vartheta_2(0)^4}\{e''\vartheta_3(x) - e''\vartheta_3(0)\}$$

15) $$\frac{cn^2 u}{sn^2 u} = \frac{1}{\vartheta_3(0)^4}\{e''\vartheta_2(0) - e''\vartheta_1(x)\}$$

$$\frac{cn^2 u}{\Delta n^2 u} = \frac{1}{\vartheta_2(0)^4}\{e''\vartheta_0(0) - e''\vartheta_3(x)\}$$

16) $$\frac{\Delta n^2 u}{sn^2 u} = \frac{1}{\vartheta_3(0)^4}\{e''\vartheta_3(0) - e''\vartheta_1(x)\}$$

$$\frac{\Delta n^2 u}{cn^2 u} = \frac{1}{\vartheta_3(0)^4}\{e''\vartheta_0(0) - e''\vartheta_2(x)\}$$

17) $$\vartheta_0(x, -p) = \vartheta_3(x,p), \quad \vartheta_1(x, -p) = \frac{\sqrt{2}}{2}(1 \pm i)\,\vartheta_1(x,p)$$

$$\vartheta_2(x, -p) = \frac{\sqrt{2}}{2}(1 \pm i)\,\vartheta_2(x,p), \quad \vartheta_3(x, -p) = \vartheta_0(x,p)$$

18) $$\vartheta_0(-x) = \vartheta_0(x), \quad \vartheta_1(-x) = -\vartheta_1(x)$$
$$\vartheta_2(-x) = \vartheta_2(x), \quad \vartheta_3(-x) = \vartheta_3(x)$$

19) $$\vartheta_0(x)^2 = \varepsilon\,\vartheta_1(x)^2 + \varepsilon_1\,\vartheta_3(x)^2$$

20) $$\vartheta_1(x)^2 = \varepsilon\,\vartheta_0(x)^2 - \varepsilon_1\,\vartheta_2(x)^2$$

21) $$\vartheta_2(x)^2 = \varepsilon\,\vartheta_3(x)^2 - \varepsilon_1\,\vartheta_1(x)^2$$

22) $$\vartheta_3(x)^2 = \varepsilon\,\vartheta_2(x) + \varepsilon_1\,\vartheta_0(x)^2$$

23) $\sqrt{\varepsilon} = \frac{\vartheta_2(0)}{\vartheta_3(0)}, \quad \sqrt{\varepsilon_1} = \frac{\vartheta_0(0)}{\vartheta_3(0)}$

$$\varkappa = \frac{\pi}{2}\,\vartheta_3(0)^2, \quad \varkappa' = -\frac{\pi^2}{2\log p}\,\vartheta_3(0)^2$$

24) $\vartheta_0\left(x+\frac{\pi}{2}\right) = \vartheta_3(x), \quad \vartheta_2\left(x+\frac{\pi}{2}\right) = -\vartheta_1(x)$

$$\vartheta_1\left(x+\frac{\pi}{2}\right) = \vartheta_2(x), \quad \vartheta_3\left(x+\frac{\pi}{2}\right) = \vartheta_0(x)$$

25) $\vartheta_0(x+n\pi) = \vartheta_0(x), \quad \vartheta_2(x+n\pi) = (-1)^n\,\vartheta_2(x)$

$$\vartheta_1(x+n\pi) = (-1)^n\,\vartheta_1(x), \quad \vartheta_3(x+n\pi) = \vartheta_3(x)$$

26) $\vartheta_0\left(x+\frac{2n+1}{2}\pi\right) = \vartheta_3(x)$

$$\vartheta_2\left(x+\frac{2n+1}{2}\pi\right) = (-1)^{n+1}\,\vartheta_1(x)$$

$$\vartheta_1\left(x+\frac{2n+1}{2}\pi\right) = (-1)^n\,\vartheta_2(x)$$

$$\vartheta_3\left(x+\frac{2n+1}{2}\pi\right) = \vartheta_0(x)$$

27) $\vartheta_0\left(x+\frac{i}{2}\log q\right) = -i\,\frac{e^{xi}}{\sqrt[4]{q}}\,\vartheta_1(x)$

28) $\vartheta_1\left(x+\frac{i}{2}\log q\right) = -i\,\frac{e^{xi}}{\sqrt[4]{q}}\,\vartheta_0(x)$

29) $\vartheta_2\left(x+\frac{i}{2}\log q\right) = \frac{e^{xi}}{\sqrt[4]{q}}\,\vartheta_3(x)$

30) $\vartheta_3\left(x+\frac{i}{2}\log q\right) = \frac{e^{xi}}{\sqrt[4]{q}}\,\vartheta_2(x)$

31) $\vartheta_0(x+n\,i\log q) = (-1)^n\,q^{-n^2}\,e^{2nxi}\,\vartheta_0(x)$

32) $\vartheta_1(x+n\,i\log q) = (-1)^n\,q^{-n^2}\,e^{2nxi}\,\vartheta_1(x)$

33) $\vartheta_2(x+n\,i\log q) = q^{-n^2}\,e^{2nxi}\,\vartheta_2(x)$

34) $\vartheta_3(x+n\,i\log q) = q^{-n^2}\,e^{2nxi}\,\vartheta_3(x)$

35) $\vartheta_0\left(x+\frac{2n+1}{2}\,i\log q\right) = (-i)^{2n+1}\,q^{-\left(\frac{2n+1}{2}\right)^2}\,e^{(2n+1)xi}\,\vartheta_1(x)$

36) $\vartheta_1\left(x+\frac{2n+1}{2}\,i\log q\right) = (-i)^{2n+1}\,q^{-\left(\frac{2n+1}{2}\right)^2}\,e^{(2n+1)xi}\,\vartheta_0(x)$

37) $\vartheta_2\left(x+\frac{2n+1}{2}\,i\log q\right)=q^{-\left(\frac{2n+1}{2}\right)^2}e^{(2n+1)xi}\,\vartheta_3(x)$

38) $\vartheta_3\left(x+\frac{2n+1}{2}\,i\log q\right)=q^{-\left(\frac{2n+1}{2}\right)^2}e^{(2n+1)xi}\,\vartheta_2(x)$

39) $\vartheta_0\left(m\pi+\frac{2n+1}{2}\,i\log q\right)=0$

40) $\vartheta_1(m\pi+i\,n\log q)=0$

41) $\vartheta_2\left(\frac{2n+1}{2}\,\pi+m\,i\log q\right)=0$

42) $\vartheta_3\left(\frac{2n+1}{2}\,\pi+\frac{2m+1}{2}\,i\log q\right)=0$

43) $\vartheta_0(x+n\pi+m\,i\log q)=(-1)^m q^{-m^2}e^{2mix}\,\vartheta_0(x)$

44) $\vartheta_1(x+n\pi+m\,i\log q)=(-1)^{m+n} q^{-m^2}e^{2mix}\,\vartheta_1(x)$

45) $\vartheta_2(x+n\pi+m\,i\log q)=(-1)^n q^{-m^2}e^{2mxi}\,\vartheta_2(x)$

46) $\vartheta_3(x+n\pi+m\,i\log q)=q^{-m^2}e^{2mxi}\,\vartheta_3(x)$

Sei $\frac{\varkappa}{\varkappa'}=\tau$, so wird:

47) $\vartheta_0(ix,q)=\sqrt{\tau}\,e^{\frac{\tau}{\pi}x^2}\,\vartheta_2(\tau x,p)$

$$=\sqrt{-\frac{\log p}{\pi}}\cdot p^{-\left(\frac{x}{\pi}\right)^2}\vartheta_2\left(-\frac{x\log p}{\pi},p\right)$$

48) $\vartheta_1(xi,q)=i\sqrt{\tau}\,e^{\frac{\tau}{\pi}x^2}\,\vartheta_1(\tau x,p)$

$$=\sqrt{-\frac{\log p}{\pi}}\cdot p^{-\left(\frac{x}{\pi}\right)^2}\vartheta_1\left(-\frac{x\log p}{\pi},p\right)$$

49) $\vartheta_2(xi,q)=\sqrt{\tau}\,.\,e^{\frac{\tau}{\pi}x^2}\,\vartheta_0(\tau x,p)$

$$=\sqrt{-\frac{\log p}{\pi}}\cdot p^{-\left(\frac{x}{\pi}\right)^2}\vartheta_0\left(-\frac{x\log p}{\pi},p\right)$$

50) $\vartheta_3(xi,q)=\sqrt{\tau}\,.\,e^{\frac{\tau}{\pi}x^2}\,\vartheta_3(x\tau,p)$

$$=\sqrt{-\frac{\log p}{\pi}}\cdot p^{-\left(\frac{x}{\pi}\right)^2}\vartheta_3\left(-\frac{x\log p}{\pi},p\right)$$

Sei $\log q=\varrho$, so wird:

51) $\vartheta_0(x)\,\vartheta_0(y)=\vartheta_3(2\varrho,x+y)\,\vartheta_3(2\varrho,x-y)$

$$-\vartheta_2(2\varrho,x+y)\,\vartheta_2(2\varrho,x-y)$$

52) $\vartheta_1(x)\vartheta_1(y) = \vartheta_3(2\varrho, x+y)\vartheta_2(2\varrho, x-y) - \vartheta_2(2\varrho, x+y)\vartheta_3(2\varrho, x-y)$

53) $\vartheta_2(x)\vartheta_2(y) = \vartheta_3(2\varrho, x+y)\vartheta_2(2\varrho, x-y) + \vartheta_2(2\varrho, x+y)\vartheta_3(2\varrho, x-y)$

54) $\vartheta_3(x)\vartheta_3(y) = \vartheta_3(2\varrho, x+y)\vartheta_3(2\varrho, x-y) + \vartheta_2(2\varrho, x+y)\vartheta_2(2\varrho, x-y).$

Wir bezeichnen

$$\vartheta_\varkappa(x+y)\vartheta_\varkappa(x-y) \text{ mit } [\varkappa\varkappa],$$

$$\vartheta_\varkappa(x)^2\vartheta_\lambda(y)^2 \pm \vartheta_\mu(x)^2\vartheta_\nu(y)^2 \text{ mit } (\varkappa\lambda \pm \mu\nu),$$

ferner

$$\vartheta_\varkappa(0) \text{ einfach mit } \vartheta_\varkappa,$$

so wird:

55) $[00] = \frac{1}{\vartheta_0^2}(00 - 11) = \frac{1}{\vartheta_3^2}(12 + 30)$
$= \frac{1}{\vartheta_2^2}(13 + 20) = \frac{1}{\vartheta_0^2}(33 - 22)$
$= \frac{1}{\vartheta_3^2}(03 + 21) = \frac{1}{\vartheta_2^2}(02 + 31)$

56) $[11] = \frac{1}{\vartheta_0^2}(10 - 01) = \frac{1}{\vartheta_3^2}(12 - 21)$
$= \frac{1}{\vartheta_2^2}(03 - 30) = \frac{1}{\vartheta_0^2}(32 - 23)$
$= \frac{1}{\vartheta_3^2}(13 - 31) = \frac{1}{\vartheta_2^2}(12 - 21)$

57) $[22] = \frac{1}{\vartheta_0^2}(21 - 31) = \frac{1}{\vartheta_3^2}(32 - 10)$
$= \frac{1}{\vartheta_2^2}(33 - 00) = \frac{1}{\vartheta_0^2}(12 - 13)$
$= \frac{1}{\vartheta_3^2}(23 - 01) = \frac{1}{\vartheta_2^2}(22 - 11)$

58) $[33] = \frac{1}{\vartheta_0^2}(30 - 21) = \frac{1}{\vartheta_3^2}(22 + 00)$
$= \frac{1}{\vartheta_2^2}(23 + 10) = \frac{1}{\vartheta_0^2}(03 - 12)$
$= \frac{1}{\vartheta_3^2}(33 + 11) = \frac{1}{\vartheta_2^2}(32 + 01).$

Wir bezeichnen

$$\vartheta_\alpha(0)\vartheta_\beta(0)\vartheta_\gamma(x+y)\vartheta_\delta(x-y) \text{ mit } [\alpha\beta\gamma\delta]$$

$$\vartheta_\alpha(x)\vartheta_\beta(x)\vartheta_\gamma(y)\vartheta_\delta(y) \text{ mit } (\alpha\beta\gamma\delta),$$

und erhalten

59) $[0000] = (0000) - (1111) = (3333) - (2222)$

60) $[0011] = (1100) - (0011) = (3322) - (2233)$

61) $[0022] = (2200) - (3311) = (0022) - (1133)$

62) $[0033] = (0033) - (1122) = (3300) - (2211)$

63) $[2200] = (0022) + (3311) = (2200) - (1133)$

64) $[3300] = (0033) + (2211) = (3300) + (1122)$

65) $[2211] = (1122) - (2211) = (0033) - (3300)$

66) $[3311] = (1133) - (3311) = (0022) - (2200)$

67) $[2233] = (3322) + (0011) = (2233) + (1100)$

68) $[3322] = (2233) - (0011) = (3322) - (1100)$

69) $[2222] = (2222) - (1111) = (3333) - (0000)$

70) $[0220] = (0202) - (1313)$

71) $[0202] = (0202) + (1313)$

72) $[0213] = (1302) + (0213)$

73) $[0231] = (1302) - (0213)$

74) $[0312] = (1203) + (0312)$

75) $[0321] = (1203) - (0312)$

76) $[2310] = (1023) + (2310)$

77) $[2301] = (1023) - (2310)$

78) $[0330] = (0303) - (2121)$

79) $[0303] = (0303) + (2121)$

80) $[2323] = (3232) - (1010)$

81) $[2332] = (3232) + (1010)$

Wir bezeichnen

$$\vartheta_\alpha(x+y)\vartheta_\beta(x-y) \text{ mit } [\alpha\beta],$$

$$\vartheta_\alpha(x)\vartheta_\beta(x)\vartheta_\gamma(y)\vartheta_\delta(y) \text{ mit } (\alpha\beta\gamma\delta),$$

$$\vartheta_\alpha(0) \text{ mit } \vartheta_\alpha$$

und erhalten:

82) $[10] + [01] = \frac{2}{\vartheta_2\vartheta_3}(0123)$

83) $[12] + [21] = \frac{2}{\vartheta_0\vartheta_3}(1203)$

84) $[13] + [31] = \frac{2}{\vartheta_0\vartheta_2}(1312)$

85) $[20] + [02] = \frac{2}{\vartheta_0\vartheta_2}(0202)$

86) $[30] + [03] = \frac{2}{\vartheta_0 \vartheta_3}$ (0303)

87) $[32] + [23] = \frac{2}{\vartheta_2 \vartheta_3}$ (2323)

88) $[10] - [01] = \frac{2}{\vartheta_2 \vartheta_3}$ (2301)

89) $[12] - [21] = \frac{2}{\vartheta_0 \vartheta_3}$ (0312)

90) $[13] - [31] = \frac{2}{\vartheta_0 \vartheta_2}$ (0213)

91) $[20] - [02] = - \frac{2}{\vartheta_0 \vartheta_2}$ (1313)

92) $[30] - [03] = - \frac{2}{\vartheta_0 \vartheta_3}$ (1212)

93) $[32] - [23] = \frac{2}{\vartheta_2 \vartheta_3}$ (0101).

Wir bezeichnen

$$\vartheta_\alpha(0)\, \vartheta_\beta(x)\, \vartheta_\gamma(y)\, \vartheta_\delta(x+y) \text{ mit } (\alpha\beta\gamma\delta)$$

und erhalten:

94) (3333) = (2222) + (0000)
95) (2200) = (0022) + (3311)
96) (2020) = (0202) + (3131)
97) (2002) = (0220) — (3113)
98) (3300) = (0033) + (2211)
99) (3030) = (0303) + (2121)
100) (3003) = (0330) — (2112)
101) (0011) = (2233) — (3322)
102) (0101) = (2323) — (3232)
103) (0110) = (3223) — (2332)
104) (3210) = (2301) — (0123)
105) (3012) = (0321) — (2103)
106) (3120) = (2031) — (0213)
107) (3102) = (0231) — (2013)
108) (2310) = (3201) — (0132)
109) (2130) = (3021) — (0312)

110) $\vartheta_0(2x) = \frac{1}{\vartheta_0^3}\{\vartheta_0(x)^4 - \vartheta_1(x)^4\} = \frac{1}{\vartheta_0^3}\{\vartheta_3(x)^4 - \vartheta_2(x)^4\}$

111) $\vartheta_2(2x) = \frac{1}{\vartheta_2^3}\{\vartheta_3(x)^4 - \vartheta_0(x)^4\} = \frac{1}{\vartheta_2^3}\{\vartheta_2(x)^4 - \vartheta_1(x)^4\}$

112) $\vartheta_3(2x) = \frac{1}{\vartheta_3^3}\{\vartheta_2(x)^4 + \vartheta_0(x)^4\} = \frac{1}{\vartheta_3^3}\{\vartheta_3(x)^4 + \vartheta_1(x)^4\}$

113) $\vartheta_1(2x) = \frac{n}{\vartheta_0 \vartheta_2 \vartheta_3} \cdot \vartheta_0(x)\, \vartheta_1(x)\, \vartheta_2(x)\, \vartheta_3(x).$

Bezeichnet man

$$\vartheta_\alpha(x,q)\,\vartheta_\beta(y,q) \text{ mit } (\alpha\beta)$$

$$\vartheta_\alpha(x+y,q^2)\,\vartheta_\beta(x-y,q^2) \text{ mit } [\alpha\beta],$$

so ergiebt sich:

114) $(00) = [33] - [22]$ 118) $(13) = [00] + [11]$

115) $(11) = [32] - [23]$ 119) $(31) = [00] - [11]$

116) $(22) = [32] + [23]$ 120) $(12) = [10] + [01]$

117) $(33) = [33] + [22]$ 121) $(21) = [10] - [01]$

und hieraus

122) $2[00] = (03) + (30)$ 126) $2[01] = (12) - (21)$

123) $2[11] = (03) - (30)$ 127) $2[10] = (12) + (21)$

124) $2[22] = (33) - (00)$ 128) $2[23] = (22) - (11)$

125) $2[33] = (33) + (00)$ 129) $2[32] = (22) + (11)$

Ueber die hieraus sich ergebenden Formeln siehe Broch, „Traité élémentaire, §. 74 bis 86. Wir führen hier nur die wichtigsten an.

130) $\vartheta_0(0,q)^2 = \vartheta_3(0,q^2)^2 - \vartheta_2(0,q^2)^2 = \vartheta_0(0,\sqrt{q})\,\vartheta_3(0,\sqrt{q})$

131) $\vartheta_2(0,q)^2 = 2\,\vartheta_2(0,q^2)\,\vartheta_3(0,q^3)$

$$= \frac{1}{2}\{\vartheta_3(0,\sqrt{q})^2 - \vartheta_0(0,\sqrt{q})^2\}$$

132) $\vartheta_3(0,q)^2 = \vartheta_3(0,q^2)^2 + \vartheta_2(0,q^2)^2$

$$= \frac{1}{2}\{\vartheta_3(0,\sqrt{q})^2 + \vartheta_2(0,\sqrt{q})^2\}$$

133) $\vartheta_0(0,q)\,\vartheta_3(0,q) = \vartheta_0(0,q^2)^2$

134) $\vartheta_2(0,q)\,\vartheta_3(0,q) = \frac{1}{2}\,\vartheta_2(0,\sqrt{q})^2$

135) $\vartheta_2(0,q^2)^2 = \frac{1}{2}\{\vartheta_3(0,q)^2 - \vartheta_0(0,q)^2\}$

136) $\vartheta_3(0,q^2)^2 = \frac{1}{2}\{\vartheta_3(0,q)^2 + \vartheta_0(0,q)^2\}$

137) $\vartheta_0(0,q^4)^2 = \sqrt{\frac{1}{2}\,\vartheta_0(0,q)\,\vartheta_3(0,q)\,\{\vartheta_3(0,q)^2 + \vartheta_0(0,q)^2\}}$

138) $\vartheta_2(0,q^4) = \frac{1}{2}\{\vartheta_3(0,q) - \vartheta_0(0,q)\}$

139) $\vartheta_3(0,q^4) = \frac{1}{2}\{\vartheta_3(0,q) + \vartheta_0(0,q)\}$

Man merke

$$\sqrt{\varepsilon} = \frac{\vartheta_2(0,q)}{\vartheta_3(0,q)}, \quad \sqrt{\varepsilon_1} = \frac{\vartheta_0(0,q)}{\vartheta_3(0,q)}$$

140) $$\vartheta_0(x,q) = \frac{1}{\vartheta_0(0,q)} \{\vartheta_3(x,q^2)^2 - \vartheta_2(x,q^2)^2\}$$
$$= \frac{1}{\vartheta_3(0,q)} \{\vartheta_0(x,q^2)^2 - \vartheta_1(x,q^2)^2\}$$
$$= \frac{1}{\vartheta_0(0,q)} \vartheta_0\left(\frac{x}{2}, \sqrt{q}\right) \vartheta_3\left(\frac{x}{2}, \sqrt{q}\right)$$

141) $$\vartheta_1(x,q) = \frac{2}{\vartheta_0(0,q)} \vartheta_0(x,q^2)\, \vartheta_1(x,q^2)$$
$$= \frac{1}{\vartheta_0(0,q)} \vartheta_1\left(\frac{x}{2}, \sqrt{q}\right) \vartheta_2\left(\frac{x}{2}, \sqrt{q}\right)$$

142) $$\vartheta_2(x,q) = \frac{2}{\vartheta_2(0,q)} \vartheta_2(x,q^2)\, \vartheta_3(x,q^2)$$
$$= \frac{1}{2\vartheta_2(0,q)} \left\{\vartheta_3\left(\frac{x}{2}, \sqrt{q}\right)^2 - \vartheta_0\left(\frac{x}{2}, \sqrt{q}\right)^2\right\}$$
$$= \frac{1}{2\vartheta_3(0,q)} \left\{\vartheta_2\left(\frac{x}{2}, \sqrt{q}\right)^2 - \vartheta_1\left(\frac{x}{2}, \sqrt{q}\right)^2\right\}$$

143) $$\vartheta_3(x,q) = \frac{1}{\vartheta_3(0,q)} \{\vartheta_3(x,q^2)^2 + \vartheta_2(x,q^2)^2\}$$
$$= \frac{1}{2\vartheta_2(0,q)} \left\{\vartheta_2\left(\frac{x}{2}, \sqrt{q}\right)^2 + \vartheta_1\left(\frac{x}{2}, \sqrt{q}\right)^2\right\}$$
$$= \frac{1}{\vartheta_0(0,q)} \{\vartheta_0(x,q^2)^2 - \vartheta_1(x,q^2)^2\}$$
$$= \frac{1}{2\vartheta_3(0,q)} \left\{\vartheta_3\left(\frac{x}{2}, \sqrt{q}\right)^2 + \vartheta_0\left(\frac{x}{2}, \sqrt{q}\right)^2\right\}$$

144) $$2\vartheta_0(x,q^2)^2 = \vartheta_3(0,q)\,\vartheta_0(x,q) + \vartheta_0(0,q)\,\vartheta_3(x,q)$$

145) $$2\vartheta_1(x,q^2)^2 = \vartheta_3(0,q)\,\vartheta_0(x,q) - \vartheta_0(0,q)\,\vartheta_3(x,q)$$

146) $$2\vartheta_2(x,q^2)^2 = \vartheta_3(0,q)\,\vartheta_3(x,q) - \vartheta_0(0,q)\,\vartheta_0(x,q)$$

147) $$2\vartheta_3(x,q^2) = \vartheta_3(0,q)\,\vartheta_3(x,q) + \vartheta_0(0,q)\,\vartheta_0(x,q)$$

148) $$2\vartheta_0(0,q^4)\,\vartheta_0(2x,q^4) =$$
$$\sqrt{[\vartheta_3(0,q)\,\vartheta_0(x,q) - \vartheta_0(0,q)\,\vartheta_3(x,q)][\vartheta_3(0,q)\,\vartheta_3(x,q) + \vartheta_0(0,q)\,\vartheta_0(x,q)]}$$

149) $$2\vartheta_0(0,q^4)\,\vartheta_1(2x,q^4) =$$
$$\sqrt{[\vartheta_3(0,q)\,\vartheta_0(x,q) - \vartheta_0(0,q)\,\vartheta_3(x,q)][\vartheta_3(0,q)\,\vartheta_3(x,q) - \vartheta_0(0,q)\,\vartheta_0(x,q)]}$$

$$150)\quad \vartheta_2(2x, q^4) = \frac{1}{2}\{\vartheta_3(x,q) - \vartheta_0(x,q)\}$$

$$151)\quad \vartheta_3(2x, q^4) = \frac{1}{2}\{\vartheta_3(x,q) + \vartheta_0(x,q)\}$$

Sei

$$w' = \frac{1}{2}(w + x + y + z),\quad x' = \frac{1}{2}(w + x - y - z)$$

$$y' = \frac{1}{2}(w - x + y - z),\quad z' = \frac{1}{2}(w - x - y + z)$$

und es werde

$$\vartheta_\alpha(w)\,\vartheta_\beta(x)\,\vartheta_\gamma(y)\,\vartheta_\delta(z) \text{ mit } [\alpha\beta\gamma\delta]$$
$$\vartheta_\alpha(w')\,\vartheta_\beta(x')\,\vartheta_\gamma(y')\,\vartheta_\delta(z') \text{ mit } (\alpha\beta\gamma\delta)$$

bezeichnet:

152) [3333] + [2222] = (3333) + (2222)
153) [3333] — [2222] = (0000) + (1111)
154) [0000] + [1111] = (3333) — (2222)
155) [0000] — [1111] = (0000) — (1111)
156) [0033] + [1122] = (0033) + (1122)
157) [0033] — [1122] = (3300) + (2211)
158) [0022] + [1133] = (1133) + (1122)
159) [0022] — [1133] = (2200) + (3311)
160) [3322] + [2233] = (2233) + (3322)
161) [3322] — [2233] = (1100) + (0011)
162) [0011] + [1100] = (3322) — (2233)
163) [0011] — [1100] = (0011) — (1100)
164) [3322] + [0011] = (3322) + (0011)
165) [3322] — [0011] = (2233) + (1100)
166) [3201] + [2310] = (1023) — (0132)
167) [3201] — [2310] = (3201) — (2310)

$$168)\quad \log\vartheta(x) = -\sum_1^\infty \frac{1}{n}\frac{q^{2n}}{1-q^{2n}} - 2\sum_1^\infty \frac{1}{n}\frac{q^n}{1-q^{2n}}\cos 2nx$$

$$169)\quad \log\vartheta_1(x) = \log\left(2q^{\frac{1}{4}}\sin x\right) - \sum_1^\infty \frac{1}{n}\frac{q^{2n}}{1-q^{2n}} - 2\sum_1^\infty \frac{1}{n}\frac{q^{2n}}{1-q^{2n}}\cos 2nx$$

170) $$\log \vartheta_2(x) = \log\left(2 q^{\frac{1}{4}} \cos x\right) - \sum_1^\infty \frac{1}{n} \frac{q^{2n}}{1-q^{2n}} - 2 \sum_1^\infty \frac{(-1)^n}{n} \frac{q^{2n}}{1-q^{2n}} \cos 2nx$$

171) $$\log \vartheta_3(x) = - \sum_1^\infty \frac{1}{n} \frac{q^{2n}}{1-q^{2n}} - 2 \sum_1^\infty \frac{(-1)^n}{n} \frac{q^n}{1-q^{2n}} \cos 2nx$$

172) $$\frac{1}{\vartheta_0(x)} = - \frac{2}{\vartheta_1'(0)} \sum_1^\infty (-1)^n \frac{q^{\left(\frac{2n-1}{2}\right)^2} \{1 - q^{2(2n-1)}\}}{1 - 2q^{2n-1} \cos 2x + q^{2(2n-1)}}$$

173) $$\frac{1}{\vartheta_1(x)} = \frac{1}{\vartheta_1'(0)} \frac{1}{\sin x} + \frac{4}{\vartheta_1'(0)} \sin x \sum_1^\infty (-1)^n \frac{q^{n^2+n}(1+q^{2n})}{1 - 2q^{2n} \cos 2x + q^{4n}}$$

174) $$\frac{1}{\vartheta_2(x)} = \frac{1}{\vartheta_1'(0)} \frac{1}{\cos x} + \frac{4}{\vartheta_1'(0)} \cos x \sum_1^\infty (-1)^n \frac{q^{n^2+n}(1+q^{2n})}{1 + 2q^{2n} \cos 2x + q^{4n}}$$

175) $$\frac{1}{\vartheta_3(x)} = - \frac{2}{\vartheta_1'(0)} \sum_1^\infty (-1)^n \frac{q^{\left(\frac{2n-1}{2}\right)^2} \{1 - q^{2(2n-1)}\}}{1 + 2q^{2n-1} \cos 2x + q^{2(2n-1)}}$$

Wir hatten $q = e^{-\pi \frac{x'}{x}} = e^{-\pi\omega}$ und wollen nun schreiben

$$\vartheta_\mu(x, e^{-\pi\omega}) = \vartheta(x, \omega)_\mu,$$

so dass

$$\vartheta(x,\omega)_0 = \sum_{-\infty}^{+\infty} (-1)^n e^{-\pi n^2 \omega + 2nxi}$$

$$\vartheta(x,\omega)_1 = \frac{1}{2} \sum_{-\infty}^{+\infty} (-1)^n e^{-\pi\left(n+\frac{1}{2}\right)^2 \omega + (2n+1)xi}$$

$$\vartheta(x,\omega)_2 = \sum_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi\left(n+\frac{1}{2}\right)^2 + (2n+1)xi}$$

$$\vartheta(x,\omega)_3 = \sum_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi n^2 \omega + 2nxi}.$$

Sei $\qquad x + n\pi\omega i = \xi, \quad e^{\pi n^2 \omega - 2nxi} = \eta,$

so wird

176) $\vartheta(\xi)_0 = (-1)^n \eta \vartheta(x)_0, \quad \vartheta(\xi)_2 = \eta \vartheta(x)_2$

177) $\vartheta(\xi)_1 = (-1)^n \eta \vartheta(x_1), \quad \vartheta(\xi)_3 = \eta \vartheta(x)_3$

Sei

$$x + \frac{2n+1}{2} \pi \omega i = \xi, \quad e^{\pi \left(\frac{2n+1}{2}\right)^2 \omega - (2n+1) x i} = \eta,$$

so wird

178) $\vartheta(\xi)_0 = (-1)^{n+\frac{1}{2}} \eta \vartheta(x)_1, \quad \vartheta(\xi)_2 = \eta \vartheta(x)_3$

179) $\vartheta(\xi)_1 = (-1)^{n+\frac{1}{2}} \eta \vartheta(x)_0, \quad \vartheta(\xi)_3 = \eta \vartheta(x)_2$

Seien nun $\alpha \beta \gamma \delta$ positive ganze Zahlen und

$$\alpha \delta - \beta \gamma = 1,$$

sei ferner

$$x' = \frac{x}{\alpha - \beta \omega i}, \quad \omega' = \frac{\gamma i + \delta \omega}{\alpha - \beta \omega i}$$

$$\varrho = \frac{\sqrt{\alpha - \beta \omega i}}{c} e^{\frac{-\beta x^2 i}{\pi(\alpha - \beta \omega i)}}, \quad c^8 = 1,$$

so ergeben sich folgende Transformationsgruppen:

180) I. α, δ gerade; β, γ ungerade.

$$\vartheta(x', \omega')_0 = \varrho \vartheta(x, \omega)_2 e^{-\frac{\pi \alpha \beta i}{4}}$$

$$\vartheta(x', \omega')_1 = \varrho \vartheta(x, \omega)_1 e^{\left\{\left(1-\frac{\gamma}{2}\right)\delta + \left(1-\frac{\alpha}{2}\right)\beta\right\}\frac{\pi i}{2}}$$

$$\vartheta(x', \omega')_2 = \varrho \vartheta(x, \omega)_0 e^{\left(1-\frac{\gamma}{2}\right)\frac{\pi i \delta}{2}}$$

$$\vartheta(x', \omega')_3 = \varrho \vartheta(x, \omega)_3$$

181) II. α, δ ungerade; β, γ gerade.

$$\vartheta(x', \omega')_0 = \varrho \vartheta(x, \omega)_0 e^{\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)\frac{\pi \beta i}{2}}$$

$$\vartheta(x', \omega')_1 = \varrho \vartheta(x, \omega)_1 e^{\left(\alpha + \beta + 1 - \frac{\alpha\beta + \gamma\delta}{2}\right)\frac{\pi i}{2}}$$

$$\vartheta(x', \omega')_2 = \varrho \vartheta(x, \omega)^2 e^{-\frac{\pi \gamma \delta i}{4}}$$

$$\vartheta(x', \omega')_3 = \varrho \vartheta(x, \omega)_3$$

182) III. α, β, γ ungerade; δ gerade.

$$\vartheta(x', \omega')_0 = \varrho\, \vartheta(x, \omega)_2\, e^{-\frac{\pi \alpha \beta i}{4}}$$

$$\vartheta(x', \omega')_1 = \varrho\, \vartheta(x, \omega)_1\, e^{\left(\beta - \frac{\alpha\beta + \gamma\delta}{2}\right)\frac{\pi i}{2}}$$

$$\vartheta(x', \omega')_2 = \varrho\, \vartheta(x, \omega)_3\, e^{-\frac{\pi \gamma \delta i}{4}}$$

$$\vartheta(x', \omega')_3 = \varrho\, \vartheta(x, \omega)_0$$

183) IV. α, δ, γ ungerade; β gerade.

$$\vartheta(x', \omega')_0 = \varrho\, \vartheta(x, \omega)_3\, e^{-\frac{\pi \alpha \beta i}{4}}$$

$$\vartheta(x', \omega')_1 = \varrho\, \vartheta(x, \omega)_1\, e^{\left(\alpha + \beta + 1 - \frac{\alpha\beta + \gamma\delta}{2}\right)\frac{\pi i}{2}}$$

$$\vartheta(x', \omega')_2 = \varrho\, \vartheta(x, \omega)_2\, e^{-\frac{\pi \gamma \delta i}{4}}$$

$$\vartheta(x', \omega')_3 = \varrho\, \vartheta(x, \omega)_0$$

184) V. β, γ, δ ungerade; α gerade.

$$\vartheta(x', \omega')_0 = \varrho\, \vartheta(x, \omega)_3\, e^{\left(1 - \frac{\beta}{2}\right)\frac{\pi \alpha i}{2}}$$

$$\vartheta(x', \omega')_1 = \varrho\, \vartheta(x, \omega)_1\, e^{\left(\beta + \gamma + \delta - 1 - \frac{\alpha\beta + \gamma\delta}{2}\right)\frac{\pi i}{2}}$$

$$\vartheta(x', \omega')_2 = \varrho\, \vartheta(x, \omega)_0\, e^{\left(\gamma + \delta - 1 - \frac{\gamma\delta}{2}\right)\frac{\pi i}{2}}$$

$$\vartheta(x', \omega')_3 = \varrho\, \vartheta(x, \omega)_2$$

185) VI. α, β, δ ungerade; γ gerade.

$$\vartheta(x', \omega')_0 = \varrho\, \vartheta(x, \omega)_0\, e^{\left(\alpha + \beta - 1 - \frac{\alpha\beta}{2}\right)\frac{\pi i}{2}}$$

$$\vartheta(x', \omega')_1 = \varrho\, \vartheta(x, \omega)_1\, e^{\left(\beta + \gamma - \frac{\alpha\beta + \gamma\delta}{2}\right)\frac{\pi i}{2}}$$

$$\vartheta(x', \omega')_2 = \varrho\, \vartheta(x, \omega)_3\, e^{\left(1 - \frac{\delta}{2}\right)\frac{\pi \gamma i}{2}}$$

$$\vartheta(x', \omega')_3 = \varrho\, \vartheta(x, \omega)_2$$

186) $$\vartheta_0(0) = \prod_1^{\infty} (1 - q^{2n-1})^2 (1 - q^{2n}) = \sum_{-\infty}^{+\infty} (-1)^n q^{n^2}$$

$$= 1 + 2 \sum_1^{\infty} (-1)^n q^{n^2}$$

187) $\vartheta_1(0) = 0$

188) $\vartheta_1'(0) = 2\sqrt[4]{q} \prod_1^\infty (1 - q^{2n})^3$

$$= - \sum_{-\infty}^{+\infty} (-1)^n (2n-1) q^{\left(\frac{2n-1}{2}\right)^2}$$

189) $\vartheta_2(0) = 2\sqrt[4]{q} \prod_1^\infty (1 + q^{2n})^2 (1 - q^{2n})^3$

$$= \sum_{-\infty}^{+\infty} q^{\left(\frac{2n-1}{2}\right)^2} = 2 \sum_1^\infty q^{\left(\frac{2n-1}{2}\right)^2}$$

190) $\vartheta_3(0) = \prod_1^\infty (1 + q^{2n-1})^2 (1 - q^{2n})$

$$= \sum_{-\infty}^{+\infty} q^{n^2} = 1 + 2 \sum_1^\infty q^{n^2}$$

Es ist

$$\vartheta_0(0)\, \vartheta_2(0)\, \vartheta_3(0) = \vartheta_1'(0)$$

191) $\dfrac{\vartheta_0(0)}{\vartheta_1'(0)} = \dfrac{1}{2\sqrt[4]{q}} \prod_1^\infty \left(\dfrac{1 - q^{2n-1}}{1 - q^{2n}}\right)^2$

192) $\dfrac{\vartheta_0(0)}{\vartheta_2(0)} = \dfrac{1}{2\sqrt[4]{q}} \prod_1^\infty \left(\dfrac{1 - q^{2n-1}}{1 + q^{2n}}\right)^2$

193) $\dfrac{\vartheta_1'(0)}{\vartheta_2(0)} = \prod_1^\infty \left(\dfrac{1 - q^{2n}}{1 + q^{2n}}\right)^2$

194) $\dfrac{\vartheta_0(0)}{\vartheta_3(0)} = \prod_1^\infty \left(\dfrac{1 - q^{2n-1}}{1 + q^{2n-1}}\right)^2$

195) $\dfrac{\vartheta_3(0)}{\vartheta_1'(0)} = \dfrac{1}{2\sqrt[4]{q}} \prod_1^\infty \left(\dfrac{1 + q^{2n-1}}{1 - q^{2n}}\right)^2$

196) $\dfrac{\vartheta_3(0)}{\vartheta_2(0)} = \dfrac{1}{2\sqrt[4]{q}} \prod_1^\infty \left(\dfrac{1 + q^{2n-1}}{1 + q^{2n}}\right)^2$

197) $\dfrac{\vartheta_2(0)}{\vartheta_1'(0)} = - \dfrac{1}{2\sqrt[4]{p}} \prod_1^\infty \left(\dfrac{1 - p^{2n-1}}{1 - p^{2n}}\right)^2$

198) $\dfrac{\vartheta_2(0)}{\vartheta_0(0)} = \dfrac{1}{2\sqrt[4]{p}} \prod_1^\infty \left(\dfrac{1 - p^{2n-1}}{1 + p^{2n}}\right)^2$

199) $$\frac{\vartheta_1'(0)}{\vartheta_0(0)} = -\frac{\log p}{\pi} \prod_1^\infty \left(\frac{1-p^{2n}}{1+p^{2n}}\right)^2$$

200) $$\frac{\vartheta_2(0)}{\vartheta_3(0)} = \prod_1^\infty \left(\frac{1-p^{2n-1}}{1+p^{2n-1}}\right)^2$$

201) $$\frac{\vartheta_3(0)}{\vartheta_1'(0)} = -\frac{1}{2\sqrt[4]{p}} \frac{\log p}{\pi} \prod_1^\infty \left(\frac{1+p^{2n-1}}{1-p^{2n}}\right)^2$$

202) $$\frac{\vartheta_3(0)}{\vartheta_0(0)} = \frac{1}{2\sqrt[4]{p}} \prod_1^\infty \left(\frac{1+p^{2n-1}}{1+p^{2n}}\right)^2.$$

§. 130.

Die Jacobi'schen Functionen.

1) $$E(u) = \frac{E}{\varkappa} u + \frac{4\pi}{2\varkappa} \sum \frac{q^n}{1-q^{2n}} \sin \frac{n\pi u}{\varkappa}$$

2) $$Z(u) = \frac{4\pi}{2\varkappa} \sum \frac{q^n}{1-q^{2n}} \sin \frac{n\pi u}{\varkappa}$$

3) $$E(u) = \frac{E}{\varkappa} u + Z(u)$$

4) $$Z(0) = 0, \quad Z(\varkappa) = 0, \quad Z(-u) = -Z(u)$$

$$Z\left(\frac{\varkappa}{2}\right) = \frac{1-\varepsilon_1}{2}, \quad Z(u+2\varkappa) = Z(u)$$

$$Z(u+i\varkappa') = Z(u) - \frac{i\pi}{2\varkappa} + \operatorname{cotam} u \, \Delta n u$$

$$Z(u+2i\varkappa') = Z(u) - i\frac{\pi}{\varkappa}$$

$$Z(i\varkappa') = \infty, \quad Z(2i\varkappa') = -\frac{\pi i}{\varkappa}$$

5) $$\Pi(u,a) = u Z(a) - 2 \sum \frac{q^n}{n(1-q^{2n})} \sin \frac{n\pi u}{\varkappa} \sin \frac{n\pi a}{\varkappa}$$

6) $$\Pi(u,a) = u Z(a) + \frac{1}{2} \log \prod_1^\infty \frac{1 - 2q^{2n-1} \cos \frac{\pi}{\varkappa}(u-a) + q^{4n-2}}{1 - 2q^{2n-1} \cos \frac{\pi}{\varkappa}(u+a) + q^{4n-2}}$$

7) $\Pi(u,a) - \Pi(a,u) = u\,Z(a) - a\,Z(u) = u\,E(a) - a\,E(u)$

8) $\dfrac{d\,\Pi(u,a)}{d\,u} = Z(a) + \dfrac{1}{2}\,Z(u-a) - \dfrac{1}{2}\,Z(u+a)$

9) $\dfrac{d^2\,\Pi(u,a)}{d\,u^2} = \dfrac{\varepsilon^2}{2}\,\{sn^2(u+a) - sn^2(u-a)\}$

10) $\Theta(u) = 1 + 2\sum(-1)^n q^{n^2} \cos\dfrac{n\pi u}{K}$

11) $\Theta(u+2\varkappa) = \Theta(u), \quad \Theta(u+2i\varkappa') = -\dfrac{1}{q}\,e^{-\frac{\pi i u}{\varkappa}}\,\Theta(u)$

12) $\Theta(0) = 1 - 2\sum(-1)^n q^{n^2} = \Pi\,\dfrac{1-q^n}{1+q^n} = \sqrt{\dfrac{2\,\varepsilon_1\,\varkappa}{\pi}}$

13) $\Theta(\varkappa) = 1 + 2\sum q^{n^2} = \Pi\,\dfrac{1-q^{2n}}{1+q^{2n}}\cdot\dfrac{1+q^{2n-1}}{1-q^{2n-1}} = \sqrt{\dfrac{2\,\varkappa}{\pi}}$

14) $\Theta\left(\dfrac{\varkappa}{2}\right) = 1 + \sum(-1)^n q^{(2n)^2}$

15) $\Theta(u+i\varkappa') = \dfrac{i\sqrt{\varepsilon}}{\sqrt[4]{q}}\,e^{-\frac{\pi i u}{2\varkappa}}\,\Theta(u)\,sn\,u$

16) $\Theta(u+2i\varkappa') = -\dfrac{1}{q}\,e^{-\frac{i\pi u}{\varkappa}}\,\Theta(u)$

17) $Z(u) = \dfrac{\Theta'(u)}{\Theta(u)}$

18) $H(u) = \dfrac{1}{i}\,\sqrt[4]{q}\,e^{\frac{u i \pi}{2\varkappa}}\,\Theta(u+i\varkappa')$

$= 2\sum(-1)^n \sqrt[4]{q^{(2n-1)^2}}\,\sin\dfrac{2n+1}{2\varkappa}\,\pi u$

$= 2\sqrt[4]{q}\;\Pi(1-q^{2n})\,\sin\dfrac{\pi u}{2\varkappa}\left\{1 - 2q^{2n}\cos\dfrac{\pi u}{2\varkappa} + q^{2n}\right\}$

19) $H(u) = \sqrt{\dfrac{\Theta(u)^2 - \varepsilon_1\,\Theta(u+\varkappa)^2}{\varepsilon}}$

20) $H(0) = 0,\; H(\varkappa) = \sqrt{\dfrac{\varepsilon}{\varepsilon_1}}\;\Theta(0) = \sqrt{\dfrac{2\,\varepsilon\,\varkappa}{\pi}},\; H(u) = -H(u)$

21) $H(u+\varkappa) = \sqrt[4]{q}\,e^{\frac{\pi i u}{2\varkappa}}\,\Theta(u+\varkappa+i\varkappa'),$

$H(u+2\varkappa) = -H(u), \quad H(u+4\varkappa) = H(u)$

22) $\sqrt{\varepsilon} = \dfrac{H(\varkappa)}{\Theta(\varkappa)} = 2\,\dfrac{\sqrt[4]{q} + \sqrt[4]{q^9} + \sqrt[4]{q^{25}} + \cdots}{1 + 2q + 2q^4 + 2q^9 + \cdots}$

$\sqrt{\varepsilon_1} = \dfrac{\Theta(0)}{\Theta(\varkappa)} = \dfrac{1 - 2q + 2q^4 - 2q^9 + \cdots}{1 + 2q + 2q^4 + 2q^9 + \cdots}$

23) $sn\,u = \sqrt{\frac{1}{\varepsilon}}\,\frac{H(u)}{\Theta(u)} = \frac{\sqrt[4]{q}}{i\sqrt{\varepsilon}}\,e^{\frac{\pi i u}{2\varkappa}}\,\frac{\Theta(u+i\varkappa')}{\Theta(u)}$

$$cn\,u = \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon}}\,\frac{H(u+\varkappa)}{\Theta(u)} = \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon}}\,\sqrt[4]{q}\,e^{\frac{\pi i u}{2\varkappa}}\,\frac{\Theta(u+\varkappa+i\varkappa')}{\Theta(u)}$$

$$\Delta n\,u = \sqrt{\varepsilon_1}\,\frac{\Theta(u+\varkappa)}{\Theta(u)}$$

24) $\vartheta_0\left(\frac{\pi u}{2\varkappa}\right) = \Theta(u), \quad \vartheta_1\left(\frac{\pi u}{2\varkappa}\right) = H(u),$

$$\vartheta_2\left(\frac{\pi u}{2\varkappa}\right) = H(u+\varkappa), \quad \vartheta_3\left(\frac{\pi u}{2\varkappa}\right) = \Theta(u+\varkappa)$$

25) $\Pi(u,a) = u\,Z(a) + \frac{1}{2}\,log\,\frac{\Theta(u-a)}{\Theta(u+a)}$

26) $E(iu) = i\,tgn\,am(u,\varepsilon_1)\,\Delta n(u,\varepsilon_1) - i\,E(u,\varepsilon_2) + iu$

27) $i\,Z(iu) = -\,tgn\,am(u,\varepsilon_1)\,\Delta n(u,\varepsilon_2) + \frac{\pi u}{2\varkappa\varkappa'} + Z(u,\varepsilon_1)$

28) $\Theta(iu) = \Theta(0)\,e^{\frac{\pi u^2}{4\varkappa\varkappa'}}\,cn(u,\varepsilon_1)\,\frac{\Theta(u,\varepsilon_1)}{\Theta(0,\varepsilon_1)}$

29) $\Theta(iu+\varkappa) = \sqrt{\frac{\varkappa}{\varepsilon\varkappa'}}\,e^{\frac{\pi u^2}{4\varkappa\varkappa'}}\,\Delta n(u,\varepsilon_1)\,\Theta(u,\varepsilon_1)$

$$= \sqrt{\frac{\varkappa}{\varkappa'}}\,e^{\frac{\pi u^2}{4\varkappa\varkappa'}}\,\Theta(u+\varkappa',\varepsilon^2)$$

30) $i\,Z(iu+\varkappa) = \frac{\pi u}{2\varkappa\varkappa'} + Z(u+\varkappa',\varepsilon_1)$

$$= \frac{\pi u}{2\varkappa\varkappa'} - \frac{\varepsilon_1^2\,sn(u,\varepsilon_1)\,cn(u,\varepsilon_1)}{\Delta n(u,\varepsilon_1)} + Z(u,\varepsilon')$$

31) $i\,\Pi(u,ia) = u\left\{Z(a,\varepsilon_1) + \frac{\pi a}{2\varkappa\varkappa'} - tgn\,am(a,\varepsilon_1)\,\Delta n(a,\varepsilon_1)\right\}$

$$+ \frac{i}{2}\,log\left\{\frac{\Theta(u-ia)}{\Theta(u+ia)}\right\}.$$

32) Sei

$$A = \varepsilon^2\,\frac{tgn\,am(a,\varepsilon_1)}{\Delta n(a,\varepsilon_1)}$$

so wird

$$i\,\Pi(u,ia+\varkappa) = i\,\Pi(u,ia) + A\,u - arc\,tgn\left\{A\,\frac{sn\,u\,cn\,u}{\Delta n\,u}\right\}$$

33) $Z(a) + Z(b) = Z(a+b) + \varepsilon^2\,sn\,a\,sn\,b\,sn(a+b)$

34) $E(am\, a) + E(am\, b) = E(am[a+b]) + \varepsilon^2 sn\, a\, sn\, b\, sn(a+b)$

35) $\Pi(u,a) + \Pi(u,b) = \Pi(u,a+b) + u\,\varepsilon^2 sn\, a\, sn\, b\, sn(a+b)$

$$+ \frac{1}{2} \log \frac{\Theta(a-u)\Theta(b-u)\Theta(a+b+u)}{\Theta(a+u)\Theta(b+u)\Theta(a+b-u)}$$

36) $\Pi(u,a) + \Pi(u,b) = \Pi(u,a+b) + u\,\varepsilon^2 sn\, a\, sn\, b\, sn(a+b)$

$$+ \frac{1}{2} \log \frac{1 - \varepsilon^2 sn\, u\, sn\, a\, sn\, b\, sn(a+b-u)}{1 + \varepsilon^2 sn\, u\, sn\, a\, sn\, b\, sn(a+b+u)}.$$

Man vergleiche die betreffenden Abschnitte bei H. Durège.

§. 131.

Reihen für elliptische Functionen.

1) $$sn\, u = \frac{2\pi}{\varepsilon\varkappa} \sum_1^\infty \frac{\sqrt{q^{2n-1}}}{1-q^{2n-1}} \sin \frac{2n-1}{2\varkappa} \pi u$$

$$cn\, u = \frac{2\pi}{\varepsilon\varkappa} \sum_1^\infty \frac{\sqrt{q^{2n-1}}}{1+q^{2n-1}} \cos \frac{2n-1}{2\varkappa} \pi u$$

$$\Delta n\, u = \frac{\pi}{2\varkappa} \left\{1 + 4 \sum_1^\infty \frac{q^n}{1+q^{2n}} \cos \frac{n\pi u}{\varkappa}\right\}$$

$$am\, u = \frac{\pi u}{2\varkappa} + 2 \sum_1^\infty \frac{1}{n} \frac{q^n}{1+q^{2n}} \sin \frac{n\pi}{\varkappa} u$$

2) $$\log\, sn\, u = \log \frac{2\varkappa}{\pi} + \log \sin \frac{\pi u}{2\varkappa} - 4 \sum_1^\infty \frac{1}{n} \frac{q^n}{1+q^n} \sin^2 \frac{n\pi u}{2\varkappa}$$

$$\log\, cn\, u = \log \cos \left(\frac{\pi u}{2\varkappa}\right) - 4 \sum_1^\infty \frac{1}{n} \frac{q^n}{1+(-1)^n q^n} \sin^2 \frac{n\pi u}{2\varkappa}$$

$$\log \Delta n\, u = -8 \sum_1^\infty \frac{1}{2n-1} \frac{q^{2n-1}}{1-q^{2(2n-1)}} \sin^2 \frac{2n-1}{2\varkappa} \pi u$$

3) $$\frac{1}{sn\, u} = \frac{\pi}{2\varkappa} \left\{\frac{1}{\sin \frac{\pi u}{2\varkappa}} + 4 \sum_1^\infty \frac{q^{2n-1}}{1-q^{2n-1}} \sin \frac{2n-1}{2\varkappa} \pi u\right\}$$

$$\frac{1}{cn\, u} = \frac{\pi}{2\varepsilon_1\varkappa} \left\{\frac{1}{\cos \frac{\pi u}{2\varkappa}} + 4 \sum_1^\infty (-1)^n \frac{q^{2n-1}}{1+q^{2n-1}} \cos \frac{2n-1}{2\varkappa} \pi u\right\}$$

$$\frac{1}{\Delta n\, u} = \frac{\pi}{2\varepsilon_1\varkappa} \left\{1 + 4 \sum_1^\infty (-1)^n \frac{q^n}{1+q^{2n}} \cos \frac{n\pi u}{\varkappa}\right\}$$

4) $$\frac{sn\,u}{cn\,u} = \frac{\pi}{2\varepsilon_1 \varkappa}\left\{tgn\left(\frac{\pi u}{2\varkappa}\right) + 4\sum_1^\infty (-1)^n \frac{q^{2n}}{1+q^{2n}} \sin\frac{n\pi u}{\varkappa}\right\}$$

$$\frac{sn\,u}{\Delta n\,u} = -\frac{2\pi}{\varepsilon\varepsilon_1\varkappa}\sum_1^\infty (-1)^n \frac{\sqrt{q^{2n-1}}}{1+q^{2n-1}} \sin\frac{2n-1}{2\varkappa}\pi u$$

5) $$\frac{cn\,u}{sn\,u} = \frac{\pi}{2\varkappa}\left\{cotg\left(\frac{\pi u}{2\varkappa}\right) - 4\sum_1^\infty \frac{q^{2n}}{1+q^{2n}} \sin\frac{n\pi u}{\varkappa}\right\}$$

$$\frac{cn\,u}{\Delta n\,u} = -\frac{2\pi}{\varepsilon\varkappa}\sum_1^\infty (-1)^n \frac{\sqrt{q^{2n-1}}}{1-q^{2n-1}} \cos\frac{2n-1}{2\varkappa}\pi u$$

6) $$\frac{\Delta n\,u}{sn\,u} = \frac{\pi}{2\varkappa}\left\{\frac{1}{\sin\left(\frac{\pi u}{2\varkappa}\right)} - 4\sum_1^\infty \frac{q^{2n-1}}{1+q^{2n-1}} \sin\frac{2n-1}{2\varkappa}\pi u\right\}$$

$$\frac{\Delta n\,u}{cn\,u} = \frac{\pi}{2\varkappa}\left\{\frac{1}{\cos\left(\frac{\pi u}{2\varkappa}\right)} - 4\sum_1^\infty (-1)^n \frac{q^{2n-1}}{1-q^{2n-1}} \cos\frac{2n-1}{2\varkappa}\pi u\right\}$$

7) $$\frac{cn\,u\,\Delta n\,u}{sn\,u} = \frac{\pi}{2\varkappa}\left\{cotg\left(\frac{\pi u}{2\varkappa}\right) - 4\sum_1^\infty \frac{q^n}{1+q^n} \sin\frac{n\pi u}{\varkappa}\right\}$$

$$\frac{sn\,u\,\Delta n\,u}{cn\,u} = \frac{\pi}{2\varkappa}\left\{tgn\left(\frac{\pi u}{2\varkappa}\right) + 4\sum_1^\infty \frac{q^n}{1+(-1)^n q^n} \sin\frac{n\pi u}{\varkappa}\right\}$$

$$\frac{sn\,u\;cn\,u}{\Delta n\,u} = \frac{4\pi^2}{\varepsilon^2\varkappa}\sum_1^\infty \frac{q^{2n-1}}{1-q^{2(2n-1)}} \sin\frac{2n-1}{\varkappa}\pi u$$

8) $$\frac{sn\,u}{cn\,u\,\Delta n\,u} = \frac{\pi}{2\varepsilon_1^2\varkappa}\left\{tgn\left(\frac{\pi u}{2\varkappa}\right) + 4\sum_1^\infty (-1)^n \frac{q^n}{1-q^n} \sin\frac{n\pi u}{\varkappa}\right\}$$

$$\frac{cn\,u}{sn\,u\,\Delta n\,u} = \frac{\pi}{2\varkappa}\left\{cotg\left(\frac{\pi u}{2\varkappa}\right) - 4\sum_1^\infty (-1)^n \frac{q^n}{1+(-1)^n q^n} \sin\frac{n\pi u}{\varkappa}\right\}$$

$$\frac{\Delta n\,u}{sn\,u\;cn\,u} = \frac{\pi}{\varkappa}\left\{\frac{1}{\sin\left(\frac{\pi u}{\varkappa}\right)} + 4\sum_1^\infty \frac{q^{2(2n-1)}}{1-q^{2(2n-1)}} \sin\frac{2n-1}{\varkappa}\pi u\right\}$$

9) $$sn^2 u = \frac{8}{\vartheta_2(0)^4} \sum_1^\infty \frac{n q^n}{1-q^{2n}} \left\{1 - \cos \frac{n\pi u}{\varkappa}\right\}$$

$$cn^2 u = -\frac{8}{\vartheta_2(0)^4} \sum_1^\infty (-1)^n \frac{n q^n}{1-q^{2n}} \left\{1 - (-1)^n \cos \frac{n\pi u}{\varkappa}\right\}$$

$$\varDelta n^2 u = \frac{1}{\vartheta_3(0)^4} \left[1 - 8 \sum_1^\infty (-1)^n \frac{n q^n}{1-q^{2n}} \cdot \left\{q^n - (-1)^n \cos \frac{n\pi u}{\varkappa}\right\}\right]$$

10) $$\frac{1}{sn^2 u} = \frac{1}{\vartheta_3(0)^4} \left\{\frac{1}{\sin^2 \frac{\pi u}{2\varkappa}} + 8 \sum_1^\infty (-1)^n \frac{n q^{2n}}{1-q^{2n}} \cdot \left\{1 - \cos \frac{n\pi u}{\varkappa}\right\}\right\}$$

$$\frac{1}{cn^2 u} = \frac{1}{\vartheta_0(0)^4} \left\{\frac{1}{\cos^2 \frac{\pi u}{2\varkappa}} + 8 \sum_1^\infty \frac{(-1)^n n q^n}{1-q^{2n}} \cdot \left\{1 - q^n \cos \frac{n\pi u}{\varkappa}\right\}\right\}$$

$$\frac{1}{\varDelta n^2 u} = \frac{1}{\vartheta_0(0)^4} \left\{1 - 8 \sum_1^\infty (-1)^n \frac{n q^n}{1-q^{2n}} \left\{q^n - \cos \frac{n\pi u}{\varkappa}\right\}\right\}$$

11) $$\frac{sn^2 u}{cn^2 u} = \frac{1}{\vartheta_0(0)^4} \left\{tgn^2 \frac{\pi u}{2\varkappa} + 8 \sum_1^\infty (-1)^n \frac{n q^{2n}}{1-q^{2n}} \left\{1 - \cos \frac{n\pi u}{\varkappa}\right\}\right\}$$

$$\frac{sn^2 u}{\varDelta n^2 u} = -\frac{8\vartheta_3(0)^4}{\vartheta_0(0)^4 \vartheta_2(0)^4} \sum_1^\infty (-1)^n \frac{n q^n}{1-q^{2n}} \left\{1 - \cos \frac{n\pi u}{\varkappa}\right\}$$

12) $$\frac{cn^2 u}{sn^2 u} = \frac{1}{\vartheta_3(0)^4} \left\{cotg^2 \frac{\pi u}{2\varkappa} + 8 \sum_1^\infty (-1)^n \frac{n q^{2n}}{1-q^{2n}} \cdot \left\{1 - (-1)^n \cos \frac{n\pi u}{\varkappa}\right\}\right\}$$

$$\frac{cn^2 u}{\varDelta n^2 u} = \frac{8}{\vartheta_2(0)^4} \sum_1^\infty \frac{n q^n}{1-q^{2n}} \left\{1 - (-1)^n \cos \frac{n\pi u}{\varkappa}\right\}$$

13) $$\frac{\Delta n^2 u}{sn^2 u} = \frac{1}{\vartheta_3(0)^4}\left\{\frac{1}{\sin^2\frac{\pi u}{2\varkappa}} + 8\sum_1^\infty (-1)^n \frac{n q^n}{1-q^{2n}} \cdot \left\{1-(-1)^n q^n \cos\frac{n\pi u}{\varkappa}\right\}\right\}$$

$$\frac{\Delta n^2 u}{cn^2 u} = \frac{1}{\vartheta_3(0)^4}\left\{\frac{1}{\cos^2\frac{\pi u}{2\varkappa}} + 8\sum_1^\infty \frac{n q^n}{1-q^{2n}} \cdot \left\{1-(-1)^n q^n \cos\frac{n\pi u}{\varkappa}\right\}\right\}$$

14) $$\frac{cn^2 u\,\Delta n^2 u}{sn^2 u} = \frac{1}{\vartheta_3(0)^4}\left\{\cot g^2\frac{\pi u}{2\varkappa} + 8\sum_1^\infty (-1)^n \frac{n q^n}{1-q^n} \cdot \left\{1-(-1)^n \cos\frac{n\pi u}{\varkappa}\right\}\right\}$$

$$\frac{sn^2 u\,\Delta n^2 u}{cn^2 u} = \frac{1}{\vartheta_3(0)^4}\left\{tgn^2\frac{u\pi}{2\varkappa} + 8\sum_1^\infty \frac{n q^n}{1-(-1)^n q^n} \cdot \left\{1-\cos\frac{n\pi u}{\varkappa}\right\}\right\}$$

$$\frac{sn^2 u\; cn^2 u}{\Delta n^2 u} = 32\,\frac{\vartheta_3(0)^4}{\vartheta_2(0)^8}\sum_1^\infty \frac{n q^{2n}}{1-q^{4n}}\left\{1-\cos\frac{2n\pi u}{\varkappa}\right\}$$

15) $$\frac{sn^2 u}{cn^2 u\,\Delta u^2 u} = \frac{\vartheta_3(0)^4}{\vartheta_0(0)^8}\left\{tgn^2\frac{\pi u}{2\varkappa} + 8\sum_1^\infty (-1)^n \frac{n q^n}{1-q^n} \cdot \left\{1-\cos\frac{n\pi u}{\varkappa}\right\}\right\}$$

$$\frac{cn^2 u}{sn^2 u\,\Delta n^2 u} = \frac{1}{\vartheta_3(0)^4}\left\{\cot g^2\frac{2\varkappa}{\pi u} + 8\sum_1^\infty \frac{n q^n}{1-(-1)^n q^n} \cdot \left\{1-(-1)^n \cos\frac{n\pi u}{\varkappa}\right\}\right\}$$

$$\frac{\Delta n^2 u}{sn^2 u\; cn^2 u} = \frac{4}{\vartheta_3(0)^4}\left\{\frac{1}{\sin^2\frac{\pi u}{\varkappa}} + 8\sum_1^\infty \frac{n q^{2n}}{1-q^{4n}} \cdot \left\{1-q^{2n}\cos\frac{2n\pi u}{\varkappa}\right\}\right\}.$$

§. 132.

Bruchreihen für elliptische Functionen.

1) $$sn\,u = \frac{2\pi}{\varepsilon\varkappa} \sin\frac{\pi u}{2\varkappa} \sum_1^\infty \frac{(1+q^{2n-1})\sqrt{q^{2n-1}}}{1-2q^{2n-1}\cos\frac{\pi u}{\varkappa}+q^{2(2n-1)}}$$

$$cn\,u = -\frac{2\pi}{\varepsilon\varkappa} \cos\frac{\pi u}{2\varkappa} \sum_1^\infty \frac{(-1)^n(1-q^{2n-1})\sqrt{q^{2n-1}}}{1-2q^{2n-1}\cos\frac{\pi u}{\varkappa}+q^{2(2n-1)}}$$

$$\Delta n\,u = 1 + \frac{4\pi}{\varkappa} \sin^2\frac{\pi u}{2\varkappa} \sum_1^\infty \frac{1+q^{2n-1}}{1-q^{2n-1}} \cdot \frac{(-1)^n q^{2n-1}}{1-2q^{2n-1}\cos\frac{\pi u}{\varkappa}+q^{2(2n-1)}}$$

2) $$\frac{1}{sn\,u} = \frac{\pi}{2\varkappa}\left\{\frac{1}{\sin\frac{\pi u}{2\varkappa}} + 4\sin\left(\frac{\pi u}{2\varkappa}\right) \cdot \sum_1^\infty \frac{(1+q^{2n})q^n}{1-2q^{2n}\cos\frac{\pi u}{\varkappa}+q^{4n}}\right\}$$

$$\frac{1}{cn\,u} = \frac{\pi}{2\varepsilon_1\varkappa}\left\{\frac{1}{\cos\frac{\pi u}{2\varkappa}} + 4\cos\left(\frac{\pi u}{2\varkappa}\right) \cdot \sum_1^\infty \frac{(-1)^n(1+q^{2n})q^n}{1+2q^{2n}\cos\frac{\pi u}{\varkappa}+q^{4n}}\right\}$$

$$\frac{1}{\Delta n\,u} = \frac{1}{\varepsilon_1} + \frac{4\pi}{\varepsilon_1\varkappa}\cos^2\frac{\pi u}{2\varkappa} \cdot \sum_1^\infty \frac{1+q^{2n-1}}{1-q^{2n-1}} \frac{(-1)^n q^{2n-1}}{1+2q^{2n-1}\cos\frac{\pi u}{\varkappa}+q^{2(2n-1)}}$$

$$3)\quad \frac{sn\,u}{cn\,u} = \frac{\pi}{2\varepsilon_1 \varkappa}\left\{tgn\,\frac{\pi u}{2\varkappa} + 4\,sin\,\frac{\pi u}{\varkappa}\cdot \sum_1^\infty \frac{(-1)^n q^{2n}}{1 + 2q^{2n}\cos\frac{\pi u}{\varkappa} + q^{4n}}\right\}$$

$$\frac{sn\,u}{\Delta n\,u} = -\frac{2\pi}{\varepsilon\varepsilon_1\varkappa}\,sin\,\frac{\pi u}{2\varkappa}\sum_1^\infty \frac{(-1)^n(1-q^{2n-1})\sqrt{q^{2n-1}}}{1 + 2q^{2n-1}\cos\frac{\pi u}{\varkappa} + q^{2(2n-1)}}$$

$$4)\quad \frac{cn\,u}{sn\,u} = \frac{\pi}{2\varkappa}\left\{cotg\,\frac{\pi u}{2\varkappa} + 4\,sin\,\frac{\pi u}{\varkappa}\sum_1^\infty \frac{(-1)^n q^{2n}}{1 - 2q^{2n}\cos\frac{\pi u}{\varkappa} + q^{4n}}\right\}$$

$$\frac{cn\,u}{\Delta n\,u} = \frac{2\pi}{\varepsilon\varkappa}\cos\frac{\pi u}{2\varkappa}\sum_1^\infty \frac{(1+q^{2n-1})\sqrt{q^{2n-1}}}{1 + 2q^{2n-1}\cos\frac{\pi u}{\varkappa} + q^{2(2n-1)}}$$

$$5)\quad \frac{\Delta n\,u}{sn\,u} = \frac{\pi}{2\varkappa}\left\{\frac{1}{sin\,\frac{\pi u}{2\varkappa}} + 4\,sin\,\frac{\pi u}{2\varkappa}\sum_1^\infty \frac{(-1)^n(1+q^{2n})q^n}{1 - 2q^{2n}\cos\frac{\pi u}{\varkappa} + q^{4n}}\right\}$$

$$\frac{\Delta n\,u}{cn\,u} = \frac{\pi}{2\varkappa}\left\{\frac{1}{\cos\frac{\pi u}{2\varkappa}} + 4\cos\frac{\pi u}{2\varkappa}\sum_1^\infty \frac{(1+q^{2n})q^n}{1 + 2q^{2n}\cos\frac{\pi u}{\varkappa} + q^{4n}}\right\}$$

$$6)\quad \frac{sn\,u}{cn\,u\,\Delta n\,u} = \frac{\pi}{2\varepsilon_1^2\varkappa}\left\{tgn\,\frac{\pi u}{2\varkappa} + 4\,sin\,\frac{\pi u}{\varkappa}\cdot \sum_1^\infty \frac{(-1)^n q^n}{1 + 2q^n\cos\frac{\pi u}{\varkappa} + q^{2n}}\right\}$$

$$\frac{cn\,u}{sn\,u\,\Delta n\,u} = \frac{\pi}{2\varkappa}\left\{cotg\,\frac{\pi u}{2\varkappa} + 4\,sin\,\frac{\pi u}{\varkappa}\cdot \sum_1^\infty \frac{q^n}{1 - 2(-1)^n q^n\cos\frac{\pi u}{\varkappa} + q^{2n}}\right\}$$

$$\frac{\Delta n\,u}{sn\,u\,cn\,u} = \frac{\pi}{\varkappa}\left\{\frac{1}{sin\,\frac{\pi u}{\varkappa}} + 4\,sin\,\frac{\pi u}{\varkappa}\sum_1^\infty \frac{q^{2n}(1+q^{4n})}{1 - 2q^{4n}\cos\frac{2\pi u}{\varkappa} + q^{8n}}\right\}$$

$$7)\quad \frac{cn\,u\,\Delta n\,u}{sn\,u} = \frac{\pi}{2\varkappa}\left\{cotg\,\frac{\pi u}{2\varkappa} + 4\sin\frac{\pi u}{\varkappa}\sum_1^\infty \frac{(-1)^n q^n}{1-2q^n\cos\frac{\pi u}{\varkappa}+q^{2n}}\right\}$$

$$\frac{sn\,u\,\Delta n\,u}{cn\,u} = \frac{\pi}{2\varkappa}\left\{tgn\,\frac{\pi u}{2\varkappa} + 4\sin\frac{\pi u}{\varkappa}\cdot \sum_1^\infty \frac{q^n}{1+2(-1)^n q^n\cos\frac{\pi u}{\varkappa}+q^{2n}}\right\}$$

$$\frac{sn\,u\,cn\,u}{\Delta n\,u} = \frac{\pi}{\varepsilon^2\varkappa}\sin\frac{\pi u}{\varkappa}\sum_1^\infty \frac{q^{2n-1}(1+q^{2(2n-1)})}{1-2q^{2(2n-1)}\cos\frac{2\pi u}{\varkappa}+q^{4(2n-1)}}$$

$$8)\quad sn\,u = \frac{\pi}{\varepsilon\varkappa}\left\{\frac{(1+q)\sqrt{q}\cos\frac{\pi u}{2\varkappa}}{1-2q\cos\frac{\pi u}{\varkappa}+q^2} + \sum_1^\infty \sqrt{q^{2n-1}}\,\frac{1-q^{2n-1}}{1+q^{2n-1}}\cos\frac{2n-1}{2\varkappa}\pi u\right\}$$

$$cn\,u = \frac{\pi}{\varepsilon\varkappa}\left\{\frac{(1-q)\sqrt{q}\cos\frac{\pi u}{2\varkappa}}{1-2q\cos\frac{\pi u}{\varkappa}+q^2} + \sum_1^\infty \sqrt{q^{2n-1}}\,\frac{1-q^{2n-1}}{1+q^{2n-1}}\cos\frac{2n-1}{2\varkappa}\pi u\right\}$$

$$\Delta n\,u = \frac{\pi}{2\varkappa}\left\{\frac{1-q^2}{1-2q\cos\frac{\pi u}{\varkappa}+q^2} + 2\sum_1^\infty q^n\,\frac{1-q^{2n}}{1+q^{2n}}\cos\frac{n\pi u}{\varkappa}\right\}.$$

Man beachte folgende Formeln:

$$9)\quad \sum_1^\infty q^n\sin\frac{n\pi u}{\varkappa} = \frac{q\sin\frac{\pi u}{\varkappa}}{1-2q\cos\frac{\pi u}{\varkappa}+q^2}$$

$$10)\quad \sum_1^\infty \sqrt{q^{2n-1}}\, sin\, \frac{2n-1}{2\varkappa}\pi u = (1+q)\sqrt{q}\, \frac{sin\,\frac{\pi u}{2\varkappa}}{1-2q\,cos\,\frac{\pi u}{\varkappa}+q^2}$$

$$11)\quad \sum_1^\infty \sqrt{q^{2n-1}}\, cos\, \frac{2n-1}{2\varkappa}\pi u = (1-q)\sqrt{q}\, \frac{cos\,\frac{\pi u}{2\varkappa}}{1-2q\,cos\,\frac{\pi u}{\varkappa}+q^2}.$$

Sowie die allgemein für jedes $|q|<1$ geltenden Relationen:

$$12)\quad \sum_1^\infty q^{n-1}\, sin\, nx = \frac{sin\, x}{1-2q\,cos\,x+q^2}$$

$$13)\quad \sum_1^\infty q^{n-1}\, sin\, \frac{2n-1}{2}\, x = \frac{(1+q)\, sin\,\frac{x}{2}}{1-2q\,cos\,x+q^2}$$

$$14)\quad \sum_1^\infty q^{n-1}\, cos\, \frac{2n-1}{2}\, x = \frac{(1-q)\, cos\,\frac{x}{2}}{1-2q\,cos\,x+q^2}$$

$$15)\quad \sum_1^\infty q^{n-1}\, cos\, nx = \frac{cos\,x - q}{1-2q\,cos\,x+q^2}$$

$$16)\quad 1+2\sum_1^\infty q^n\, cos\, nx = \frac{1-q^2}{1-2q\,cos\,x+q^2}$$

§. 133.

Producte.

$$1)\quad sn\,u = \frac{2\sqrt[4]{q}}{\sqrt{\varepsilon}}\, sin\,\frac{\pi u}{2\varkappa} \prod_1^\infty \frac{1-2q^{2n}\,cos\,\frac{\pi u}{\varkappa}+q^{4n}}{1-2q^{2n-1}\,cos\,\frac{\pi u}{\varkappa}+q^{4n-2}}$$

$$2)\quad cn\,u = \frac{2\sqrt{\varepsilon_1}\,\sqrt[4]{q}}{\sqrt{2}}\, cos\,\frac{\pi u}{2\varkappa} \prod_1^\infty \frac{1+2q^{2n}\,cos\,\frac{\pi u}{\varkappa}+q^{4n}}{1-2q^{2n-1}\,cos\,\frac{\pi u}{\varkappa}+q^{4n-2}}$$

$$3)\quad \Delta n\,u = \sqrt{\varepsilon_1} \prod_1^\infty \frac{1+2q^{2n-1}\,cos\,\frac{\pi u}{\varkappa}+q^{4n-2}}{1-2q^{2n-1}\,cos\,\frac{\pi u}{\varkappa}+q^{4n-2}}.$$

§. 134.

q-Reihen.

1) $\frac{2\varkappa}{\pi} = 1 - 4\sum_1^\infty (-1)^n \frac{q^{2n-1}}{1-q^{2n-1}} = 1 + 4\sum_1^\infty \frac{q^n}{1+q^{2n}}$

2) $\frac{2\varkappa'}{\pi} = 1 - 4\sum_1^\infty (-1)^n \frac{p^{2n-1}}{1-p^{2n-1}} = 1 + 4\sum_1^\infty \frac{p^n}{1+q^{2n}}$

3) $\frac{\varepsilon\varkappa}{2\pi} = -\frac{1}{\sqrt{q}}\sum_1^\infty (-1)^n \frac{q^n}{1-q^{2n-1}} = \frac{1}{\sqrt{q}}\sum_1^\infty \frac{q^n}{1+q^{2n-1}}$

4) $\frac{2\varepsilon_1\varkappa}{\pi} = 1 + 4\sum_1^\infty (-1)^n \frac{q^n}{1+q^{2n}}$

$= 1 + 4\sum_1^\infty (-1)^n \frac{q^{2n-1}}{1+q^{2n-1}}$

5) $\frac{\varepsilon_1\varkappa'}{2\pi} = -\frac{1}{\sqrt{p}}\sum_1^\infty (-1)^n \frac{p^n}{1-p^{2n-1}} = \frac{1}{\sqrt{p}}\sum_1^\infty \frac{p^n}{1+p^{2n-1}}$

6) $\frac{4\varkappa^2}{\pi^2} = 1 + 8\sum_1^\infty \frac{n q^n}{1+(-1)^n q^n}$

7) $\frac{\varepsilon\varkappa^2}{\pi^2} = \frac{1}{\sqrt{q}}\sum_1^\infty (2n-1)\frac{q^n}{1-q^{2n-1}}$

8) $\sqrt{2\frac{\varkappa}{\pi}} = 1 + 2\sum_1^\infty q^{2n}$

9) $\sqrt{\frac{\varepsilon\varkappa}{2\pi}} = \sum_1^\infty q^{\left(\frac{2n-1}{2}\right)^2}$

10) $\sqrt{\frac{2\varepsilon'\varkappa}{\pi}} = 1 + 2\sum_1^\infty (-1)^n q^{n^2}$

11) $\log\varepsilon = -8\sum_1^\infty \frac{1}{2n-1}\,\frac{p^{2n-1}}{1-p^{2(2n-1)}}$

12) $log\,\varepsilon = log\,4 + \frac{1}{2}\,log\,q + 4\sum_1^\infty \frac{(-1)^n}{n}\,\frac{q^n}{1+q^n}$

13) $log\,\varkappa = log\,\frac{\pi}{2} + 4\sum_1^\infty \frac{1}{2n-1}\,\frac{q^{2n-1}}{1+q^{2n-1}}$

14) $\frac{2\varkappa}{\pi}\cdot\frac{2E}{\pi} = 1 + 8\sum_1^\infty \frac{q^{2n}}{(1+q^{2n})^2}$

15) $\frac{2\varkappa}{\pi}\left\{\frac{2\varkappa}{\pi} - \frac{2E}{\pi}\right\} = 8\sum_1^\infty \frac{q^{2n-1}}{(1-q^{2n-1})^2}$

16) $\frac{2\varkappa}{\pi}\left\{\frac{2E}{\pi} - \varepsilon_1\,\frac{2\varkappa}{\pi}\right\} = 8\sum_1^\infty \frac{q^{2n-1}}{(1+q^{2n-1})^2}.$

Sehr viele Formeln findet man in Broch: Traité, Cap. X.

§. 135.

q-Producte.

1) $\prod_1^\infty \frac{1-q^n}{1+q^n} = 1 + 2\sum_1^\infty q^{n^2}$

2) $\prod_1^\infty \frac{1-q^{2n+2}}{1-q^{2n+1}} = \sum_0^\infty q^{\frac{n(n+1)}{2}}$

3) $\prod_1^\infty (1-q^{2n+1})^3 = \sum_0^\infty (-1)^n(2n+1)\,q^{\frac{n(n+1)}{2}}$

4) $log\prod_1^\infty \left(\frac{1+q^{2n}}{1+q^{2n+1}}\right)^2 = 2\sum \frac{(-1)^n}{n}\,\frac{q^n}{1+q^n}$

5) $log\prod_1^\infty \left(\frac{1+q^{2n}}{1-q^{2n}}\right)^2 = 2\sum \frac{1}{n}\,\frac{q^n}{1+(-q)^n}$

6) $log\prod_1^\infty \left(\frac{1+q^{2n+1}}{1-q^{2n+1}}\right)^2$

$$= 2\sum \frac{1}{2n-1}\left\{\frac{q^{2n-1}}{1+q^{2n-1}} + \frac{q^{2n-1}}{1-q^{2n-1}}\right\}$$

7) $\varepsilon = 4\sqrt{q}\prod_{1}^{\infty}\left(\frac{1+q^{2n}}{1+q^{2n-1}}\right)^4$

8) $\varepsilon_1 = \prod_{1}^{\infty}\left(\frac{1-q^{2n-1}}{1+q^{2n-1}}\right)^4$

9) $\varkappa = \frac{\pi}{2}\prod_{1}^{\infty}\left(\frac{1+q^{2n-1}}{1+q^{2n}}\right)^2\left(\frac{1-q^{2n}}{1-q^{2n-1}}\right)^2$

10) $\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon} = \prod_{1}^{\infty}\left(\frac{1+q^{\frac{2n-1}{1}}}{1-q^{\frac{2n-1}{2}}}\right)^4$

11) $\frac{1+\varepsilon_1}{1-\varepsilon_1} = \frac{1}{4q}\prod_{1}^{\infty}\left(\frac{1+q^{4n-2}}{1+q^{4n}}\right)^4$

12) $2\sqrt{\varepsilon}\,\frac{\varkappa}{\pi} = 2\sqrt[4]{q}\prod_{1}^{\infty}\left(\frac{1-q^{2n}}{1-q^{2n-1}}\right)^2$

13) $2\sqrt{\varepsilon_1}\,\frac{\varkappa}{\pi} = \prod_{1}^{\infty}\left(\frac{1-q^{2n}}{1+q^{2n}}\right)^2$

14) $\varkappa = \frac{\pi}{2}\prod_{1}^{\infty}(1-q^{2n-1})^4(1-q^{2n})^2.$

§. 136.

Argumenten-Reihen.

NB. Alle folgenden Entwickelungen gelten für $\operatorname{mod} u < \varkappa$.

1) $sn\,u = u - \frac{1+\varepsilon^2}{3!}u^3 + \frac{1+14\varepsilon^2+\varepsilon^4}{5!}u^5 - \frac{1+135\varepsilon^2+135\varepsilon^4+\varepsilon^6}{7!}u^7 + \frac{1+1228\varepsilon^2+5478\varepsilon^4+1228\varepsilon^6+\varepsilon^8}{9!}u^9 - \dots$

2) $cn\,u = 1 - \frac{1}{2!}u^2 + \frac{1+4\varepsilon^2}{4!}u^4 - \frac{1+44\varepsilon^2+16\varepsilon^4}{6!}u^6 + \frac{1+408\varepsilon^2+912\varepsilon^4+64\varepsilon^6}{8!}u^8 - \dots$

$$3)\quad \Delta n u = 1 - \frac{\varepsilon^2}{2!}u^2 + \frac{\varepsilon^2(4+\varepsilon^2)}{4!}u^4 - \frac{\varepsilon^2(16+44\varepsilon^2+\varepsilon^4)}{6!}u^6 + \frac{\varepsilon^2(64+912\varepsilon^2+408\varepsilon^4+\varepsilon^6)}{8!}u^8 - \dots$$

$$4)\quad am\, u = u - \frac{\varepsilon^2}{3!}u^3 + \frac{\varepsilon^2(4+\varepsilon^2)}{5!}u^5 - \frac{\varepsilon^2(16+44\varepsilon^2+\varepsilon^4)}{7!}u^7 + \frac{\varepsilon^2(64+912\varepsilon^2+408\varepsilon^4+\varepsilon^6)}{9!}u^9 - \dots$$

§. 137.

Functionen von Hermite und Weierstrass.

1. Die Hermite'schen Functionen.

$$1)\qquad \varphi(\tau) = \sqrt{2}\sqrt[8]{q}\,\frac{(1+q^2)(1+q^4)(1+q^6)\dots}{(1+q)(1+q^3)(1+q^5)\dots}$$

$$2)\qquad \psi(\tau) = \frac{(1-q)(1-q^3)(1-q^5)\dots}{(1+q)(1+q^3)(1+q^5)\dots}$$

Vide Königsberger, 27. Vorlesung, wo die Theorie ausführlich vorgetragen wird.

2. Die Weierstrass'schen Functionen.

$$1)\qquad sn\,u = \frac{Al(u)_1}{Al(u)_0},\quad cn\,u = \frac{Al(u)_2}{Al(u)_0},\quad \Delta n\,u = \frac{Al(u)_3}{Al(u)_0}$$

$$2)\ Al(u)_0 = \sum_1^\infty (-1)^{n-1} A_n \frac{u^{2n}}{2n!}$$

$$A_1 = 1$$
$$A_2 = 2\varepsilon^2$$
$$A_3 = 8(\varepsilon^2+\varepsilon^4)$$
$$A_4 = 32(\varepsilon^2+\varepsilon^6)+64\varepsilon^4$$
$$A_5 = 128(\varepsilon^2+\varepsilon^8)+480(\varepsilon^4+\varepsilon^6)$$

. . . .

$$3)\ Al(u)_1 = \sum_1^\infty (-1)^n B_n \frac{u^{2n+1}}{2n+1!}$$

$$B_1 = 1 + \varepsilon^2$$
$$B_2 = 1 + \varepsilon^4 + 4\varepsilon^2$$
$$B_3 = 1 + \varepsilon^6 + 9(\varepsilon^4 + \varepsilon^2)$$
$$B_4 = 1 + \varepsilon^8 + 16(\varepsilon^2 + \varepsilon^6) - 6\varepsilon^4$$
$$B_5 = 1 + \varepsilon^{10} + 25(\varepsilon^2 + \varepsilon^8) - 494(\varepsilon^4 + \varepsilon^6)$$

4) $$Al(u)_2 = \sum_1^\infty (-1)^n C_n \frac{u^{2n}}{2n!}$$

$$C_1 = 1$$
$$C_2 = 1 + 2\varepsilon^2$$
$$C_3 = 1 + 6\varepsilon^2 + 8\varepsilon^4$$
$$C_4 = 1 + 12\varepsilon^2 + 60\varepsilon^4 + 32\varepsilon^6$$
$$C_5 = 1 + 20\varepsilon^2 + 348\varepsilon^4 + 448\varepsilon^6 + 128\varepsilon^8$$

5) $$Al(u)_3 = \sum_1^\infty (-1)^n D_n \frac{u^{2n}}{2n!}$$

$$D_1 = \varepsilon^2$$
$$D_2 = 2\varepsilon^2 + \varepsilon^4$$
$$D_3 = 8\varepsilon^2 + 6\varepsilon^4 + \varepsilon^6$$
$$D^4 = 32\varepsilon^2 + 60\varepsilon^4 + 12\varepsilon^6 + \varepsilon^8$$
$$D^5 = 128\varepsilon^2 + 448\varepsilon^4 + 348\varepsilon^6 + 20\varepsilon^8 + \varepsilon^{10}.$$

6) Es gelten die Differentialgleichungen:

$$\frac{\partial^2 A_0}{\partial u^2} + 2\varepsilon^2 u \frac{\partial A_0}{\partial u} + 2\varepsilon(1-\varepsilon^2)\frac{\partial A_0}{\partial \varepsilon} + \varepsilon^2 u^2 A_0 = 0$$
$$\frac{\partial^2 A_1}{\partial u^2} + 2\varepsilon^2 u \frac{\partial A_1}{\partial u} + 2\varepsilon(1-\varepsilon^2)\frac{\partial A_1}{\partial \varepsilon} + (1-\varepsilon^2+\varepsilon^2 u^2) A_1 = 0$$
$$\frac{\partial^2 A_2}{\partial u^2} + 2\varepsilon^2 u \frac{\partial A_2}{\partial u} + 2\varepsilon(1-\varepsilon^2)\frac{\partial A_2}{\partial \varepsilon} + (1+\varepsilon^2 u^2) A_2 = 0$$
$$\frac{\partial^2 A_3}{\partial u^2} + 2\varepsilon^2 u \frac{\partial A_3}{\partial u} + 2\varepsilon(1-\varepsilon^2)\frac{\partial A_3}{\partial \varepsilon} + (\varepsilon^2+\varepsilon^2 u^2) A_3 = 0.$$

Siehe Königsberger: 25. Vorlesung. Weierstrass: Crelle's Journ., Bd. 52, S. 357.

§. 138.

Einige Integrale.

1) $$\int sn\,u\,du = \int \frac{\sin\varphi\,d\varphi}{\sqrt{1-\varepsilon^2 \sin^2\varphi}},$$

Substitution $u = \int\limits_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\Delta\varphi}$, $am\,u = \varphi$

2) $$\int \frac{\sin\varphi\,d\varphi}{\sqrt{1-\varepsilon^2\sin^2\varphi}} = -\frac{1}{\sqrt{1-\varepsilon^2}} \int \frac{dz}{\sqrt{1+\frac{\varepsilon^2}{1-\varepsilon^2} z^2}}.$$

Substitution $\cos\varphi = z$.

In gleicher Weise sind die ähnlichen Integrale zu behandeln.

Man merke insbesondere:

3) $$\int\limits_0^u \Delta n^2 u\,du = E(u)$$

4) $$\int\limits_0^u sn^2 u\,du = \frac{u - E(u)}{\varepsilon^2}$$

5) $$\int\limits_0^u cn^2 u\,du = \frac{-\varepsilon_1^2 u + E(u)}{\varepsilon^2}$$

6) $$\int\limits_0^u tgn^2\,am\,u\,du = \frac{tgn\,am\,u\,\Delta n\,u - E(u)}{\varepsilon_1^2}$$

7) $$\int\limits_0^u \frac{du}{\Delta n^2 u} = -\frac{\varepsilon^2}{\varepsilon_1^2}\frac{sn\,u\,cn\,u}{\Delta n\,u} + \frac{E(u)}{\varepsilon_1^2}$$

8) $$\int\limits_u^K \frac{du}{sn^2 u} = cotg\,am\,u\,\Delta n\,u + K - u + E + E(u)$$

9) $$\int\limits_0^u \frac{du}{cn^2 u} = \frac{tgn\,am\,u\,\Delta n\,u + \varepsilon_1^2 u - E(u)}{\varepsilon_1^2}$$

$$10)\quad \int\limits_{u}^{x} \frac{du}{tgn^2\, am\, u} = cotg\, am\, u\, \Delta n\, u - E + E(u).$$

Ebenso sind zusammengesetzte Beispiele zu behandeln, so wird z. B.

$$11)\quad \int \frac{1+\alpha\, cn\, u}{\beta + \gamma\, cn\, u}\, du = \frac{\alpha}{\gamma}\, u + \left(1 - \frac{\beta}{\gamma}\,\alpha\right)\frac{\beta}{\beta^2 - \gamma^2}\, \Pi\left(\varphi, \frac{\gamma^2}{\beta^2 - \gamma^2}, \varepsilon\right)$$
$$- \frac{\varepsilon}{\gamma}\, M\, arc\, tgn\, N\, \frac{\Delta\varphi}{\sin\varphi},$$

wobei

$$u = \int\limits_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\Delta\varphi}, \quad M = \frac{\gamma^2}{\varepsilon}\, \frac{1}{\sqrt{\beta^2 - \gamma^2}\, \sqrt{\varepsilon_1^2 \gamma^2 + \varepsilon^2 \beta^2}}$$

$$N = \varepsilon\, \frac{\sqrt{\beta^2 - \gamma^2}}{\sqrt{\varepsilon_1^2 \gamma^2 + \varepsilon^2 \beta^2}}, \quad \varepsilon^2 + \varepsilon_1^2 = 1.$$

α, β, γ sind beliebige reelle Zahlen

§. 139.

Kugelfunctionen erster Art.

1) Sei

$$(1 - 2\alpha x + \alpha^2)^{-\frac{1}{2}} = \sum \alpha^n P_n(x),$$

so muss

$$\alpha < 1, \quad -1 \leqq x \leqq +1.$$

Wir setzen auch $x = \cos\omega$.

$$2)\quad 2^n P_n(x) = \sum (-1)^{\gamma}\, \frac{(2\beta + 2\gamma)!}{\beta!\,\gamma!\,(\beta+\gamma)!}\, x^{\beta}, \quad \beta + 2\gamma = n.$$

$$3)\quad \frac{2^n n!\, n!}{2n!}\, P_n(x) = x^n - \frac{n(n-1)}{2.(2n-1)}\, x^{n-2}$$
$$+ \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2.4.(2n-1)(2n-3)}\, x^{n-4} - \ldots$$

$$P_0(x) = 1, \qquad P_3(x) = \frac{5}{2}\, x^3,$$

$$4)\quad P_1(x) = x, \qquad P_4(x) = \frac{5.7}{4.2}\, x^4 - \frac{3.5}{2.4}\, 2x^2 + \frac{1.3}{2.4},$$

$$P_2(x) = \frac{3}{2}\, x^2 - \frac{1}{2}, \quad P_5(x) = \frac{7.9}{2.4}\, x^5 - \frac{5.7}{2.4}\, x^3 + \frac{3.5}{2.4}\, x,$$

5) $P_{2n}(-x) = P_{2n}(x), \quad P_{2n+1}(-x) = -P_{2n+1}(x)$

6) $2^n n!\, P_n(x) = \frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n.$ (Ywory.)

7) $P_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \left\{x - \sqrt{x^2-1}\cos\varphi\right\}^n d\varphi.$ (Laplace.)

8) $$\frac{2.4.6\ldots 2n}{1.3.5\ldots 2n-1} P_n(\cos\omega) = \cos n\omega + \frac{1.n}{1.2n-1}\cos(n-2)\omega + \frac{1.3.n(n-1)}{1.2.(2n-1)(2n-3)}\cos(n-4)\omega + \cdots$$

9) $$P_n(\cos\omega) = \cos^n\frac{\omega}{2} - \binom{n}{1}^2 \cos^{2n-2}\frac{\omega}{2}\sin^2\frac{\omega}{2} + \binom{n}{2}^2\cos^{2n-4}\frac{\omega}{2}\sin^4\frac{\omega}{2} - \cdots$$ (Dirichlet.)

10) $$P_n(\cos\omega) = \frac{2}{\pi}\int_0^\omega \frac{\cos\frac{\varphi}{2}\cos n\varphi}{\sqrt{2(\cos\varphi-\cos\omega)}}\,d\varphi + \frac{2}{\pi}\int_\omega^\pi \frac{\sin\frac{\varphi}{2}\cos n\varphi}{\sqrt{2(\cos\omega-\cos\varphi)}}\,d\varphi$$
$$= -\frac{2}{\pi}\int_0^\omega \frac{\sin\frac{\varphi}{2}\sin n\varphi}{\sqrt{2(\cos\varphi-\cos\omega)}}\,d\varphi + \frac{2}{\pi}\int_\omega^\pi \frac{\cos\frac{\varphi}{2}\sin n\varphi}{\sqrt{2(\cos\omega-\cos\varphi)}}$$

11) $(n+1)P_{n+1}(x) - (2n+1)xP_n(x) + nP_{n-1}(x) = 0.$

12) $(1-x^2)\frac{d^2P_n}{dx^2} - 2x\frac{dP_n}{dx} + n(n+1)P_n = 0$

13) $$\int_{-1}^{+1} P_n(x)\,P_m(x)\,dx = \begin{cases} 0, & m \gtrless n \\ \frac{2}{2n+1}, & m = n \end{cases}$$

14) Sei

$$f(x) = a_0 + a_1 P_1(x) + a_2 P_2(x) + \cdots$$

so wird

$$\int_{-1}^{+1} P_n(x) f(x)\, dx = \frac{2 a_n}{2n+1},$$

also

$$a_n = \frac{2n+1}{2} \int_{-1}^{+1} P_n(x) f(x)\, dx.$$

Einige Beispiele der Entwickelung.

15) $$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi}{2} \Big\{ 1 + 5 \left(\frac{1}{2}\right)^2 P_2(x) + 9 \left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2 P_4(x) + 13 \left(\frac{1.3.5}{2.4.6}\right)^2 P_6(x) + \cdots$$

für $x = 0$ folgt hieraus

16) $$\frac{2}{\pi} = 1 - 5 \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 9 \left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2 - 13 \left(\frac{1.3.5}{2.4.6}\right)^2 + \cdots$$

17) $$\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi}{2} \Big\{ 3 \frac{1}{2} P_1(x) + 7 \left(\frac{1}{2}\right)^2 \frac{3}{4} P_3(x) + 11 \left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2 \frac{5}{6} P_5(x) + \cdots$$

18) $$\frac{2}{\pi} \sqrt{1-x^2} = \frac{1}{2} - 5 \left(\frac{1}{2}\right)^2 \frac{1}{4} P_2(x) - 9 \left(\frac{1}{2.4}\right)^2 \frac{3}{6} P_4(x) - 13 \left(\frac{1.3}{2.4.6}\right)^2 \frac{5}{8} P_6(x) - \cdots$$

Vergl. Crelle, Journ. Bd. 56.

Kugelfunctionen zweiter Art.

19) $$P^n(x) = 2^n \frac{\Gamma(m+n)\, \Gamma(n-m)}{\pi\, \Gamma(2n)} \int_0^\pi \{x + \sqrt{x^2-1} \cos\varphi\}^n \cos m\varphi\, d\varphi$$

20) $(1-x^2)^2 \frac{d^2 P_m^n(x)}{dx^2} - 2x(1-x^2)\frac{d P_m^n(x)}{dx}$

$$+ \{n(n+1) - m^2 - n(n+1)x^2\} P_m^n = 0$$

21) $2^n P_m^n(\cos\omega) = (2 i \sin\omega)^m \Big\{ \cos(n-m)\omega$

$$+ \frac{(n-m)(2m+1)}{1.2n-1}\cos(n-m-2)\omega$$

$$+ \frac{(n-m)(n-m-1)}{1.2}\frac{(2m+1)(2m+3)}{(2n-1)(2n-3)}\cos(n-m-4)\omega + \cdots$$

22) $(n-m+1)P_{m+2}^n(x) + 2(m+1)\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}P_{m+1}^n(x)$

$$-(n+m-1)P_m^n(x) = 0.$$

§. 140.

Kugelfunctionen zweier Variabeln.

1) Sei

$$\cos\gamma = \cos\theta\cos\theta' + \sin\theta\sin\theta'\cos(\varphi-\varphi')$$

und es werde

$$\mu = \cos\theta,\quad \mu' = \cos\theta',$$

ferner

$$\psi = \varphi - \varphi'$$

gesetzt.

2) $\frac{d}{d\mu}\left\{(1-\mu^2)\frac{dY_n}{d\mu}\right\} + \frac{1}{1-\mu^2}\frac{d^2 Y_n}{d\varphi^2} + n(n+1)Y_n = 0.$

Wir beachten Y_n als eine Function, in der θ' und φ' constant sind, die also θ und φ als Variable enthält.

3) $Y_1 = \mu\mu' + (1-\mu^2)^{\frac{1}{2}}(1-\mu'^2)^{\frac{1}{2}}\cos\varphi$

$$Y_2 = \frac{9}{4}\left\{\mu^2 - \frac{1}{3}\right\}\left\{\mu'^2 - \frac{1}{3}\right\}$$

$$+ 3(1-\mu^2)^{\frac{1}{2}}(1-\mu'^2)^{\frac{1}{2}}\mu\mu'\cos\psi + \frac{3}{4}(1-\mu^2)(1-\mu'^2)\cos 2\psi$$

$$Y_3 = \frac{25}{4}\left\{\mu^3 - \frac{3}{5}\mu\right\}\left\{\mu'^3 - \frac{3}{5}\mu'\right\}$$

$$+ \frac{75}{8}\{1-\mu^2\}^{\frac{1}{2}}\{1-\mu'^2\}^{\frac{1}{2}}\left\{\mu^2 - \frac{1}{5}\right\}\left\{\mu'^2 - \frac{1}{5}\right\}\cos\psi$$

$$+ \frac{15}{4}(1-\mu^2)(1-\mu'^2)\mu\mu'\cos 2\psi + \frac{5}{8}(1-\mu^2)^{\frac{3}{2}}(1-\mu'^2)^{\frac{3}{2}}\cos 3\psi$$

4) Sei

$$\tilde{\omega}(m, n, x) = \frac{\overline{n-m!}}{1.3.5\ldots 2n-1} \frac{d^m P_n(x)}{dx^m}$$

$$h_m = 2 \frac{[1.3.5\ldots(2n-1)]^2}{\overline{n-m!}\,\overline{n+m!}} (-1)^m,$$

so wird

$$Y_n = \sum h_x (\mu^2 - 1)^{\frac{x}{2}} (\mu'^2 - 1)^{\frac{x}{2}} \tilde{\omega}(x, n, \mu)\, \tilde{\omega}(x, n, \mu') \cos x \psi$$

5) $$\int_{-1}^{+1} \int_0^{2\pi} Y_n^2 \, d\mu \, d\varphi = \frac{4\pi}{2n+1}$$

$$\int_{-1}^{+1} \int_0^{2\pi} Y_m Y_n \, d\mu \, d\varphi = 0, \quad m \gtrless n.$$

Nach diesen Formeln ergiebt sich die Entwickelung einer Function zweier Variabeln nach Y_n analog der einer nach P_n von selbst

§. 141.

Bessel'sche Functionen.

1) $$\frac{d^2 u}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{du}{dx} + \left(1 - \frac{n^2}{x^2}\right) u = 0$$

2) $$u = C x^n \left\{1 - \frac{x^2}{2.(2n+2)} + \frac{x^4}{2.4.(2n+2)(2n+4)} - \cdots\right.$$

3) Sei n positiv und ganz, so wird

$$J_n(x) = \frac{x^n}{2^n . n!} \left\{1 - \frac{x^2}{2(2n+2)} + \frac{x^4}{2.4.(2n+2)(2n+4)} - \cdots\right.$$

4) $$J_n(x) = \frac{x^n}{2^n \sqrt{\pi}\, \Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right)} \int_0^{\pi} \cos(x \cos\varphi) \sin^{2n} \varphi \, d\varphi$$

5) $$J_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(n\varphi - x \sin\varphi)\, d\varphi.$$

Diese Formel gilt für ein positives ganzes n.

6) $$J_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos n\varphi \cos(x \sin\varphi)\, d\varphi.$$

Ebenso

7) $$n = \frac{1}{2} \quad J_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}$$

8) $$n = \frac{3}{2} \quad J_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \left(\frac{\sin x}{x} - \cos x\right)$$

9) $$\frac{x}{2} \{J_{n-1}(x) + J_{n+1}(x)\} = n J_n(x)$$

10) $$\frac{d J_n(x)}{dx} = \frac{1}{2} \{J_{n-1}(x) - J_{n+1}(x)\}$$

11) $$\frac{d J_0(x)}{dx} = - J_1(x)$$

12) $$\begin{cases} J_{n+1}(x) = \dfrac{n}{x} J_n(x) - \dfrac{d J_n(x)}{dx} \\ J_{n-1}(x) = \dfrac{n}{x} J_n(x) + \dfrac{d J_n(x)}{dx} \end{cases}$$

13) $$\cos(x \sin\varphi) = J_0(x) + 2 J_2(x) \cos 2\varphi + 2 J_4(x) \cos 4\varphi + \cdots$$

14) $$\sin(x \sin\varphi) = 2 J_1(x) \sin\varphi + 2 J_3(x) \sin 3\varphi + 2 J_5(x) \sin 5\varphi + \cdots$$

15) $$\cos(x \cos\varphi) = J_0(x) - 2 J_2(x) \cos 2\varphi + 2 J_4(x) \cos 4\varphi - \cdots$$

16) $$\sin(x \cos\varphi) = 2 J_1(x) \sin\varphi - 2 J_3(x) \sin 3\varphi + 2 J_5(x) \sin 5\varphi - \cdots$$

17) $$\sin x = 2 J_1(x) - 2 J_3(x) + 2 J_5(x) - \cdots$$

18) $$\cos x = J_0(x) - 2 J_2(x) + 2 J_4(x) - \cdots$$

19) $$x \sin x = 2 \{2^2 J_2(x) - 4^2 J_4(x) + 6^2 J_6(x) - \cdots$$

20) $$x \cos x = 2 \{1^2 J_1(x) - 3^2 J_3(x) + 5^2 J_5(x) - \cdots$$

21) $$1 = J_0(x) + 2 \sum_1^{\infty} J_{2n}(x)$$

22) $x^2 = 2 \sum_1^\infty (2n)^2 J_{2n}(x)$

23) $x^4 = 2 \sum_1^\infty (2n)^2 \{(2n)^2 - 2^2\} J_{2n}(x)$

24) $x^6 = 2 \sum_1^\infty (2n)^2 \{(2n)^2 - 2^2\} \{(2n)^2 - 4^2\} J_{2n}(x)$

25) $x = 2 \sum_0^\infty (2n+1) J_{2n+1}(x)$

26) $x^3 = 2 \sum_0^\infty (2n+1) \{(2n+1)^2 - 1^2\} J_{2n+1}(x)$

27) $x^5 = 2 \sum_0^\infty (2n+1) \{(2n+1)^2 - 1^2\} \{(2n+1)^2 - 3^2\} J_{2n+1}(x).$

28) Für sehr grosse x kann folgende Formel benutzt werden:

$$J_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left\{x - \frac{\pi}{4} - n\frac{\pi}{2}\right\} \left\{1 - \frac{(1-4n^2)(3^2-4n^2)}{1.2.(8x)^2} + \cdots\right.$$

$$+ \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin\left\{x - \frac{\pi}{4} - n\frac{\pi}{2}\right\}$$

$$\left\{\frac{1-4n^2}{1.8x} - \frac{(1-4n^2)(3^2-4n^2)(5^2-4n^2)}{1.2.3(8x)^3}\right. .$$

29) Es ist

$$\int_0^a J_n(\varkappa r) J_n(\varkappa' r') r\, dr = 0,$$

wenn für $J_n = \omega_n$

$$\frac{d^2\omega_n}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d\omega_n}{dr} + \left\{\varkappa^2 - \frac{n^2}{r^2}\right\}\omega_n = 0$$

ist und $\varkappa, \varkappa'$ verschiedene Wurzeln von

$$J_n(\varkappa a) = 0$$

sind.

Sei $$J_n(\varkappa a) = J_n(z) = 0,$$

so sind die Wurzeln, nach der Grösse geordnet (diese Gleichung hat keine gleichen Wurzeln)

$$z_n^{(1)},\quad z_n^{(2)},\quad z_n^{(3)}, \ldots$$

und es ist

$$\frac{z_0^{(s)}}{\pi} = s - 0{,}25 + \frac{0{,}050661}{4s-1} - \frac{0{,}053041}{(4s-1)^3} + \frac{0{,}262051}{(4s-1)^5} - \cdots$$

$$\frac{z_1^{(s)}}{\pi} = s + 0{,}25 - \frac{0{,}151982}{4s+1} + \frac{0{,}015399}{(4s+1)^3} - \frac{0{,}245835}{(4s+1)^5} + \cdots$$

Vergl. Stokes, Cambr. Phil. Trans., Vol. IX, ebendaselbst findet sich folgende Tafel:

s	$\frac{z}{\pi}$ für $J_0'(z) = 0$	$\frac{z}{\pi}$ für $J_1(z) = 0$
1	0,7655	1,2197
2	1,7571	2,2330
3	2,7546	3,2383
4	3,7534	4,2411
5	4,7527	5,2428
6	5,7522	6,2439
7	6,7519	7,2448
8	7,7516	8,2454
9	8,7514	9,2459
10	9,7513	10,2463
11	10,7512	11,2466
12	11,7511	12,2469

Die Differenz zweier folgenden Werthe nähert sich immer mehr und mehr der Einheit als Grenze.

Wird $J_0'(z) = 0$, so ist

$$z_1 = 3{,}8317\ldots \qquad z_4 = 13{,}324\ldots$$
$$z_2 = 7{,}015\ldots \qquad z_5 = 16{,}471\ldots$$
$$z_3 = 10{,}174\ldots \qquad z_6 = 19{,}616\ldots$$

Bezüglich der Anwendungen vergleiche: J. W. Strutt-Rayleigh, Theorie des Schalles I, S. 348, Braunschweig; ferner Riemann, Theorie der partiellen Differentialgleichungen, ebendaselbst.

§. 142.

Allgemeine Differentialgleichungen.

1) $\varphi\, dx + \psi\, dy = 0$, ist $\frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{\partial \psi}{\partial x}$ (Integrabilitätsbedingung), so wird

$$\int \varphi\, dx + \int \psi\, dy - \int dy \int \frac{\partial \varphi}{\partial y}\, dx = Const.$$

oder bequemer

$$c = \int_{x_0}^{x} \varphi(x,y)\, dx + \int_{y_0}^{y} \psi(x_0,y)\, dy\,,$$

$$c = \int_{y_0}^{y} \psi(x,y)\, dy + \int_{x_0}^{x} \varphi(x,y_0)\, dx.$$

2) Sei L der integrirende Factor dieser Gleichung, so ist

$$\varphi \frac{\partial L}{\partial y} - \psi \frac{\partial L}{\partial x} + \left\{\frac{\partial \varphi}{\partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial x}\right\} L = 0.$$

3) $\varphi\, dx + \psi\, dy + \chi\, dz = 0$, es muss

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{\partial \psi}{\partial x},\quad \frac{\partial \varphi}{\partial z} = \frac{\partial \chi}{\partial x},\quad \frac{\partial \psi}{\partial z} = \frac{\partial \chi}{\partial y}$$

sein, dann ist

$$c = \int \varphi\, dx + \int \left\{\psi - \int \frac{\partial \varphi}{\partial y}\, dx\right\} dy$$
$$+ \int \left\{\chi - \int \frac{\partial \varphi}{\partial z}\, dx - \int \left(\frac{\partial \psi}{\partial z} - \int \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y\, \partial z}\, dx\right) dy\right\} dz$$

oder

$$c = \int_{x_0}^{x} \varphi(x,y,z)\, dx + \int_{y_0}^{y} \psi(x_0,y,z)\, dy + \int_{z_0}^{z} \chi(x_0,y_0,z)\, dz.$$

4) Ist $z = f(x,y)$, also die Integrabilitätsbedingungen gegeben durch

$$\varphi \left\{\frac{\partial \psi}{\partial z} - \frac{\partial \chi}{\partial y}\right\} + \psi \left\{\frac{\partial \chi}{\partial x} - \frac{\partial \varphi}{\partial z}\right\} + \chi \left\{\frac{\partial \varphi}{\partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial x}\right\} = 0$$

die gegebene Gleichung sei

$$\varphi\, dx + \psi\, dy + \chi\, dz = 0.$$

Wir setzen $dz = 0$ und integriren mittelst des integrirenden Factors L die Gleichung

$$L(\varphi\, dx + \psi\, dy) = 0.$$

Das Integral sei

$$F(x, y, z) + Z(z) = 0,$$

wobei $Z(z)$ die Integrationsconstante ist. Das Integral der vorgelegten Gleichung lautet

$$F(x, y, z) + \int \left(L\chi - \frac{\partial F}{\partial z}\right) dz + C = 0.$$

Vergleiche weiter: Schlömilch, Zeitschr. Bd. XX. Ferner: Catalan, Mém. de Liège, Tom. 13, 1887.

5) Ist die Integrabilitätsbedingung nicht erfüllt, so hat die Gleichung zwei Integrale.

Dann schreibe man (nach Monge):

$$dz + \frac{\psi}{\chi}\, dy + \frac{\varphi}{\chi}\, dx = 0,$$

setze $dx = 0$ und integrire durch den Integrationsfactor L die Gleichung

$$L\left\{dz + \frac{\psi}{\chi}\, dy\right\} = 0,$$

so dass

$$F(x y z) = \chi$$

wird, die Integrationsconstante χ kann auch x enthalten. Das zweite Integral ist gegeben durch

$$\frac{\partial F}{\partial x} - L\frac{\varphi}{\chi} = \frac{d\chi}{dx}.$$

Ueber die allgemeinere Gleichung vergleiche man: Pfaff, Crelle's Journ. Bd. 2. Sodann 17 und 58. Hoffmann's mathem. Wörterbuch Bd. V, S. 500.

6) Es ist

$$\varphi\, dx + \psi\, dy = \frac{1}{2}\{x\varphi + y\psi\}\left\{\frac{dx}{x} + \frac{dy}{y}\right\}$$
$$+ \frac{1}{2}\{x\varphi - y\psi\}\left\{\frac{dx}{x} - \frac{dy}{y}\right\}.$$

§. 143.

Specielle Formen.

1) $\frac{dy}{dx} = \varphi\left(\frac{y}{x}\right), \quad y = xt$

2) $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} + f(x)\varphi\left(\frac{y}{x}\right), \quad y = xt$

3) $\frac{dy}{dx} = y^2\varphi(xy), \quad xy = u$

4) $\frac{dy}{dx} = f\{ax + by\}, \quad ax + by = z$

5) $x + \frac{dy}{dx} = f(x)\varphi(x^2 + y^2), \quad x^2 + y^2 = z^2$

6) $y\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = f\left(x + y\frac{dy}{dx}\right), \quad x^2 + y^2 = 2z$

7) $x + \frac{dy}{dx} = f\left\{\frac{dy}{dx}\right\}; \quad \frac{dy}{dx} = p$ und differentire noch einmal.

8) $(ax^m - by^n)\frac{dy}{y} = (\alpha y^n - \beta x^m)\frac{dx}{x}, \quad x^m = z, \quad y^n = v$

9) $y = x\frac{dy}{dx} + f\left\{\frac{dy}{dx}\right\}, \quad y = xC + f(c)$. (Clairaut).

10) $y - x\frac{dy}{dx} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} f\{\sqrt{x^2 + y^2}\}$

$$x = \varrho\cos\theta, \quad y = \varrho\sin\theta.$$

11) $y - x\frac{dy}{dx} = \sqrt{x^2 + y^2}\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} f\left\{\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right\}$

Dieselbe Substitution.

12) $y + x\varphi\left\{\frac{dy}{dx}\right\} + \psi\left(\frac{dy}{dx}\right) = 0, \quad \frac{dy}{dx} = z$

13) $\frac{dy}{dx} + \varphi y + \psi = 0$

$$y = e^{-\int\varphi}\left\{c - \int\psi e^{\int\varphi}\right\}$$

14) $\frac{dy}{dx} + \varphi y + \psi y^n = 0, \quad y^{1-n} = z$

15) $\{ax + bx^{n+1}y^m\}\frac{dy}{dx} + cy + dx^n y^{m+1} = 0$

$$x^c y^a = z, \quad y^b x^d = v$$

16) $f\left\{x, \frac{d^2y}{dx^2}\right\} = 0, \quad \frac{dy}{dx} = p$

17) $f\left\{y, \frac{d^2y}{dx^2}\right\} = 0, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = y'\frac{dy'}{dy}$

18) $f\left\{\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}\right\} = 0, \quad \frac{dy}{dx} = p$

19) $f\left\{x, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}\right\} = 0, \quad \frac{dy}{dx} = p$

20) $f\left\{y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}\right\} = 0, \quad \frac{dy}{dx} = p, \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dp}{dy}p.$

21) Die Gleichungen

$$f\left\{x, y, \frac{d^2y}{dx^2}\right\} = 0, \quad f\left\{x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}\right\} = 0$$

lassen sich im Allgemeinen nicht vereinfachen.

22) Seien φ und ψ homogene Functionen vom Grade n, und χ eine vom Grade q, so lässt sich die Gleichung

$$\varphi(x,y)dx + \psi(x,y)dy + \chi(x,y)\{xdy - ydx\} = 0$$

für den Fall, dass $q = n - 2$, auf eine lineare bringen, wenn $y = xt$ gesetzt wird.

§. 144.

Construction und Transformation der Differentialgleichungen.

Man kann manchmal eine Differentialgleichung in eine andere überführen, die integrabel wird. Dazu kann man die folgenden Bemerkungen benutzen.

1) Wir bezeichnen immer mit P, Q, R beliebige gegebene Functionen der unabhängigen Variablen.

Sei

$$y = Pe^{\int q}$$

und

$$\frac{d^2P}{dv^2} = -q^2P,$$

so wird

$$\frac{d^2 y}{d v^2} = y \left\{ \frac{d q}{d v} + 2 \frac{q}{P} \frac{d P}{d v} \right\}.$$

2) Sei

$$\eta = \frac{d u}{d t} \cdot \frac{1}{u}$$

$$\vartheta = \frac{d u}{d t} \cdot \frac{1}{u} + \frac{d v}{d t} \cdot \frac{1}{v},$$

so ist identisch

$$\frac{d^2 y}{d t^2} + (\eta + \vartheta) \frac{d y}{d t} + \left\{ \frac{d \eta}{d t} + \eta \vartheta \right\} y = \frac{1}{u v} \frac{d}{d t} \left\{ v \frac{d}{d t} (u y) \right\}.$$

3) Sei

$$\frac{d^2 y}{d x^2} + P \frac{d y}{d x} + Q y = R$$

und

$$z = v \frac{d y}{d x} + y w,$$

wobei v, w, z Functionen von x sind, so wird

$$\frac{d v}{d x} + w = v P$$

$$\frac{d w}{d x} = v Q$$

$$\frac{d z}{d x} = v R$$

und zur Bestimmung von v oder w dienen die Gleichungen:

$$\frac{d^2 v}{d x^2} - P \frac{d w}{d x} + v \left\{ Q - \frac{d P}{d x} \right\} = 0$$

$$\frac{d^2 w}{d x^2} - \left\{ P + \frac{1}{Q} \frac{d Q}{d x} \right\} \frac{d w}{d x} + Q w = 0.$$

4) Sei

$$\frac{d z}{d x} = \varphi_1 z^2 + \varphi_2 z + \varphi_3,$$

so geht diese Gleichung für

$$z = -\frac{1}{\varphi_1} \frac{d \log u}{d x}$$

über in

$$\frac{d^2 u}{d x^2} - \left(\frac{\varphi_1'}{\varphi_1} + \varphi_2 \right) \frac{d u}{d x} + \varphi_1 \varphi_3 u = 0.$$

§. 145.

Zur Berechnung der elliptischen Functionen.

1) Sei

$$q = e^{-\pi \frac{x'}{x}}, \quad \varepsilon = \sin\theta,$$

so wird

$$\log q = 2 \log tgn \frac{\theta}{2} + [9,3979400] + [9,0357243]\, tgn^4 \frac{\theta}{2}$$

$$+ [8,64452]\, tgn^8 \frac{\theta}{2} + [8,41518]\, tgn^{12} \frac{\theta}{2} + \cdots$$

Die Zahlen in [ ] sind gewöhnliche Logarithmen.

Ist θ nahe an $\frac{\pi}{2}$, so rechne man mit $\frac{\pi}{2}$ die Grösse p und beachte, dass

$$\log\log\left(\frac{1}{p}\right) + \log\log\left(\frac{1}{q}\right) = 0,269868367989342\ldots$$

NB. p entsteht aus q durch Vertauschung von ε in ε_1.

Man hat ausserdem:

$$2)\quad \sqrt[4]{q} = \sqrt{\frac{\varepsilon}{4}}\left\{1 + 2\left(\frac{\varepsilon}{4}\right)^2 + 15\left(\frac{\varepsilon}{4}\right)^4 + 150\left(\frac{\varepsilon}{4}\right)^6 + 1707\left(\frac{\varepsilon}{4}\right)^8 + \cdots\right.$$

$$= \sqrt{\frac{\varepsilon}{4}}\left\{1 + 2\frac{\varepsilon^2}{16} + 15\frac{\varepsilon^4}{256} + 150\frac{\varepsilon^6}{4096} + 1707\frac{\varepsilon^8}{65536} + \cdots\right.$$

$$3)\quad \log q = 2\log\frac{\varepsilon}{4} + \frac{1}{2}\varepsilon^2 + \frac{13}{64}\varepsilon^4 + \frac{23}{192}\varepsilon^6 + \frac{2701}{32768}\varepsilon^8 + \cdots$$

4) Sei zur Abkürzung

$$\frac{1}{2}\,\frac{1-\sqrt{\varepsilon_1}}{1+\sqrt{\varepsilon_1}} = \lambda,$$

so wird

$$q = \lambda + 2\lambda^5 + 15\lambda^9 + 150\lambda^{13} + 1707\lambda^{17} + \cdots$$

für $\varepsilon < 0{,}866$ reichen für sieben Decimalen zwei Glieder aus.

5) $\varkappa$ geht in $\varkappa'$ über, wenn ε in ε_1 übergeht.
Es ist

$$\varkappa = \frac{\pi}{2}\{1 + 2q + 2q^4 + 2q^9 + \cdots\}^2$$

$$= \frac{\pi}{2\varepsilon_1}\{1 - 2q + 2q^4 - 2q^9 + \cdots\}^2$$

$$= \frac{\pi}{2}\left\{\frac{2}{1 - \sqrt{\varepsilon_1}}\right\}^2\{q + q^9 + q^{25} + \cdots\}^2$$

$$= \frac{\frac{\pi}{2}\{2 + 4q^{16} + 4q^{64} + \cdots\}^2}{\left\{\frac{1 + \sqrt{\varepsilon_1}}{2} + \sqrt[4]{\frac{(1 + \varepsilon_1)\sqrt{\varepsilon_1}}{2}}\right\}^2}$$

6) Sei

$$\lambda_1 = \frac{1 - \varepsilon_1}{1 + \varepsilon_1}, \quad \lambda_2 = \frac{1 - \sqrt{\varepsilon_1}}{1 + \sqrt{\varepsilon_1}},$$

so wird

$$\varkappa = \frac{\pi}{1 + \varepsilon_1}\left\{1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \lambda_1^2 + \left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2 \lambda_1^4 + \left(\frac{1.3.5}{2.4.6}\right)^2 \lambda_1^6 + \cdots\right.$$

$$= \frac{2\pi}{(1 + \sqrt{\varepsilon_1})^2}\left\{1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \lambda_1^4 + \left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2 \lambda_2^8 + \cdots\right.$$

$$\varkappa' = \left\{1 + \frac{1}{4}\varepsilon^2 + \frac{9}{64}\varepsilon^4 + \frac{25}{256}\varepsilon^6 + \frac{1225}{16384}\varepsilon^8 + \cdots\right\} \log\frac{4}{\varkappa}$$

$$+ \frac{1}{4}\varepsilon^2\left\{1 + \frac{11}{32}\varepsilon^2 + \frac{185}{384}\varepsilon^4 + \frac{18655}{49152}\varepsilon^6 + \cdots\right\}$$

7) $\varkappa' = \frac{\varkappa}{\pi}\log\left(\frac{1}{q}\right) = \frac{\varkappa}{\pi}\,\frac{\log vul\left(\frac{1}{q}\right)}{\log vul\, e}.$

Für die praktische Berechnung dienen folgende Formeln:

1) Winkel des Moduls $< 0^0\ 1'\ 30''$, also der Modul $< 0{,}0004\ldots$

$$q = \left(\frac{\varepsilon}{4}\right)^2, \quad Log\frac{1}{q} = 2\, Log\frac{4}{\varepsilon},$$

$$Log\left(\frac{1}{p}\right) = \frac{(\pi\, Log\, e)}{2\, Log\left(\frac{4}{\varepsilon}\right)}, \quad Log = log\, vulg.$$

$$\varkappa = \frac{\pi}{2}(1 + 2q)^2 = \frac{\pi}{2}(1 + 4q) = \frac{\pi}{2}\left(1 + \frac{1}{4}\varepsilon^2\right)$$

$$\varkappa' = \frac{Log\frac{1}{q}}{2\, Log\, e} = \frac{Log\frac{4}{\varepsilon}}{Log\, e}.$$

2) Winkel des Moduls $< 1^0\, 30'$, also der Modul $< 0{,}025\ldots$

$$q = \frac{\varepsilon^2}{16}\left(1 + \frac{1}{2}\,\varepsilon^2\right) = \frac{\varepsilon^2}{16} + \frac{\varepsilon^4}{32}$$

$$Log\left(\frac{1}{q}\right) = 2\,Log\left(\frac{4}{\varepsilon}\right) - \frac{1}{2}\,\varepsilon^2\,Log\,e$$

$$Log\left(\frac{1}{p}\right) = \frac{(\pi\,Log\,e)^2}{Log\,\frac{1}{q}} = \frac{(\pi\,Log\,e)^2}{2\,Log\left(\frac{4}{\varepsilon}\right)}\left\{1 + \frac{1}{4}\,\varepsilon^2\,\frac{Log\,e}{Log\left(\frac{4}{\varepsilon}\right)}\right\}$$

$$\varkappa = \frac{\pi}{2}\,(1 + 2\,q)^2 = \frac{\pi}{2}\,(1 + 4\,q) = \frac{\pi}{2}\left(1 + \frac{1}{4}\,\varepsilon^2\right)$$

$$\varkappa' = \frac{1}{2}\,\frac{Log\,\frac{1}{q}}{Log\,e}\,(1 + 4\,q) = \left\{\frac{Log\,\frac{4}{\varepsilon}}{Log\,e} - \frac{1}{4}\,\varepsilon^2\right\}\left\{1 + \frac{1}{4}\,\varepsilon^2\right\}$$

3) Modularwinkel $< 18^0$.

Setze

$$\varepsilon_2 = \frac{1 - \varepsilon_1}{1 + \varepsilon_1},\quad \varkappa_2 = \varkappa\,\frac{1 + \varepsilon_1}{2}$$

$$\varepsilon_n = \sin\alpha_n$$

$$\varepsilon_2 = \sin\alpha_2 = \frac{1 - \cos\alpha}{1 + \cos\alpha} = tgn^2\,\frac{1}{2}\,\alpha$$

$$\varkappa_2 = \varkappa\,\frac{1 + \cos\alpha}{2} = \varkappa\cos^2\frac{1}{2}\,\alpha.$$

Man findet

$$q = \frac{1}{4}\,\varepsilon_2\left\{1 + \frac{1}{4}\,\varepsilon_2^2\right\} = \frac{1}{4}\,tgn^2\,\frac{\alpha}{2}\left\{1 + \frac{1}{4}\,tgn^4\,\frac{\alpha}{2}\right\}$$

$$Log\,q = 2\,Log\,tgn\,\frac{1}{2}\,\alpha - Log\,4 + \frac{1}{4}\,Log\,e\,.\,tgn^4\,\frac{\alpha}{2}$$

$$\varkappa = \frac{\varkappa_2}{\cos^2\frac{\alpha}{2}} = \frac{\frac{\pi}{2}\left(1 + \frac{1}{4}\,\varepsilon_2^2\right)}{\cos^2\frac{\alpha}{2}} = \frac{\pi}{2}\,\frac{1 + \frac{1}{4}\,tgn^4\,\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}$$

$$Log\,\varkappa = Log\,\frac{\pi}{2} - 2\,Log\cos\frac{\alpha}{2} + \frac{1}{4}\,Log\,e\,.\,tgn^4\,\frac{\alpha}{2}.$$

4) Modularwinkel $< 18^0 < 45^0$. Wiederhole dieselbe Transformation

$$\sin\alpha_2 = tgn^2\,\frac{\alpha}{2},\quad \sin\alpha_4 = tgn^2\,\frac{\alpha_2}{2}$$

$$q = \sqrt{\frac{1}{2} tgn \frac{1}{2} \alpha_4}$$

$$Log\, q = \frac{1}{2} Log\, tgn \frac{1}{2} \alpha_4 - \frac{1}{2} Log\, 2$$

$$\varkappa = \frac{\frac{\pi}{2}}{\cos^2 \frac{\alpha}{2} \cos^2 \frac{\alpha_2}{2} \cos^2 \frac{\alpha_4}{2}}$$

$$Log\, \varkappa = Log \frac{\pi}{2} - 2 \left\{ Log \cos \frac{\alpha}{2} + Log \cos \frac{\alpha_2}{2} + Log \cos \frac{\alpha_4}{2} \right\}.$$

Oder setze

$$\cos \beta = \sqrt{\cos \alpha}, \quad \sin \alpha = \varepsilon,$$

so wird

$$q = \frac{1}{2} tgn^2 \frac{\beta}{2} \left(1 + \frac{1}{8} tgn^8 \frac{\beta}{2}\right)$$

$$Log\, q = 2\, Log\, tgn \frac{\beta}{2} - Log\, 2 + \frac{1}{8} Log\, e \,.\, tgn^8 \frac{\beta}{2}$$

$$\varkappa = \frac{\pi}{2} \frac{1 + \frac{1}{4} tgn^8 \frac{\beta}{2}}{\cos^4 \frac{\beta}{2}}$$

$$Log\, \varkappa = Log \frac{\pi}{2} - 4\, Log \cos \frac{\beta}{2} + \frac{1}{4} Log\, e \,.\, tgn^8 \frac{\beta}{2}$$

5) Modularwinkel > 45. Man substituire den Winkel des complementären Moduls ε_1 und rechne p, $\varkappa'$ nach den obigen Formeln und beachte

$$Log \frac{1}{p} = \frac{(\pi\, Log\, e)^2}{Log \left(\frac{1}{q}\right)}, \quad \varkappa' = \frac{\varkappa}{\pi} \frac{Log \left(\frac{1}{q}\right)}{Log\, e}.$$

Vergl. Broch: Traité élémentaire des fonct. elliptiques, p. 218. Daselbst viele Beispiele.

Literatur.

A. Functionentheorie.

Puiseux, V.: Untersuchungen über alg. Functionen, h. v. Fischer. Halle 1861.

Clebsch und Gordan: Theorie der Abel'schen Functionen. Leipzig 1866.

Durège: Elemente der Theorie der Functionen einer compl. veränderlichen Grösse. III. Aufl., 1882. Leipzig.

Neumann: Vorlesungen über Riemann's Theorie der Abel'schen Integrale. II. Aufl., 1884. Leipzig.

Biermann: Theorie der analytischen Functionen. Leipzig 1887.

B. Theorie der elliptischen Functionen.

1825. Legendre: Traité des fonctions ellipt. Paris.

1829. Jacobi: Fundamenta nova theoriae funct. ellipticarum. Regiom.

1830. Hill, C. J.: Introductio in elementa funct. ellipt. 3 ps., Lund. 4.

1841. Verhoust, P. F.: Traité élém. des fonct. ellipt. Bruxelles.

1859. Briot und Bouquet: Theorie des fonct. doublement périodiques et en partic. des fonct. elliptiques. Paris. D. v. Fischer. Halle 1862. (II. Ed. 1873.)

1862—63. Hermite, C.: Theorie des fonctions ellipt. Paris 1862.

Natani: Uebersicht der Theorie der ellipt. Funct. nach Hermite. Berlin 1863.

1864. Schellbach, K. H.: Die Lehre von den elliptischen Integralen und Thetafunctionen. Berlin.

1867. Broch, O. J.: Traité élémentaire des fonctions ellipt. Christiania.

1874. Königsberger: Vorlesungen über die Theorie der elliptischen Functionen. Leipzig.

1876. Cayley, A., an elem. treatise on ellipt. fonction. Cambr.

— trattato elem. delle funzione ellit. trad. e accresciut. da F. Brioschi. Milano, 1880.

1876. Enneper, A., Elliptische Functionen: Theorie und Geschichte. Halle. Literatur fast vollständig angegeben.

1878. Durège, H., Theorie der elliptischen Functionen, (III. Aufl.). Leipzig.

1879. Schlömilch, Vorlesungen über einzelne Theile der höheren Analysis, (III. Aufl.) (des Comp. II. Bd.).

1881. Weierstrass, Formeln und Lehrsätze zum Gebrauche der elliptischen Functionen, her. v. H. A. Schwarz. Göttingen.

1884. Rausenberger, Lehrbuch der periodischen Functionen einer Variabelen. Leipzig.

— Robert, Einleitung in die Theorie der elliptischen Functionen.

C. Kugelfunctionen, Bessel'sche Functionen etc.

Heine, Handbuch der Kugelfunctionen. Berlin 1861, II. Aufl., 1878 bis 1881.

Todhunter, J., An elementary treat. on Laplace's fonctions. Lamé's fonct. and Bessel's fonct. 1875.

Lamé, G., Leçons sur les fonc. inverses etc. Paris 1857.

— Leçons sur les coordon. curvilignes. Paris 1859.

Lommel, E., Studien über Bessel'sche Functionen. Leipzig 1868.

Neumann, C., Theorie der Bessel'schen Functionen. Leipzig 1867.

— Ueber die nach Kreiskugel und Cylinderfunctionen fortschreitenden Entwickelungen. Leipzig 1881.

Neumann, F., Beiträge zur Theorie der Kugelfunctionen, 1878. Zwei Abtheilungen. Leipzig.

§. 145.

Tafel I.

α	$Log\left(\frac{1}{q}\right)$	$Log\left(\frac{1}{p}\right)$	q	p	x	x'
0°	∞	0,00000	0,0000000	1,00000	1,5707963	∞
1°	4,72034	0,39436	0,0000190	0,40331	1,5709160	5,434908
2°	4,11822	0,45202	0,0000762	0,35317	1,5712750	4,7427173
3°	3,76592	0,49431	0,0001714	0,32040	1,5718736	4,3386540
4°	3,51589	0,52946	0,0003049	0,39549	1,5727124	4,0527582
5°	3,32187	0,56038	0,0004766	0,27518	1,5737921	3,8317420
6°	3,16327	0,58848	0,0006866	0,25794	1,5751136	3,6518560
7°	3,02909	0,61455	0,0009352	0,24291	1,5766780	3,5004225
8°	2,91277	0,63909	0,0012225	0,22957	1,5784866	3,3698680
9°	2,81009	0,66244	0,0015485	0,21755	1,5805409	3,2253029
10°	2,71815	0,68485	0,0019136	0,20661	1,5828428	3,1533853
11°	2,63490	0,70649	0,0023179	0,196567	1,5853942	3,0617286
12°	2,55881	0,72750	0,0027618	0,187284	1,5881972	2,9785690
13°	2,48872	0,74798	0,0032455	0,178657	1,5912544	2,9025649
14°	2,42375	0,76804	0,0037692	0,170594	1,5945683	2,8326726
15°	2,36317	0,78772	0,0043334	0,163034	1,5981420	2,7680631
16°	2,30641	0,80711	0,0049384	0,155916	1,6019785	2,7080676
17°	2,25301	0,82624	0,0055846	0,149197	1,6060813	2,6521380
18°	2,20257	0,84516	0,0062723	0,142837	1,6104542	2,5998197
19°	2,15476	0,86391	0,0070023	0,136801	1,6151009	2,5507314
20°	2,10932	0,88252	0,0077746	0,131063	1,6200259	2,5045501
21°	2,06600	0,90103	0,0085901	0,125594	1,6252337	2,4609995
22°	2,02460	0,91945	0,0094493	0,120379	1,6307291	2,4198417
23°	1,98495	0,93782	0,0103526	0,115393	1,6363174	2,3808702
24°	1,94689	0,95615	0,0113008	0,110624	1,6426041	2,3439047
25°	1,91029	0,97447	0,0122945	0,106055	1,6489952	2,3087868
26°	1,87502	0,99280	0,0133346	0,101672	1,6556969	2,2753764
27°	1,84099	1,01115	0,0144215	0,097465	1,6627160	2,2435493
28°	1,80810	1,02955	0,015556	0,093422	1,6700594	2,2131947
29°	1,77626	1,04800	0,016739	0,089537	1,6777349	2,1842132
30°	1,74539	1,06653	0,017973	0,085797	1,6857504	2,1565156
31°	1,71544	1,08516	0,019256	0,082194	1,6941144	2,1300214
32°	1,68633	1,10389	0,020591	0,078725	1,7028359	2,1046577
33°	1,65801	1,12274	0,021978	0,075381	1,7119247	2,0803582
34°	1,63043	1,14174	0,023419	0,072154	1,7213908	2,0570623
35°	1,60354	1,16088	0,024915	0,069043	1,7312452	2,0347153
36°	1,57729	1,18021	0,026467	0,066037	1,7414992	2,0132666
37°	1,55165	1,19970	0,028077	0,063139	1,7521652	2,9926698
38°	1,52658	1,21941	0,029745	0,060338	1,7632562	1,9728823
39°	1,50204	1,23932	0,031475	0,057634	1,7747859	1,9538648
40°	1,47801	1,25948	0,033265	0,055020	1,7867691	1,9355811
41°	1,45445	1,27989	0,035120	0,052494	1,7992215	1,9179975
42°	1,43133	1,30056	0,037040	0,050054	1,8121599	1,9010830
43°	1,40863	1,32152	0,039027	0,047696	1,8256019	1,8848087
44°	1,38632	1,34273	0,041085	0,045417	1,8395667	1,8691475
45°	1,36438	1,36438	0,043214	0,043214	1,8540747	1,8540747

Tafel II.

$$\int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \varepsilon^2 \sin^2 \varphi}}, \quad \varepsilon = \sin \alpha.$$

φ	α								
	0°	10°	15°	30°	45°	60°	75°	80°	90°
1°	0,01745	0,01745	0,01745	0,01745	0,01745	0,01745	0,01745	0,01745	0,01745
2°	03491	03491	03491	03491	03491	03491	03491	03491	03491
3°	05236	05236	05236	05237	05237	05238	05238	05238	05238
4°	06981	06981	06982	06983	06984	06986	06987	06987	06987
5°	08777	08727	08727	08729	08732	08735	08737	08737	08738
10°	17453	17456	17459	17475	17498	17520	17537	17540	17543
15°	26180	26189	26199	26254	26330	26406	26463	26475	26484
20°	34907	34927	34953	35082	35262	35447	35586	35615	35638
25°	43633	43674	43723	43973	44328	44699	44982	45040	45088
30°	52360	52429	52513	52943	53562	54223	54736	54843	54931
35°	61087	61193	61325	62003	62998	64085	64950	65132	65284
40°	69813	69969	70162	71165	72667	74358	75745	76043	76291
45°	78540	78756	79025	80437	82602	85122	87270	87741	88137
50°	87266	87556	87915	89825	92829	96465	99711	1,00444	1,01068
55°	95993	96366	96832	99331	1,03371	1,08479	1,13307	14442	15423
60°	1,04720	1,05188	1,05774	1,08955	14243	21254	28371	30135	31696
65°	13446	14020	14740	18691	25447	34893	45316	48098	50645
70°	22173	22861	23727	28530	36972	49441	64684	69181	73542
75°	30900	31710	32733	38457	48788	64918	87145	94682	2,02759
80°	39626	40564	41752	48455	60848	81253	2,13390	2,26527	43625
85°	48353	49423	50781	58503	73082	98264	43658	66935	3,13130
86°	50098	51195	52587	60516	75542	2,01723	50129	76116	35467
87°	51844	52968	54894	62530	78006	05194	56703	85612	64253
88°	53589	54740	56200	64545	80472	08674	63357	95366	4,04813
89°	55334	56512	58007	66560	82939	12161	70068	3,05304	74135
90°	1,57080	1,58284	1,59814	1,68575	1,85407	2,15652	2,76806	3,15338	∞

Ausführlichere Tafeln findet man in:

Legendre, Traité II. Bd. Exercises III. Bd.
Meissel, Sammlung mathem. Tafeln. Iserlohn 1860.
Gronau, Tafeln für die trig. Functionen der cyklischen und hyp. Sectoren. Danzig 1863.
Hoüel, Recueil de formules et de tables num. Paris 1866.
Schmidt, J. G., System elliptischer Bogen. Berlin 1842.

Tafel III.

$$\int_0^{\varphi} d\varphi \sqrt{1 - \varepsilon^2 \sin^2 \varphi}, \quad \varepsilon = \sin \alpha.$$

φ	α								
	0°	10°	15°	30°	45°	60°	75°	80°	90°
1°	0,01745	0,01745	0,01745	0,01745	0,01745	0,01745	0,01745	0,01745	0,01745
2°	03491	03491	03491	03490	03490	03490	03490	03490	03490
3°	05236	05236	05236	05235	05235	05234	05234	05234	05234
4°	06981	06981	06981	06980	06978	06977	06976	06976	06976
5°	08727	08726	08726	08724	08721	08718	08716	08716	07816
10°	17453	17451	17447	17431	17409	17387	17371	17367	17365
15°	26180	26171	26160	26106	26032	25957	25902	25891	25882
20°	34907	34886	34860	34733	34558	34381	34250	34224	34202
25°	43633	43593	43544	43298	42958	42612	42356	42304	42262
30°	52360	52292	52208	51788	51205	50609	50165	50074	50000
35°	61087	60980	60850	60194	59276	58332	57622	57477	57358
40°	69813	69658	69467	68506	67153	65746	64679	64459	64279
45°	78540	78324	78059	76720	74819	72822	71289	70972	70711
50°	87266	86979	86626	84832	82265	79538	77414	76971	76604
55°	95993	95622	95166	92843	89490	85879	83020	82417	81915
60°	1,04720	1,04255	1,03683	1,00756	96495	91839	88080	87276	86603
65°	13446	12878	12176	08577	1,03293	97427	92580	91523	90631
70°	22173	21491	20650	16318	09901	1,02664	96519	95144	93969
75°	30900	30097	29107	23989	16346	07586	99916	98141	96593
80°	39626	38698	37550	31606	22661	12249	1,02823	1,00543	98481
85°	48353	47294	45985	39186	28886	16726	05343	02436	99619
86°	50098	49013	47671	40699	30124	17606	05813	02768	99756
87°	51844	50732	49357	42211	31360	18484	06277	03089	99863
88°	53589	52451	51043	43723	32596	19359	06735	03401	99939
89°	55334	54170	52729	45235	33830	20233	07188	03708	99985
90°	57080	55889	54415	46746	1,35064	1,21106	07641	04011	1,00000

Goniometrie.

§. 146.

Sinus.

1) $$\mathbf{Sin}\, a = \frac{1}{2}\, chord\, 2a = 1 - cos\, vers\, a = \frac{1}{2i}\{e^{ai} - e^{-ai}\}$$

$$= \sqrt{1 - cos^2 a} = \sqrt{\frac{1 - cos\, 2a}{2}} = 2\sqrt{cos^2 \frac{a}{2} - cos^4 \frac{a}{2}}$$

$$= \frac{tgn\, a}{\sqrt{1 + tgn^2 a}} = \frac{2\, tgn\, \frac{a}{2}}{1 + tgn^2 \frac{a}{2}} = \frac{1 - tgn^2\left(45^0 - \frac{1}{2}a\right)}{1 + tgn^2\left(45^0 - \frac{1}{2}a\right)}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1 + cotg^2 a}} = \frac{1}{cotg\, \frac{a}{2} - cotg\, a} = \frac{1}{tgn\, \frac{a}{2} + cotg\, a}$$

$$= cotg\, \frac{a}{2} \cdot (1 - cos\, a) = tgn\, \frac{a}{2} \cdot (1 + cos\, a)$$

$$= cos\, a\; tgn\, a = \frac{cos\, a}{cotg\, a} = \frac{tgn\, a}{sec\, a} = \frac{1}{cosec\, a}$$

$$= \sqrt{\frac{sec^2 a - 1}{sec\, a}} = \sqrt{\frac{sec^2 a - 1}{1 + tgn^2 a}}$$

$$= 2\, sin\, \frac{a}{2}\, cos\, \frac{a}{2} = 1 - 2\, sin^2\left(45^0 - \frac{a}{2}\right)$$

$$= 2\, sin^2\left(45^0 + \frac{a}{2}\right) - 1$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}}\{sin\, (30^0 + a) - sin\, (30^0 - a)\} = sin\, (60^0 + a) - sin\, (60^0 - a)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\{cos\, (a - 45^0) + sin\, (a - 45^0)\} = \frac{\sqrt{3}}{2}\, cos\, (a - 60^0) - \frac{1}{2}\, sin\, (a - 60^0)$$

$$= 1 - 2\,sin\,\frac{45^0 - a}{2}\,cos\,\frac{45^0 + a}{2}$$

$$= 2\,sin\,\frac{45^0 + a}{2}\,cos\,\frac{45^0 - a}{2} - 1$$

$$= \left(sin\,\frac{a}{2} + cos\,\frac{a}{2}\right)^2 - 1 = 1 - \left(sin\,\frac{a}{2} - cos\,\frac{a}{2}\right)^2$$

$$= \frac{1}{2}\left\{\left(sin\,\frac{a}{2} + cos\,\frac{a}{2}\right)^2 - \left(sin\,\frac{a}{2} - cos\,\frac{a}{2}\right)^2\right\}$$

$$= \frac{\left(1 + tgn\,\frac{a}{2}\right)\left(1 + cotg\,\frac{a}{2}\right)}{tgn\,\frac{a}{2} + cotg\,\frac{a}{2}} - 1$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{2 - \sqrt{2 + 2\,cos\,4\,a}}$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + 2\,cos\,8\,a}}}$$

$$= sin\,a\,cos\,(b - a) + cos\,a\,sin\,(b - a)$$

$$= sin\,(b + a)\,cos\,b - cos\,(b + a)\,sin\,b$$

2) $sin\,(30^0 \pm a) = \frac{1}{2}\,cos\,a \pm \frac{1}{2}\sqrt{3}\,sin\,a$

3) $sin\,(45^0 \pm a) = \frac{1}{2}\sqrt{2}\,[cos\,a \pm sin\,a]$

4) $sin\,(60^0 \pm a) = \frac{1}{2}\sqrt{3}\,cos\,a \pm \frac{1}{2}\,sin\,a$

5) $sin\,90^0 = 1$

$sin\,45^0 = \frac{1}{2}\sqrt{2}$

$sin\,30^0 = \frac{1}{2}$

$sin\,60^0 = \frac{1}{2}\sqrt{3}$

$sin\,75^0 \sim sin\,15^0 = \frac{1}{4}\{\sqrt{6} \pm \sqrt{2}\}$

$sin\,54^0 \sim sin\,18^0 = \frac{1}{4}\{\sqrt{5} \pm 1\}$

$$sin\, 72^0 \sim sin\, 36^0 = \frac{1}{4}\sqrt{10 \pm 2\sqrt{5}}$$

$$sin\, 63^0 \sim sin\, 27^0 = \frac{1}{4}\left\{\sqrt{5+\sqrt{5}} \pm \sqrt{3-\sqrt{5}}\right\}$$

$$sin\, 81^0 \sim sin\ \ 9^0 = \frac{1}{4}\left\{\sqrt{3+\sqrt{5}} \pm \sqrt{5-\sqrt{5}}\right\}$$

$$sin\, 66^0 \sim sin\ \ 6^0 = \frac{1}{8}\left\{\sqrt{30-6\sqrt{5}} \pm \sqrt{6+2\sqrt{5}}\right\}$$

$$sin\, 78^0 \sim sin\, 42^0 = \frac{1}{8}\left\{\sqrt{30+6\sqrt{5}} \pm \sqrt{6-2\sqrt{5}}\right\}$$

$$sin\, 84^0 \sim sin\, 24^0 = \frac{1}{8}\left\{\sqrt{18+6\sqrt{5}} \pm \sqrt{10-2\sqrt{5}}\right\}$$

$$sin\, 48^0 \sim sin\, 12^0 = \frac{1}{8}\left\{\sqrt{10+2\sqrt{5}} \pm \sqrt{18-6\sqrt{5}}\right\}$$

$$sin\, 69^0 \sim sin\, 51^0 = \frac{1}{8}\left\{\sqrt{9+3\sqrt{5}} \pm \sqrt{15-3\sqrt{5}}\right\} \pm \frac{1}{8}\left\{\sqrt{3+\sqrt{5}} - \sqrt{5-\sqrt{5}}\right\}$$

$$sin\, 39^0 \sim sin\, 21^0 = \frac{1}{8}\left\{\sqrt{3+\sqrt{5}} + \sqrt{5-\sqrt{5}}\right\} \pm \frac{1}{8}\left\{\sqrt{9+3\sqrt{5}} - \sqrt{15-3\sqrt{5}}\right\}$$

$$sin\, 57^0 \sim sin\, 33^0 = \frac{1}{8}\left\{\sqrt{15+3\sqrt{5}} + \sqrt{3-\sqrt{5}}\right\} \pm \frac{1}{8}\left\{\sqrt{5+\sqrt{5}} - \sqrt{9-3\sqrt{5}}\right\}$$

$$sin\, 87^0 \sim sin\ \ 3^0 = \frac{1}{8}\left\{\sqrt{5+\sqrt{5}} + \sqrt{9-3\sqrt{5}}\right\} \pm \frac{1}{8}\left\{\sqrt{15+3\sqrt{5}} - \sqrt{3-\sqrt{5}}\right\}.$$

NB. Ist $a \sim b$, so gilt das obere Zeichen für a, das untere dagegen für b.

6) Die Werthe für die einzelnen Grade liefert die cubische Gleichung

$$sin^3 a - \frac{3}{4}\, sin\, a = -\frac{1}{4}\, sin\, 3\, a,$$

da die Sinuswerthe kraft der obigen Tafel bekannt sind. Man erhält

$$\sin a = \sqrt[3]{\frac{1}{2} \sin 3a + \sqrt{\frac{1}{4} \sin^2 3a + \frac{1}{4^3}}}$$
$$+ \sqrt[3]{\frac{1}{2} \sin 3a - \sqrt{\frac{1}{4} \sin^3 3a + \frac{1}{4^3}}}$$

7) $\sin(-a) = -\sin a$

8) $\sin \frac{\pi}{2} = +1$ 9) $\sin 4n \frac{\pi}{2} = 0$

$\sin 2 \frac{\pi}{2} = 0$ $\sin (4n + 1) \frac{\pi}{2} = +1$

$\sin 3 \frac{\pi}{2} = -1$ $\sin (4n + 2) \frac{\pi}{2} = 0$

$\sin 4 \frac{\pi}{2} = 0$ $\sin (4n + 3) \frac{\pi}{2} = -1$

10) $\sin\left(\frac{\pi}{2} \pm a\right) = \cos a$

$\sin\left(2 \frac{\pi}{2} \pm a\right) = \mp \sin a$

$\sin\left(3 \frac{\pi}{2} \pm a\right) = -\cos a$

$\sin\left(4 \frac{\pi}{2} \pm a\right) = \pm \sin a$

11) $\sin\left[(4n + 1) \frac{\pi}{2} \pm a\right] = \cos a$

$\sin\left[(4n + 2) \frac{\pi}{2} \pm a\right] = \mp \sin a$

$\sin\left[(4n + 3) \frac{\pi}{2} \pm a\right] = -\cos a$

$\sin\left[(4n + 4) \frac{\pi}{2} \pm a\right] = \pm \sin a.$

12) Wir setzen:

$$\sin \varphi = y, \quad \cos \varphi = x, \quad 2 \cos \varphi = z,$$

sodann wird:

$$\begin{aligned}
\sin \varphi &= y &&= y\\
\sin 2\varphi &= 2xy &&= zy\\
\sin 3\varphi &= 4x^2y - y &&= (z^2-1)y\\
\sin 4\varphi &= 8x^3y - 4xy &&= (z^3-2z)y\\
\sin 5\varphi &= 16x^4y - 12x^2y + y &&= (z^4-3z^2+1)y\\
\sin 6\varphi &= 32x^5y - 32x^3y + 6xy &&= (z^5-4z^3+3z)x\\
\sin 7\varphi &= 64x^6y - 80x^4y + 24x^2y - y &&= (z^6-5z^4+6z^2-1)y
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sin \varphi &= y\\
\sin 3\varphi &= 3y - 4y^3\\
\sin 5\varphi &= 5y - 20y^3 + 16y^5\\
\sin 7\varphi &= 7y - 56y^3 + 112y^5 - 64y^7\\
\sin 9\varphi &= 9y - 120y^3 + 432y^5 - 576y^7 + 256y^9.
\end{aligned}$$

13) Für ein gerades n hat man:

$$\sin n\varphi = x\left\{ny - \frac{n(n^2-2^2)}{2.3}y^3 + \frac{n(n^2-2^2)(n^2-4^2)}{2.3.4.5}y^5 - \cdots\right.$$

dagegen für ein ungerades:

$$\sin n\varphi = \left\{ny - \frac{n(n^2-1^2)}{2.3}y^3 + \frac{n(n^2-1^2)(n^2-3^2)}{2.3.4}y^5 - \cdots\right.$$

Man hat ferner:

14) $$\sin n\varphi = y\left\{z^{n-1} - \frac{n-2}{1!}z^{n-3} + \frac{(n-3)(n-4)}{2!}z^{n-5} - \frac{(n-4)(n-5)(n-6)}{3!}z^{n-7} + \cdots\right.$$

$$\sin n\varphi = nyx^{n-1} - \binom{n}{3}y^3x^{n-3} + \binom{n}{5}y^5x^{n-5} - \cdots$$

In allen diesen vier Formeln ist n eine positive ganze Zahl.

15) $\sin\{a+nb\} = 2\cos b \sin\left[a+\overline{n-1}\,b\right] - \sin\left[a+\overline{n-2}\,b\right]$

16) $$\sum_0^n \sin\{a+nb\} = \frac{\sin\left[a+\frac{1}{2}nb\right]\sin\frac{1}{2}(n+1)b}{\sin\frac{b}{2}}$$

17) $$\sin n\varphi = \frac{1}{2i}\{(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n - (\cos\varphi - i\sin\varphi)^n\}$$

18) $$\sin(a \pm b) = \sin a \cos b \pm \cos a \sin b$$
$$= \cos a \cos b \{tgn\, a \pm tgn\, b\}$$
$$= \frac{tgn\, a \pm tgn\, b}{tgn\, a \mp tgn\, b} \sin(a \mp b)$$
$$= \frac{\sin \frac{1}{2}(a \mp b)}{\sin \frac{1}{2}(a \pm b)} \{\sin a \pm \sin b\}$$
$$= \frac{\cos \frac{1}{2}(a \pm b)}{\cos \frac{1}{2}(a \mp b)} \{\sin a \pm \sin b\}$$
$$= \frac{1}{2} \{\cos(a+b) + \cos(a-b)\} (tgn\, a + tgn\, b)$$
$$= \sqrt{\sin^2 a + \sin^2 b + 2 \sin a \sin b \cos(a+b)}$$

19) $$\sin(a+b) + \sin(a-b) = 2 \sin a \cos b$$
$$= tgn\, a\, cotg\, b \{\sin(a+b) - \sin(a-b)\}$$

20) $$\sin(a+b) - \sin(a-b) = 2 \cos a \sin b$$
$$= cotg\, a\, tgn\, b \{\sin(a+b) + \sin(a-b)\}$$

21) $$\sin^2(a+b) + \sin^2(a-b) = 1 - \cos 2a \cos 2b$$
$$\sin^2(a+b) - \sin^2(a-b) = \sin 2a \sin 2b$$

22) $$\sin(a-b) + \sin(a-c) + \sin(b-c)$$
$$= 4 \cos \frac{1}{2}(a-b) \sin \frac{1}{2}(a-c) \cos \frac{1}{2}(b-c)$$
$$\sin^2(a-b) + \sin^2(a-c) + \sin^2(b-c)$$
$$= 2\{1 - \cos(a-b)\cos(a-c)\cos(b-c)\}$$

23) $$\sin(a+b+c) = \sin a \cos b \cos c + \cos a \sin b \cos c$$
$$+ \cos a \cos b \sin c - \sin a \sin b \sin c$$
$$\sin(a+b-c) = \sin a \cos b \cos c + \cos a \sin b \cos c$$
$$- \cos a \cos b \sin c + \sin a \sin b \sin c$$
$$\sin(a-b-c) = \sin a \cos b \cos c - \cos a \sin b \cos c$$
$$- \cos a \cos b \sin c - \sin a \sin b \sin c.$$

Zur Bildung der höheren Summen beachte man:

24) $$\prod [\cos a_x + i \sin a_x] = \cos \sum a_x + i \sin \sum a_x$$

25) $$\sin a \pm \sin b = 2 \sin \frac{1}{2}(a \pm b) \cos \frac{1}{2}(a \mp b)$$
$$= (\cos a + \cos b) \operatorname{tgn} \frac{1}{2}(a \pm b)$$
$$= (\cos b - \cos a) \operatorname{cotg} \frac{1}{2}(a \mp b)$$
$$= \frac{\operatorname{tgn} \frac{1}{2}(a \pm b)}{\operatorname{tgn} \frac{1}{2}(a \mp b)} \{\sin a \mp \sin b\}.$$

26) $$\frac{1}{2}[\sin a + \sin b] = \sin \frac{1}{2}(a + c) \cos \frac{1}{2}(a - c)$$
$$+ \sin \frac{1}{2}(b - c) \cos \frac{1}{2}(b + c)$$

27) $$\sin^2 a + \sin^2 b = 1 - \cos(a + b) \cos(a - b)$$
$$\sin^2 a - \sin^2 b = \cos^2 b - \cos^2 a = \sin(a + b) \sin(a - b)$$

28) $$\sin a + \sin b + \sin c = \sin(a + b + c)$$
$$+ 4 \sin \frac{1}{2}(a + b) \sin \frac{1}{2}(a + c) \sin \frac{1}{2}(b + c)$$
$$= - \sin(a + b - c)$$
$$+ 4 \sin \frac{1}{2}(a + b) \cos \frac{1}{2}(a - c) \cos \frac{1}{2}(b - c)$$

$$\sin a + \sin b - \sin c = \sin(a + b - c)$$
$$+ 4 \sin \frac{1}{2}(a + b) \sin \frac{1}{2}(a - c) \sin \frac{1}{2}(b - c)$$
$$= - \sin(a + b + c)$$
$$+ 4 \sin \frac{1}{2}(a + b) \cos \frac{1}{2}(a + c) \cos \frac{1}{2}(b + c)$$

29) $$\sin a + \sin b + \sin(a + b) = 4 \cos \frac{1}{2} a \cos \frac{1}{2} b \sin \frac{1}{2}(a + b)$$
$$\sin a + \sin b + \sin(a - b) = 4 \sin \frac{1}{2} a \cos \frac{1}{2} b \cos \frac{1}{2}(a - b)$$
$$\sin a + \sin b - \sin(a + b) = 4 \sin \frac{1}{2} a \sin \frac{1}{2} b \sin \frac{1}{2}(a + b)$$

$$\sin a + \sin b - \sin(a+b) = 4\cos\frac{1}{2}a\sin\frac{1}{2}b\cos\frac{1}{2}(a-b)$$

$$\sin a - \sin b + \sin(a+b) = 4\sin\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}b\cos\frac{1}{2}(a+b)$$

$$\sin a - \sin b + \sin(a-b) = 4\cos\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}b\sin\frac{1}{2}(a-b)$$

$$\sin a - \sin b - \sin(a+b) = -4\cos\frac{1}{2}a\sin\frac{1}{2}b\cos\frac{1}{2}(a+b)$$

$$\sin a - \sin b - \sin(a-b) = -4\sin\frac{1}{2}a\sin\frac{1}{2}b\sin\frac{1}{2}(a-b)$$

30) $\sin^2 a + \sin^2 b - \sin^2(a \pm b) = \mp 2\sin a \sin b \cos(a \pm b)$
$\sin^2 a + \sin^2 b + \sin^2(a \pm b) = 2[1 - \cos a \cos b \cos(a \pm b)]$

31) $\sin a \sin b = \frac{1}{2}\{\cos(a-b) - \cos(a+b)\} = \frac{\pm\cos(a \mp b)}{1 \pm \operatorname{cotg} a \operatorname{cotg} b}$

32) $4\sin a \sin b \sin c = \sin(a+b-c) + \sin(a-b+c)$
$+ \sin(-a+b+c) - \sin(a+b+c)$

33) $8\sin\frac{1}{4}(a+b+c+d)\sin\frac{1}{4}(a+b-c+d)$
$\sin\frac{1}{4}(a-b+c+d)\sin\frac{1}{4}(-a+b+c+d)$
$= 4\left\{\cos\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}b\cos\frac{1}{2}c\cos\frac{1}{2}d + \sin\frac{1}{2}a\sin\frac{1}{2}b\sin\frac{1}{2}c\right.$
$\left.\sin\frac{1}{2}d\right\} - (\cos a + \cos b + \cos c + \cos d)$

34) $\sin a \sin(b-c) + \sin b \sin(c-a) + \sin c \sin(a-b) = 0.$
Gauss, theoria motus, p. 78.

35) $\sqrt{1+\sin a} \pm \sqrt{1-\sin a} = 2\begin{cases}\cos\frac{a}{2}\\ \sin\frac{a}{2}\end{cases} = \sqrt{2}\sqrt{1 \pm \cos a}$

$$= \sqrt{2}\left\{\sin\left(45^0 + \frac{a}{2}\right) \pm \sin\left(45^0 - \frac{a}{2}\right)\right\}$$

$$= \sqrt{2}\left\{\cos\left(45^0 - \frac{a}{2}\right) \pm \cos\left(45^0 + \frac{a}{2}\right)\right\}$$

36) $\sqrt{1 + \sin a} = \sin\frac{a}{2} + \cos\frac{a}{2}$

$\sqrt{1 - \sin a} = \pm\left(\sin\frac{a}{2} - \cos\frac{a}{2}\right)$

Sei n eine gerade Zahl, so ist

37) $$\sin^n a = \pm\frac{1}{2^{n-1}}\left\{\cos n\,a - n\cos\overline{n-2}\,a + \frac{n(n-1)}{1.2}\cos\overline{n-4}\,a - \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}\cos\overline{n-6}\,a + \cdots \pm\frac{1}{2}\,\frac{n(n-1)(n-2)\cdots\left(\frac{1}{2}n+1\right)}{1\cdot2\cdot3\cdots\frac{1}{2}n}\right\}.$$

Hier ist immer das $+$ oder $-$ zu nehmen (sowohl vor als auch in der Klammer), je nachdem $\frac{1}{2}n$ gerade oder ungerade ist.

Sei n eine ungerade Zahl, so ist

38) $$\sin^n a = \pm\frac{1}{2^{n-1}}\left\{\sin n\,a - n\sin\overline{n-2}\,a + \frac{n(n-1)}{1.2}\sin\overline{n-4}\,a - \cdots \pm \frac{n(n-1)\cdots\frac{1}{2}(n+3)}{1\cdot2\cdots\frac{1}{2}(n-1)}\sin a\right\}$$

$+$ oder $-$, je nachdem $\frac{1}{2}(n-1)$ gerade oder ungerade ist, wie oben zu nehmen.

39) $\sin^2 a = -\frac{1}{2}\{\cos 2a - 1\}$

$\sin^3 a = -\frac{1}{2^2}\{\sin 3a - 3\sin a\}$

$\sin^4 a = +\frac{1}{2^3}\{\cos 4a - 4\cos 2a + 3\}$

$\sin^5 a = +\frac{1}{2^4}\{\sin 5a - 5\sin 3a + 10\sin a\}$

$\sin^6 a = -\frac{1}{2^5}\{\cos 6a - 6\cos 4a + 15\cos 2a - 10\}$

$$\sin^7 a = -\frac{1}{2^6}\{\sin 7a - 7\sin 5a + 21\sin 3a - 35\sin a\}$$

$$\sin^8 a = +\frac{1}{2^7}\{\cos 8a - 8\cos 6a + 28\cos 4a - 56\cos 2a + 35\}$$

40)
$$\frac{1}{2\sin\varphi} = \sin\varphi + \sin 3\varphi + \sin 5\varphi + \sin 7\varphi + \cdots$$

$$-\frac{1}{2^2\sin^2\varphi} = \cos 2\varphi + 2\cos 4\varphi + 3\cos 6\varphi + 4\cos 8\varphi + \cdots$$

$$-\frac{1}{2^3\sin^3\varphi} = \sin 3\varphi + 3\sin 5\varphi + 6\sin 7\varphi + 10\sin 9\varphi + \cdots$$

Die Coefficienten sind jene von

$$(1-x)^{-n}.$$

§. 147.

Cosinus.

1)
$$\cos a = \frac{1}{2}(e^{ia} + e^{-ia}) = 1 - \operatorname{sinvers} a$$

$$= \sqrt{1-\sin^2 a} = 1 - 2\sin^2\frac{a}{2} = \cos^2\frac{a}{2} - \sin^2\frac{a}{2}$$

$$= \sqrt{\frac{1+\cos 2a}{2}} = 2\cos^2\frac{a}{2} - 1 =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1+tgn^2 a}} = \frac{1 - tgn^2\frac{a}{2}}{1 + tgn^2\frac{a}{2}} = \frac{1}{1 + tgn\, a\, tgn\frac{a}{2}}$$

$$= \frac{1}{tgn\, a\, cotg\frac{a}{2} - 1} = \frac{cotg\frac{a}{2} - tgn\frac{a}{2}}{cotg\frac{a}{2} + tgn\frac{a}{2}} = \frac{cotg\, a}{\sqrt{1+cotg^2 a}}$$

$$= \frac{\sin 2a}{2\sin a} = \sin a\; cotg\, a = \frac{\sin a}{tgn\, a} = \frac{cotg\, a}{cosec\, a}$$

$$= \frac{1}{\sec a} = \frac{\sqrt{cosec^2 a - 1}}{cosec\, a} = \sqrt{\frac{cosec^2 a - 1}{cotg^2 a - 1}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}} \{\cos(30^0 - a) + \cos(30^0 + a)\}$$

$$= \sin(30^0 + a) + \sin(30^0 - a)$$

$$= 2\cos\left(45^0 + \frac{a}{2}\right)\cos\left(45^0 - \frac{a}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \{\cos(a - 45^0) - \sin(a - 45^0)\}$$

$$= \cos(60^0 + a) + \cos(60^0 - a)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}} \{\sin(60^0 + a) + \sin(60^0 - a)\}$$

$$= \frac{2}{tgn\left(45^0 + \frac{a}{2}\right) + cotg\left(45^0 + \frac{a}{2}\right)}$$

$$= \frac{2}{tgn\left(45^0 + \frac{a}{2}\right) + tgn\left(45^0 - \frac{a}{2}\right)}$$

$$= \sin(45^0 + a)\sqrt{\frac{1 + \cos 2a}{1 + \sin 2a}}$$

$$= \cos(a + b)\cos b - \sin(a + b)\sin b$$

$$= \cos b \cos(b - a) + \sin b \sin(b - a)$$

2) $2\cos\frac{45^0}{2^n} = \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \cdots \sqrt{2}}}}$

3) $2\cos\frac{30^0}{2^n} = \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2 + \cdots \sqrt{3}}}}$

4) $\cos(30^0 \pm a) = \frac{1}{2}\sqrt{3}\cos a \mp \frac{1}{2}\sin a$

5) $\cos(45^0 \pm a) = \frac{1}{2}\sqrt{2}(\cos a \mp \sin a)$

6) $\cos(60^0 \pm a) = \frac{1}{2}\cos a \mp \frac{1}{2}\sqrt{3}\sin a.$

Die numerischen Werthe für *cos* erhält man aus jenen für *sin*, wenn man die Formel:

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - a\right) = \sin a$$

beachtet.

7) $\cos(-a) = \cos a$

8) $\cos\frac{\pi}{2} = 0$

$\cos 2\frac{\pi}{2} = -1$

$\cos 3\frac{\pi}{2} = 0$

$\cos 4\frac{\pi}{2} = +1$

9) $\cos 4n\frac{\pi}{2} = 1$

$\cos(4n+1)\frac{\pi}{2} = 0$

$\cos(4n+2)\frac{\pi}{2} = -1$

$\cos(4n+3)\frac{\pi}{2} = 0$

10) $\cos\left(\frac{\pi}{2} \pm a\right) = \mp \sin a$

$\cos\left(2\frac{\pi}{2} \pm a\right) = -\cos a$

$\cos\left(3\frac{\pi}{2} \pm a\right) = \pm \sin a$

$\cos\left(4\frac{\pi}{2} \pm a\right) = \cos a$

11) $\cos\left\{(4n+1)\frac{\pi}{2} \pm a\right\} = \mp \sin a$

$\cos\left\{(4n+2)\frac{\pi}{2} \pm a\right\} = -\cos a$

$\cos\left\{(4n+3)\frac{\pi}{2} \pm a\right\} = \pm \sin a$

$\cos\left\{(4n+4)\frac{\pi}{2} \pm a\right\} = \cos a$

12) Setzt man

$$\sin\varphi = y, \quad \cos\varphi = x, \quad 2\cos\varphi = z,$$

so wird:

$\cos\varphi = x \qquad = x$

$\cos 2\varphi = x^2 - y^2 \qquad = 2x^2 - 1$

$\cos 3\varphi = x^3 - 3xy^2 \qquad = 4x^3 - 3x$

$\cos 4\varphi = x^4 - 6x^2y^2 + y^4 \qquad = 8x^4 - 8x^2 + 1$

$\cos 5\varphi = x^5 - 10x^3y^2 + 5xy^4 \qquad = 16x^5 - 20x^3 + 5x$

$\cos 6\varphi = x^6 - 15x^4y^2 + 15x^2y^4 - y^6 = 32x^6 - 48x^4 + 18x^2 - 1$

$\cos 7\varphi = x^7 - 21x^5y^2 + 35x^3y^4 - 7xy^6 = 64x^7 - 112x^5 + 56x^3 - 7x$

$$\cos\ \varphi = \sqrt{1 - y^2}$$
$$\cos 2\varphi = 1 - 2y^2$$
$$\cos 4\varphi = 1 - 8y^2 + 8y^4$$
$$\cos 6\varphi = 1 - 18y^2 + 48y^4 - 32y^6$$
$$\cos 8\varphi = 1 - 32y^2 + 160y^4 - 128y^6 + 64y^8$$

13) Für ein gerades n findet man:

$$\cos n\varphi = 1 - \frac{n^2}{2}y^2 + \frac{n^2(n^2 - 2^2)}{2.3.4}y^4 - \frac{n^2(n^2 - 2^2)(n^2 - 4^2)}{2.3.4.5.6}y^6 + \ldots$$

für ein ungerades n:

$$\cos n\varphi = x\left\{1 - \frac{n^2 - 1^2}{2}y^2 + \frac{(n^2 - 1^2)(n^2 - 3^2)}{2.3.4}y^4 - \frac{(n^2 - 1^2)(n^2 - 3^2)(n^2 - 5^2)}{2.3.4.5.6}.y^6 + \ldots\right.$$

Es ist auch

14) $$\cos n\varphi = \frac{1}{2}\left\{z^n - \frac{n}{1}z^{n-2} + \frac{n(n-3)}{1.2}z^{n-4} - \frac{n(n-4)(n-5)}{1.2.3}z^{n-6} + \ldots\right.$$

✓ $$\cos n\varphi = x^n - \frac{n(n-1)}{1.2}x^{n-2}y^2 + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3.4}x^{n-4}y^4 - \ldots$$

15) $$\cos n\varphi = 2\cos\varphi\cos(n-1)\varphi - \cos(n-2)\varphi$$

16) $$\sum_0^n \cos(a + nb) = \frac{\cos\left\{a + \frac{1}{2}nb\right\}\sin\frac{n+1}{2}b}{\sin\frac{1}{2}b}$$

17) $$\cos n\varphi = \frac{1}{2}\{(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n + (\cos\varphi - i\sin\varphi)^n\}$$

18) $\cos(a \pm b) = \cos a \cos b \mp \sin a \sin b$

$= \cos a \cos b (1 \mp tgn\, a\, tgn\, b)$

$= \frac{cotg\, a \mp tgn\, b}{cotg\, a \pm tgn\, b} \cos(a \mp b)$

$= \frac{cotg\, b \mp tgn\, a}{cotg\, b\, tgn\, a \mp 1} \sin(a \mp b)$

$= \cos a \sin b \{cotg\, b \mp tgn\, a\}$

19) $\cos(a + b) + \cos(a - b) = 2 \cos a \cos b$

$\cos(a + b) - \cos(a - b) = - 2 \sin a \sin b$

20) $\cos^2(a + b) + \cos^2(a - b) = 1 + \cos 2a \cos 2b$

$\cos^2(a - b) - \cos^2(a + b) = \sin 2a \sin 2b$

21) $\cos(a - b) + \cos(a - c) + \cos(b - c)$

$= 4 \cos \frac{1}{2}(a - b) \cos \frac{1}{2}(a - c) \cos \frac{1}{2}(b - c) - 1$

$\cos^2(a - b) + \cos^2(a - c) + \cos^2(b - c)$

$= 1 + 2 \cos(a - b) \cos(a - c) \cos(b - c)$

22) $\cos(a + b + c) = \cos a \cos b \cos c - \sin a \sin b \cos c$

$+ \sin a \cos b \sin c - \cos a \sin b \sin c$

$\cos(a + b - c) = \cos a \cos b \cos c - \sin a \sin b \sin c$

$+ \sin a \cos b \sin c + \cos a \sin b \sin c$

23) $\cos a + \cos b = 2 \cos \frac{1}{2}(a + b) \cos \frac{1}{2}(a - b)$

$\cos a - \cos b = 2 \sin \frac{1}{2}(b + a) \sin \frac{1}{2}(b - a)$

24) $\cos a + \cos b = \frac{\sin a \pm \sin b}{tgn \frac{1}{2}(a \pm b)}$

$= \frac{cotg \frac{1}{2}(a + b)}{tgn \frac{1}{2}(a - b)} (\cos b - \cos a)$

$\cos b - \cos a = \frac{\sin a \pm \sin b}{cotg \frac{1}{2}(a \mp b)}$

$= - \{\sin b \pm \sin a\}\, tgn \frac{1}{2}(b \mp a)$

25) $\cos^2 a + \cos^2 b = 1 + \cos(a+b)\cos(a-b)$

$\cos^2 a - \cos^2 b = -\sin(a+b)\sin(a-b)$

26) $\cos a + \cos b + \cos c = -\cos(a+b+c)$

$$+ 4\cos\frac{1}{2}(a+b)\cos\frac{1}{2}(a+c)\cos\frac{1}{2}(b+c)$$

$$= -\cos(a+b-c) + 4\cos\frac{1}{2}(a+b)\cos\frac{1}{2}(a-c)\cos\frac{1}{2}(b-c)$$

$\cos a + \cos b - \cos c = \cos(a+b+c)$

$$+ 4\cos\frac{1}{2}(a+b)\sin\frac{1}{2}(a+c)\sin\frac{1}{2}(b+c)$$

$$= \cos(a+b-c) + 4\cos\frac{1}{2}(a+b)\sin\frac{1}{2}(a-c)\sin\frac{1}{2}(b-c)$$

27) $\cos a + \cos b + \cos(a \pm b) = 4\cos\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}b\cos\frac{1}{2}(a \pm b) - 1$

$\cos a + \cos b - \cos(a \pm b) = 1 \pm 4\sin\frac{1}{2}a\sin\frac{1}{2}b\cos\frac{1}{2}(a \pm b)$

28) $\cos^2 a + \cos^2 b + \cos^2(a \pm b) = 1 + 2\cos a\cos b\cos(a \pm b)$

$\cos^2 a + \cos^2 b - \cos^2(a \pm b) = 1 \pm 2\sin a\sin b\cos(a \pm b)$

29) $\cos(a+b-c) + \cos(a-b+c) + \cos(a+b+c) + \cos(a+b+c)$

$= 4\cos a\cos b\cos c$

$\cos(a+b-c) + \cos(a-b+c) - \cos(-a+b+c) - \cos(a+b+c)$

$= 4\cos a\sin b\sin c$

30) $\cos a\cos b = \frac{1}{2}\{\cos(a+b) + \cos(a-b)\}$

$$= \frac{\cos(a \mp b)}{1 \pm tgn\, a\, tgn\, b}$$

31) $4\cos a\cos b\cos c = \cos(a+b-c) + \cos(a-b+c)$

$+ \cos(\quad a+b+c) + \cos(a+b+c)$

32) $8\cos\frac{1}{4}(-a+b+c+d)\cos\frac{1}{4}(a+b-c+d)$

$$\cos\frac{1}{4}(a-b+c+d)\cos\frac{1}{4}(-a+b+c+d)$$

$$= 4\left\{\sin\frac{a}{2}\sin\frac{b}{2}\sin\frac{c}{2}\sin\frac{d}{2} + \cos\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2}\cos\frac{c}{2}\cos\frac{d}{2}\right\}$$

$$+ \cos a + \cos b + \cos c + \cos d$$

33) $\sqrt{1+\cos a} \pm \sqrt{1-\cos a} = \sqrt{2}\,\sqrt{1 \pm \sin a}$

$$= \sqrt{2}\sin\left(45^0 \pm \frac{1}{2}a\right)$$

$$= \sqrt{2}\cos\left(45^0 \mp \frac{1}{2}a\right)$$

Sei n gerade, so wird

34) $$\cos^n a = \frac{1}{2^{n-1}}\left\{\cos n a + n\cos(n-2)a + \frac{n(n-1)}{1.2}\cos(n-4)a + \cdots + \frac{n(n-1)\cdots\left(\frac{1}{2}n+1\right)}{2\left\{1.2\cdots\frac{1}{2}n\right\}}\right\}$$

für ein ungerades n ergiebt sich:

35) $$\cos^n a = \frac{1}{2^{n-1}}\left\{\cos n a + n\cos(n-2)a + \frac{n(n-1)}{1.2}\cos(n-4)a + \cdots + \frac{n(n-1)\cdots\frac{1}{2}(n+3)}{1.2\cdots\frac{1}{2}(n-1)}\cos a\right\}$$

für ein negatives ganzes n ergiebt sich:

36) $$(2\cos a)^n = \cos n a + n\cos(n-2)a + \frac{n(n-1)}{1.2}\cos(n-4)a + \cdots$$

$$\cos a = \cos a$$
$$2\cos^2 a = 1 + \cos 2a$$
$$4\cos^3 a = 3\cos a + \cos 3a$$
$$8\cos^4 a = 3 + 4\cos 2a + \cos 4a$$
$$16\cos^5 a = 10\cos a + 5\cos 3a + \cos 5a$$
$$32\cos^6 a = 10 + 15\cos 2a + 6\cos 4a + \cos 6a$$
$$64\cos^7 a = 35 + 21\cos 3a + 7\cos 5a + \cos 7a$$
$$128\cos^8 a = 35 + 56\cos 2a + 28\cos 4a + 8\cos 6a + \cos 8a$$

37) $$\frac{1}{2\cos a} = \cos a - \cos 3a + \cos 5a - \cos 7a + \cdots$$

$$\frac{1}{4\cos^2 a} = \cos 2a - 2\cos 4a + 3\cos 6a - 4\cos 8a + \cdots$$

$$\frac{1}{8\cos^3 a} = \cos 3a - 3\cos 5a + 6\cos 7a - 10\cos 9a + \cdots$$

Die Coefficienten sind jene von $(1+x)^{-n}$.

§. 148.

Tangens.

1) $$tgn\, a = \frac{\sin a}{\cos a} = \frac{1}{cotg\, a} = \frac{\sin 2a}{1+\cos 2a} = \frac{1-\cos 2a}{\sin 2a}$$

$$= \frac{\sec a}{cosec\, a} = \frac{1}{i}\,\frac{e^{2ai}-1}{e^{2ai}+1}$$

$$= \frac{\sin a}{\sqrt{1-\sin^2 a}} = \sqrt{\frac{1}{\cos^2 a} - 1} = \sqrt{\frac{1-\cos 2a}{1+\cos 2a}}$$

$$= \frac{\sin(a+b)+\sin(a-b)}{\cos(a+b)-\cos(a-b)}$$

$$= \frac{2\,tgn^2\frac{1}{2}a}{1-tgn^2\frac{1}{2}a} = \frac{2\,cotg\frac{a}{2}}{cotg^2\frac{a}{2}-1} = \frac{2}{cotg\frac{a}{2} - tgn\frac{a}{2}}$$

$$= \frac{\cos(a-b)-\cos(a+b)}{\sin(a+b)-\sin(a-b)}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{cosec^2 a - 1}} = \sqrt{\sec^2 a - 1} = cotg\, a - 2\,cotg\, 2a$$

$$= \frac{1}{2}\left\{tgn\left(45^0+\frac{a}{2}\right) - tgn\left(45^0-\frac{a}{2}\right)\right\}$$

$$= \frac{\cos(a-45^0)+\sin(a-45^0)}{\cos(a-45^0)-\sin(a-45^0)}$$

$$= \frac{1-tgn(45^0-a)}{1+tgn(45^0-a)} = \frac{tgn(45^0+a)-1}{tgn(45^0+a)+1} = \sqrt{\frac{\sec 2a-1}{\sec 2a+1}}$$

$$= \frac{2}{tgn\left(45^0 + \frac{a}{2}\right) + cotg\left(45^0 - \frac{a}{2}\right)}$$

$$= \frac{2}{tgn\left(45^0 + \frac{a}{2}\right) + tgn\left(45^0 - \frac{a}{2}\right)}$$

$$= \frac{tgn\,\frac{a}{2}}{1 - tgn\,\frac{a}{2}} + \frac{tgn\,\frac{a}{2}}{1 + tgn\,\frac{a}{2}} = \frac{1}{1 - tgn\,\frac{a}{2}} - \frac{1}{1 + tgn\,\frac{a}{2}}$$

2) $tgn(45^0 \pm a) = cotg(45^0 \mp a) = \frac{1 \pm tgn\,a}{1 \mp tgn\,a} = \frac{\cos a \pm \sin a}{\cos a \mp \sin a}$

$$= \sqrt{\frac{1 \pm \sin 2a}{1 \mp \sin 2a}} = \frac{1 + tgn^2 a}{1 - tgn^2 a} \pm tgn\,2a$$

$$= \frac{1 \pm \sin 2a}{\cos 2a}$$

3) $tgn(45^0 + a) + tgn(45^0 - a) = 2\sec 2a = cotg(45^0 - a) + cotg(45^0 + a)$

$tgn(45^0 + a) - tgn(45^0 - a) = 2\,tgn\,2a = cotg(45^0 - a) - cotg(45^0 + a)$

4) $tgn(45^0 + a)\,tgn(45^0 - a) = 1$

5) $tgn\left(45^0 \pm \frac{a}{2}\right) = cotg\left(45^0 \mp \frac{a}{2}\right) = \frac{\cos a}{1 \mp \sin a} = \frac{1 \pm \sin a}{\cos a}$

$$= \sqrt{\frac{1 \pm \sin a}{1 \mp \sin 2a}} = \sqrt{\frac{tgn\left(45^0 + \frac{1}{2}a\right)}{tgn\left(45^0 - \frac{1}{2}a\right)}}$$

6) $tgn(-a) = -tgn\,a$

7) $tgn\,\frac{\pi}{2} = \infty$ 8) $tgn\,4n\,\frac{\pi}{2} = 0$

$tgn\,2\,\frac{\pi}{2} = 0$ $tgn(4n + 1)\,\frac{\pi}{2} = \infty$

$tgn\,3\,\frac{\pi}{2} = \infty$ $tgn(4n + 2)\,\frac{\pi}{2} = 0$

$tgn\,4\,\frac{\pi}{2} = 0$ $tgn(4n + 3)\,\frac{\pi}{2} = \infty$

9) $tgn\left(\frac{\pi}{2} \pm a\right) = \mp cotg\, a$

$tgn\left(2\,\frac{\pi}{2} \pm a\right) = \pm\, tgn\, a$

$tgn\left(3\,\frac{\pi}{2} \pm a\right) = \mp cotg\, a$

$tgn\left(4\,\frac{\pi}{2} \pm a\right) = \pm\, tgn\, a$

10) $tgn\left[(4n+1)\,\frac{\pi}{2} \pm a\right] = \mp cotg\, a$

$tgn\left[(4n+2)\,\frac{\pi}{2} \pm a\right] = \pm\, tgn\, a$

$tgn\left[(4n+3)\,\frac{\pi}{2} \pm a\right] = \mp cotg\, a$

$tgn\left[(4n+4)\,\frac{\pi}{2} \pm a\right] = \pm\, tgn\, a$

11) Sei $tgn\, a = t$, so wird:

$$tgn\, a = t$$

$$tgn\, 2a = \frac{2t}{1-t^2}$$

$$tgn\, 3a = \frac{3t-t^3}{1-3t^2}$$

$$tgn\, 4a = \frac{4t-4t^3}{1-6t^2+t^4}$$

$$tgn\, 5a = \frac{5t-10t^3+t^5}{1-10t^2+5t^4}$$

$$tgn\, 6a = \frac{6t-20t^3+6t^5}{1-15t^2+15t^4-t^6}$$

12) Bildet man

$(1+t)^n = 1 + At + Bt^2 + Ct^3 + Dt^4 + Et^5 + Ft^6 + Gt^7 + \cdots$

so wird

$$tgn\, n\, a = \frac{At - Ct^3 + Et^5 - Gt^7 + \cdots}{1 - Bt^2 + Dt^4 - Ft^6 + \cdots}.$$

Es ist ferner

13) $tgn\, n\, a = \frac{1}{i} \cdot \frac{(1 + i\, tgn\, a)^n - (1 - i\, tgn\, a)^n}{(1 + i\, tgn\, a)^n + (1 - i\, tgn\, a)^n}$

$$14)\quad tgn\,\frac{n+1}{2}\,a = [\sin a + \sin 2a + \cdots \sin n a] : [\cos a + \cos 2a + \cdots \cos n a]$$

$$15)\quad tgn(a \pm b) = \frac{tgn\,a \pm tgn\,b}{1 \mp tgn\,a\;tgn\,b} = cotg\,b\,\frac{tgn\,a \mp tgn\,b}{cotg\,a \pm tgn\,b}$$

$$= \frac{cotg\,b \pm cotg\,a}{cotg\,a\;cotg\,b \mp 1} = cotg\,a\,\frac{tgn\,a \pm tgn\,b}{cotg\,b \mp tgn\,a}$$

$$= \frac{\cos 2b - \cos 2a}{\sin 2b \mp \sin 2a} = \frac{\sin 2a \pm \sin 2b}{\sin 2a \mp \sin 2b} \cdot tgn(a \mp b)$$

$$16)\quad tgn(a+b) + tgn(a-b) = \frac{2\sin 2a}{\cos 2a + \cos 2b} = \frac{2\,tgn\,a\,\sec^2 b}{1 - tgn^2 a\,tgn^2 b}$$

$$tgn(a+b) - tgn(a-b) = \frac{2\sin 2b}{\cos 2a + \cos 2b}$$

$$17)\quad tgn(a+b+c) = \frac{tgn\,a + tgn\,b + tgn\,c - tgn\,a\;tgn\,b\;tgn\,c}{1 - \{tgn\,a\,tgn\,b + tgn\,b\,tgn\,c + tgn\,c\;tgn\,a\}}$$

$$18)\quad tgn(a+b+c) + tgn(a+b-c) + tgn(a-b+c) + tgn(-a+b+c)$$

$$= 2\,\frac{2\sin 2(a+b+c) + \sin 4a + \sin 4b + \sin 4c}{1 + \cos 4a + \cos 4b + \cos 4c + 4\cos 2a\cos 2b\cos 2c}$$

$$19)\quad tgn\,a \pm tgn\,b = \frac{\sin(a \pm b)}{\cos a\cos b}$$

$$= \frac{\sin(a \pm b)}{\sin(a \mp b)}\,(tgn\,a \mp tgn\,b)$$

$$= tgn\,b\,tgn(a \pm b)(cotg\,b \mp tgn\,a)$$

$$= \frac{1 \mp tgn\,a\;tgn\,b}{cotg(a \pm b)} = (1 \mp tgn\,a\,tgn\,b)\,tgn(a \pm b)$$

$$20)\quad tgn\,a + tgn\,b + tgn\,c = tgn\,a\;tgn\,b\;tgn\,c + \frac{\sin(a+b+c)}{\cos a\;\cos b\;\cos c}$$

$$21)\quad tgn\,a + tgn(a \pm b) = \frac{\sin(2a \pm b)}{\cos a\cos(a \pm b)}$$

$$tgn\,a - tgn(a \pm b) = -\frac{\sin b}{\cos a\cos(a \pm b)}$$

22) $$tgn^2 a - tgn^2 b = \frac{sin(a+b)\,sin(a-b)}{cos^2 a\,cos^2 b}$$

23) $$\frac{1}{tgn\,a} + tgn\,a = \frac{2}{sin\,2a}$$

24) $$\frac{1}{tgn\,a} - tgn\,a = 2\,cotg\,2a$$

25) $$tgn\,a\,.\,tgn\,b = \frac{tgn\,a \pm tgn\,b}{cotg\,b \pm cotg\,a} = \frac{cos(a-b) - cos(a+b)}{cos(a-b) + cos(a+b)}$$
$$= \frac{sin\,2a + sin\,2b - sin\,2(a+b)}{sin\,2a + sin\,2b + sin\,2(a+b)}$$
$$= \sqrt{1 - \frac{cos(a+b)\,cos(a-b)}{cos^2 a\,cos^2 b}}$$

26) $$tgn(a+b)\,tgn(a-b) = \frac{cos^2 b - cos^2 a}{cos^2 b - sin^2 a} = \frac{sin^2 b - sin^2 a}{sin^2 b - cos^2 a}$$
$$= \frac{cos\,2b - cos\,2a}{cos\,2b + cos\,2a}$$

27) $$tgn\,\frac{1}{2}(a+c)\,tgn\,\frac{1}{2}(b+c)$$
$$= \frac{sin\,a + sin\,b + sin\,c - sin(a+b+c)}{sin\,a + sin\,b - sin\,c + sin(a+b+c)}$$
$$= \frac{cos\,a + cos\,b - cos\,c - cos(a+b+c)}{cos\,a + cos\,b + cos\,c + cos(a+b+c)}$$

28) $$\frac{tgn\,a}{tgn\,b} = \frac{sin(a+b) + sin(a-b)}{sin(a+b) - sin(a-b)} = \frac{cotg\,b \pm tgn\,a}{cotg\,a \pm tgn\,b}$$
$$= \frac{cotg\,b \mp tgn\,a}{cotg\,a \pm tgn\,b} \cdot \frac{cos(b \mp a)}{cos(b \pm a)}$$

29) $$tgn\,\frac{1}{2}(a+b)\,tgn\,\frac{1}{2}(a+c)\,tgn\,\frac{1}{2}(b+c)$$
$$= \frac{sin\,a + sin\,b + sin\,c - sin(a+b+c)}{cos\,a + cos\,b + cos\,c + cos(a+b+c)}$$

30) $$tgn^2 a = \frac{1 - cos\,2a}{1 + cos\,2a}$$
$$tgn^3 a = \frac{3\,sin\,a - sin\,3a}{3\,cos\,a + cos\,3a}$$

§. 149.

Cotangens.

1) $$cotg\, a = \frac{cos\, a}{sin\, a} = \frac{1}{tgn\, a} = \frac{sin\, 2a}{1 - cos\, 2a} = \frac{1 + cos\, 2a}{sin\, 2a} = i\, \frac{e^{2ai} + 1}{e^{2ai} - 1}$$

$$= \sqrt{cosec^2 a - 1} = \frac{1}{\sqrt{sec^2 a - 1}}$$

$$= \frac{1}{2}\left\{cotg\, \frac{a}{2} - tgn\, \frac{a}{2}\right\} = \frac{tgn\,(45^0 + a) + 1}{tgn\,(45^0 + a) - 1}$$

$$= \frac{\sqrt{1 - sin^2 a}}{sin\, a} = \frac{cos\, a}{\sqrt{1 - cos^2 a}} = \sqrt{\frac{1 + cos\, 2a}{1 - cos\, 2a}}$$

$$= \frac{2\, cotg\left(45^0 + \frac{a}{2}\right) cotg\left(45^0 - \frac{a}{2}\right)}{cotg\left(45^0 - \frac{a}{2}\right) - cotg\left(45^0 + \frac{a}{2}\right)}$$

$$= \frac{1 - tgn^2 \frac{a}{2}}{2\, tgn\, \frac{a}{2}} = \frac{cotg^2 \frac{a}{2} - 1}{2\, cotg\, \frac{a}{2}}$$

$$= \frac{2}{tgn\left(45^0 + \frac{a}{2}\right) - tgn\left(45^0 - \frac{a}{2}\right)}$$

2) $cotg\,(-a) = -\, cotg\, a$

3) $cotg\, \frac{\pi}{2} = 0$

$cotg\, 2\, \frac{\pi}{2} = \infty$

$cotg\, 3\, \frac{\pi}{2} = 0$

$cotg\, 4\, \frac{\pi}{2} = \infty$

4) $cotg\, 4n\, \frac{\pi}{2} = \infty$

$cotg\,(4n + 1)\, \frac{\pi}{2} = 0$

$cotg\,(4n + 2)\, \frac{\pi}{2} = \infty$

$cotg\,(4n + 3)\, \frac{\pi}{2} = 0$

5) $$cotg\left(\frac{\pi}{2} \pm a\right) = \mp\, tgn\, a$$

$$cotg\left(2\frac{\pi}{2} \pm a\right) = \pm\, cotg\, a$$

$$cotg\left(3\frac{\pi}{2} \pm a\right) = \mp\, tgn\, a$$

$$cotg\left(4\frac{\pi}{2} \pm a\right) = \pm\, cotg\, a$$

6) $$cotg\left[4n\frac{\pi}{2} \pm a\right] = \pm\, cotg\, a$$

$$cotg\left[(4n+1)\frac{\pi}{2} \pm a\right] = \mp\, tgn\, a$$

$$cotg\left[(4n+2)\frac{\pi}{2} \pm a\right] = \pm\, cotg\, a$$

$$cotg\left[(4n+3)\frac{\pi}{2} \pm a\right] = \mp\, tgn\, a$$

7) $$cotg\, n\, a = \frac{cotg\, a - \binom{n}{2} tgn\, a + \binom{n}{4} tgn^3 a - \cdots}{\binom{n}{1} - \binom{n}{3} tgn^2 a + \binom{n}{5} tgn^4 a - \cdots}$$

8) $$cotg\, 2\, a = \frac{cotg\, a - tgn\, a}{2}$$

$$cotg\, 3\, a = \frac{cotg\, a - 3\, tgn\, a}{3 - tgn^2 a}$$

$$cotg\, 4\, a = \frac{cotg\, a - 6\, tgn\, a + tgn^3 a}{4 - 4\, tgn^2 a}$$

9) $$cotg(a \pm b) = \frac{1 \mp tgn\, a\, tgn\, b}{tgn\, a \pm tgn\, b} = \frac{cotg\, a\, cotg\, b \mp 1}{cotg\, b \pm cotg\, a}$$

10) $$cotg(a+b) + cotg(a-b) = \frac{2 \sin 2\, a}{\cos 2\, b - \cos 2\, a}$$

$$cotg(a+b) - cotg(a-b) = -\frac{2 \sin 2\, b}{\cos 2\, b - \cos 2\, a}$$

11) $$cotg\, b \pm cotg\, a = \frac{\sin(a \pm b)}{\sin a \sin b}$$

12) $$cotg\, a + cotg\, b + cotg\, c = cotg\, a\, cotg\, b\, cotg\, c - \frac{\cos(a+b+c)}{\sin a \sin b \sin c}$$

13) $cotg\, a + cotg\, (a \pm b) = \dfrac{sin\,(2a \pm b)}{sin\, a\, sin\,(a \pm b)}$

$$cotg\, a - cotg\, (a \pm b) = \frac{sin\, b}{sin\, a\, sin\,(a \pm b)}$$

14) $cotg\, a\, cotg\, b = \dfrac{cotg\, b \pm cotg\, a}{tgn\, a \pm tgn\, b} = \dfrac{cos\,(a - b) + cos\,(a + b)}{cos\,(a - b) - cos\,(a + b)}$

15) $cotg^2\, a = \dfrac{1 + cos\, 2a}{1 - cos\, 2a}$

$$cotg^3\, a = \frac{3\, cos\, a + cos\, 3a}{3\, sin\, a - sin\, 3a}$$

§. 150.

Secans.

1) $sec\, a = \dfrac{1}{cos\, a} = \dfrac{1}{\sqrt{1 - sin^2 a}} = \sqrt{1 + tgn^2 a}$

$$= \frac{\sqrt{1 + cotg^2 a}}{cotg\, a} = \frac{sec^2 a\, cosec^2 a}{cosec^2 a - sec^2 a}$$

$$= \frac{cosec\, a}{\sqrt{cosec^2 a - 1}} = \sqrt{\frac{2\, sec\, 2a}{1 + sec\, 2a}}$$

$$= \frac{1}{2}\left[tgn\left(45^0 + \frac{a}{2}\right) + tgn\left(45^0 - \frac{a}{2}\right)\right]$$

$$= \sqrt{\frac{1 + cotg^2 a}{cosec^2 a - 1}} = \frac{sec\left(45^0 + \frac{a}{2}\right)}{\sqrt{2}\,[cos\, a + sin\, a]}$$

2) $sec\,(-a) = sec\, a$

3) $sec\, \dfrac{\pi}{2} = \infty$ 4) $sec\, 4n\, \dfrac{\pi}{2} = +1$

$sec\, 2\, \dfrac{\pi}{2} = -1$ $sec\,(4n + 1)\, \dfrac{\pi}{2} = \infty$

$sec\, 3\, \dfrac{\pi}{2} = \infty$ $sec\,(4n + 2)\, \dfrac{\pi}{2} = -1$

$sec\, 4\, \dfrac{\pi}{2} = +1$ $sec\,(4n + 3)\, \dfrac{\pi}{2} = \infty$

5) $sec\left(\frac{\pi}{2} \pm a\right) = \mp\ cosec\, a$

$sec\left(2\,\frac{\pi}{2} \pm a\right) = -\ sec\, a$

$sec\left(3\,\frac{\pi}{2} \pm a\right) = \pm\ cosec\, a$

$sec\left(4\,\frac{\pi}{2} \pm a\right) = sec\, a$

6) $sec\left[4\,n\,\frac{\pi}{2} \pm a\right] = sec\, a$

$sec\left[(4\,n + 1)\,\frac{\pi}{2} \pm a\right] = \mp\ cosec\, a$

$sec\left[(4\,n + 2)\,\frac{\pi}{2} \pm a\right] = -\ sec\, a$

$sec\left[(4\,n + 3)\,\frac{\pi}{2} \pm a\right] = \pm\ cosec\, a$

7) $sec\,(a \pm b) = \frac{sec\,a\ sec\,b}{1 \mp tgn\,a\ tgn\,b} = \frac{cosec\,a\ cosec\,b}{cotg\,a\ cotg\,b \mp 1}$

8) $sec\,2\,a = \frac{sec^2 a}{1 - tgn^2 a} = \frac{cosec^2 a}{cotg^2 a - 1} = \frac{sec\,a\ cosec\,a}{cotg\,a - tgn\,a}$

§. 151.

Cosecans.

1) $cosec\,a = \frac{1}{sin\,a} = \frac{1}{\sqrt{1 - cos^2 a}} = \frac{\sqrt{1 + tgn^2 a}}{tgn\,a} = \sqrt{1 + cotg^2 a}$

$= \frac{sec\,a}{\sqrt{sec^2 a - 1}} = \sqrt{\frac{1 + tgn^2 a}{sec^2 a - 1}} = \frac{sec\,a}{tgn\,a}$

$= \frac{1}{2}\ sec\,\frac{a}{2}\ cosec\,\frac{a}{2}$

2) $cosec\,(-\,a) = -\ cosec\,a$

3) $cosec \frac{\pi}{2} = +1$ 4) $cosec\, 4n \frac{\pi}{2} = \infty$

$cosec\, 2 \frac{\pi}{2} = \infty$ $cosec\, (4n+1) \frac{\pi}{2} = +1$

$cosec\, 3 \frac{\pi}{2} = -1$ $cosec\, (4n+2) \frac{\pi}{2} = \infty$

$cosec\, 4 \frac{\pi}{2} = \infty$ $cosec\, (4n+3) \frac{\pi}{2} = -1$

5) $cosec \left(\frac{\pi}{2} \pm a\right) = sec\, a$

$cosec \left(2 \frac{\pi}{2} \pm a\right) = \mp cosec\, a$

$cosec \left(3 \frac{\pi}{2} \pm a\right) = - sec\, a$

$cosec \left(4 \frac{\pi}{2} \pm a\right) = \pm cosec\, a$

6) $cosec \left[4n \frac{\pi}{2} \pm a\right] = \pm cosec\, a$

$cosec \left[(4n+1) \frac{\pi}{2} \pm a\right] = sec\, a$

$cosec \left[(4n+2) \frac{\pi}{2} \pm a\right] = \mp cosec\, a$

$cosec \left[(4n+3) \frac{\pi}{2} \pm a\right] = - sec\, a$

7) $cosec (a \pm b) = \frac{sec\, a\, sec\, b}{tgn\, a \pm tgn\, b} = \frac{tgn\, a \mp tgn\, b}{tgn\, a \pm tgn\, b}\, sec (a \mp b)$

8) $cosec\, 2a = \frac{sec^2 a}{2\, tgn\, a} = 2\, sec\, a\, cosec\, a$

§. 182.

Einige Gleichungen.

1) Ist $sin\, x = sin\, y$, so wird:

$$y = \begin{cases} x + 2n\pi \\ (2n+1)\pi - x \end{cases}$$

2) Ist $\sin x = \cos y$, so wird:

$$y = \begin{cases} \left(\pm \frac{1}{2} - 2n\right)\pi \mp x \\ \left(\pm \frac{1}{2} + 2n\right)\pi \mp x \end{cases}$$

3) Ist $\cos x = \cos y$, so wird:

$$y = 2n\pi \pm x$$

4) Ist $tgn\, x = tgn\, y$, so wird:

$$y = x \pm n\pi$$

5) Ist $tgn\, x = cotg\, y$, so wird:

$$y = \left\{\frac{1}{2} \pm n\right\}\pi - x$$

6) Ist $cotg\, x = cotg\, y$, so wird:

$$y = x \pm n\pi$$

7) Ist $\sec x = \sec y$, so wird:

$$y = 2n\pi \pm x$$

8) Ist $cosec\, x = cosec\, y$, so wird:

$$y = \begin{cases} x + 2n\pi \\ (2n+1)\pi - x \end{cases}$$

Das Resultat in Nr. 1) und ähnlich in den anderen wird erhalten, wenn man

$$y = x + h$$

setzt, woraus aus

$$\sin x = \sin(x + h)$$

nach einigen Umformungen

$$\sin \frac{1}{2} h \cos\left(x + \frac{1}{2} h\right) = 0$$

also entweder

$$\sin \frac{1}{2} h = 0$$

oder

$$\cos\left(x + \frac{1}{2} h\right) = 0$$

folgt, woraus sich das obige Resultat ohne weiteres ergiebt,

§. 153.

Relationen zwischen den goniometrischen Functionen.

1) $$\frac{\cos(a \mp b)}{\sin(a \pm b)} = \frac{\operatorname{cotg} b \pm \operatorname{tgn} a}{\operatorname{cotg} b \operatorname{tgn} a \pm 1}$$

2) $$\pm \frac{\sin(a \pm b)}{\cos a \sin b} = 1 \pm \operatorname{tgn} a \operatorname{cotg} b$$

3) $$\pm \frac{\cos(a \pm b)}{\sin a \sin b} = 1 \pm \operatorname{cotg} a \operatorname{cotg} b$$

4) $$\frac{\cos(a \pm b)}{\cos a \sin b} = \operatorname{cotg} b \mp \operatorname{tgn} a$$

5) $$\frac{\cos(a \pm b)}{\sin a \cos b} = \operatorname{cotg} a \mp \operatorname{tgn} b$$

6) $$\cos a \pm \sin a = \sqrt{2} \sin(45^0 \pm a) = \sqrt{2} \cos(45^0 \mp a)$$

7) $$\sin a \pm \cos b = 2 \sin\left[\frac{1}{2}(a \mp b) \pm 45^0\right] \cos\left[\frac{1}{2}(a \pm b) \mp 45^0\right]$$

8) $$\cos a \pm \sin b = 2 \sin\left[45^0 - \frac{1}{2}(a \mp b)\right] \sin\left[45^0 - \frac{1}{2}(a \pm b)\right]$$

9) $$\sin a + \sin b + \cos a + \cos b = 2 \cos \frac{1}{2}(a - b) \sqrt{1 + \sin(a + b)}$$

$$\sin a + \sin b - \cos a - \cos b = 2 \cos \frac{1}{2}(a - b) \sqrt{1 - \sin(a + b)}$$

$$\sin a - \sin b + \cos a + \cos b = 2 \cos \frac{1}{2}(a + b) \sqrt{1 + \sin(a - b)}$$

$$\sin a - \sin b - \cos a - \cos b = 2 \cos \frac{1}{2}(a + b) \sqrt{1 - \sin(a - b)}$$

$$\sin a + \sin b + \cos a - \cos b = -2 \sin \frac{1}{2}(a + b) \sqrt{1 - \sin(a - b)}$$

10) $tgn\,a \pm cotg\,b = \pm \dfrac{cos(a \mp b)}{cos\,a\,sin\,b}$

$cotg\,b \pm tgn\,a = \dfrac{cos(a \mp b)}{cos\,a\,sin\,b}$

11) $cotg\,a + tgn(a \pm b) = \dfrac{cos\,b}{cos\,a\,cos(a \pm b)}$

$cotg\,a - tgn(a \pm b) = \dfrac{cos(2a \pm b)}{sin\,a\,cos(a \pm b)}$

12) $cotg(a \pm b) + tgn(a \mp b) = \dfrac{2\,cos\,2b}{sin\,2a \pm sin\,2b}$

$cotg(a \pm b) - tgn(a \mp b) = \dfrac{2\,cos\,2a}{sin\,2a \pm sin\,2b}$

13) $tgn\,\dfrac{a}{2} + cotg\,a = cotg\,\dfrac{a}{2} - cotg\,a$

14) $cotg\,\dfrac{a}{2}\,tgn\,a - 1 = tgn\,\dfrac{a}{2}\,tgn\,a + 1$

15) $\dfrac{tgn\,a \mp tgn\,b}{cotg\,b \pm tgn\,a} = tgn\,b\,tgn(a \mp b)$

16) $\dfrac{tgn\,a \mp tgn\,b}{cotg\,a \pm tgn\,b} = tgn\,a\,tgn(a \pm b)$

17) $\dfrac{cotg\,b \mp cotg\,a}{cotg\,b \pm tgn\,a} = \dfrac{tgn(a \pm b)}{tgn\,a}$

18) $\dfrac{cotg\,b \mp cotg\,a}{cotg\,a \pm tgn\,b} = \dfrac{tgn(a \mp b)}{tgn\,b}$

19) $\dfrac{cotg\,b \pm tgn\,a}{cotg\,b \mp tgn\,a} = \dfrac{cos(a \mp b)}{cos(a \pm b)}$

20) $\dfrac{cotg\,a \mp tgn\,b}{cotg\,b \pm tgn\,a} = \dfrac{cos(a \pm b)}{cos(a \mp b)} \cdot \dfrac{tgn\,b}{tgn\,a}.$

21) $sin\,a\,cos\,b = \dfrac{sin(a \pm b)}{1 \pm cotg\,a\,tgn\,b} = \dfrac{1}{2}[sin(a+b) + sin(a-b)]$

$cos\,a\,sin\,b = \pm \dfrac{sin(a \pm b)}{1 \pm tgn\,a\,tgn\,b} = \dfrac{1}{2}[sin(a+b) - sin(a-b)]$

22) $tgn\,a\,cotg\,b = \dfrac{cotg\,b \pm tgn\,a}{cotg\,a \pm tgn\,b} = \dfrac{sin(a+b) + sin(a-b)}{sin(a+b) - sin(a-b)}$

$cotg\,a\,tgn\,b = \dfrac{cotg\,a \pm tgn\,b}{cotg\,b \pm tgn\,a} = \dfrac{sin(a+b) - sin(a-b)}{sin(a+b) + sin(a-b)}$

23) $\dfrac{tgn\, a}{tgn\, b} = \dfrac{\sin 2a + \sin 2b + \sin 2(a-b)}{\sin 2a + \sin 2b - \sin 2(a-b)}$

24) $\dfrac{tgn\, a}{tgn(a+b)} = \dfrac{\sin 2a - \sin 2b + \sin 2(a+b)}{\sin 2a + \sin 2b + \sin 2(a+b)}$

25) $\dfrac{tgn\, a}{tgn(a-b)} = \dfrac{\sin 2a + \sin 2b + \sin 2(a-b)}{\sin 2a - \sin 2b + \sin 2(a-b)}$

26) $\sin^2 a + tgn^2 a = \sec^2 a - \cos^2 a = \dfrac{1 - \cos^4 a}{\cos^2 a}$

27) $\sin^2 a + cotg^2 a = cosec^2 a - \cos^2 a$

28) $\sec^2 a + cosec^2 a = (tgn\, a + cotg\, a)^2 = \sec^2 a\, cosec^2 a$

29) $\cos^2 a - \sin^2 b = \cos^2 b - \sin^2 a = \cos^2 a \cos^2 b - \sin^2 a \sin^2 b$
$= \cos(a+b)\cos(a-b)$

30) $\sin^2 a + \sin^2 b + \cos^2(a \pm b) = 1 \mp 2 \sin a \sin b \cos(a \pm b)$
$\sin^2 a + \sin^2 b - \cos^2(a \pm b) = 1 - 2 \cos a \cos b \cos(a \pm b)$
$\cos^2 a + \cos^2 b + \sin^2(a \pm b) = 2\{1 \pm \sin a \sin b \cos(a \pm b)\}$
$\cos^2 a + \cos^2 b - \sin^2(a \pm b) = 2 \cos a \cos b \cos(a \pm b)$

31) $\sin^2(a+b) + \cos^2(a-b) = 1 + \sin 2a \sin 2b$
$\sin^2(a+b) - \cos^2(a-b) = \cos 2a \cos 2b$

32) $\sin \frac{1}{2}(a+c) \cos \frac{1}{2}(a-c) + \sin \frac{1}{2}(b-c) \cos \frac{1}{2}(b+c)$
$= \frac{1}{2}\{\sin a + \sin b\}$

33) $\cos a \cos(b-c) + \cos b \sin(c-a) + \cos c \sin(a-b) = 0$
$\sin a \cos(b+c) + \cos b \sin(c-a) - \sin c \cos(a+b) = 0$
$\cos a \cos(b+c) + \sin b \sin(c-a) + \cos c \cos(a+b) = 0$

§. 154.

Sätze über die Winkel a, b, c, wenn $a + b + c = 2R$ ist.

1) $\sin a + \sin b + \sin c = 4 \cos \frac{a}{2} \cos \frac{b}{2} \cos \frac{c}{2}$

$\sin a + \sin b - \sin c = 4 \sin \frac{a}{2} \sin \frac{b}{2} \cos \frac{c}{2}$

2) $\cos a + \cos b + \cos c = 1 + 4 \sin \frac{a}{2} \sin \frac{b}{2} \sin \frac{c}{2}$

$\cos a + \cos b - \cos c = 4 \cos \frac{a}{2} \cos \frac{b}{2} \sin \frac{c}{2} - 1$

3) $\operatorname{tgn} a + \operatorname{tgn} b + \operatorname{tgn} c = \operatorname{tgn} a \operatorname{tgn} b \operatorname{tgn} c$

$\operatorname{cotg} a + \operatorname{cotg} b + \operatorname{cotg} c = \operatorname{cotg} a \operatorname{cotg} b \operatorname{cotg} c + \operatorname{cosec} a \operatorname{cosec} b \operatorname{cosec} c$

4) $\operatorname{tgn} a \operatorname{tgn} b + \operatorname{tgn} b \operatorname{tgn} c + \operatorname{tgn} a \operatorname{tgn} c = 1 + \sec a \sec b \sec c$

$\operatorname{cotg} a \operatorname{cotg} b + \operatorname{cotg} b \operatorname{cotg} c + \operatorname{cotg} a \operatorname{cotg} c = 1$

5) $\sin^2 a + \sin^2 b + \sin^2 c = 2(1 + \cos a \cos b \cos c)$

$\sin^2 a + \sin^2 b - \sin^2 c = 2 \sin a \sin b \cos c$

$\cos^2 a + \cos^2 b + \cos^2 c = 1 - 2 \cos a \cos b \cos c$

$\cos^2 a + \cos^2 b - \cos^2 c = 1 - 2 \sin a \sin b \cos c$

$\sin^2 a + \sin^2 b - \cos^2 c = 1 + 2 \cos a \cos b \cos c$

$\sin^2 a + \cos^2 b + \cos^2 c = 2(1 - \cos a \sin b \sin c)$

$\sin^2 a - \cos^2 b - \cos^2 c = 2 \cos a \cos b \cos c$

6) $$\frac{\sin a}{\sin b} = \frac{\operatorname{cotg} \frac{b}{2} + \operatorname{cotg} \frac{c}{2}}{\operatorname{cotg} \frac{a}{2} + \operatorname{cotg} \frac{c}{2}}$$

7) $$\operatorname{tgn} \frac{a}{2} \operatorname{tgn} \frac{b}{2} = \frac{\sin a + \sin b - \sin c}{\sin a + \sin b + \sin c}$$

8) $$\frac{\sin 2a + \sin 2b + \sin 2c}{\sin a + \sin b + \sin c} = 8 \sin \frac{a}{2} \sin \frac{b}{2} \sin \frac{c}{2}.$$

§. 155.

Longimetrische Relationen.

Sei φ^0, φ', φ'' die Anzahl von Graden, Minuten und Secunden, $arc\,\varphi^0$, $arc\,\varphi'$, $arc\,\varphi''$ die Länge des Bogens von φ^0, φ', φ'', ferner R^0, R', R'' die Länge des Halbmessers ausgedrückt in Graden, Minuten und Secunden. Die Zahlen in Klammern sind Logarithmen.

1) $arc\,\varphi = \varphi^0\, arc\, 1^0 = \varphi'\, arc\, 1' = \varphi''\, arc\, 1''$

2) $arc\, 1^0 = \frac{1}{R^0}$, $arc\, 1' = \frac{1}{R'}$, $arc\, 1'' = \frac{1}{R''}$

3) $arc\,\varphi = \frac{\varphi^0}{R^0} = \frac{\varphi'}{R'} = \frac{\varphi''}{R''}$

4) $arc\,1^0 = 0{,}01745329252 = [0{,}2418773676 - 2]$
$arc\,1' = 0{,}00029088804563 = [0{,}4637261172072 - 4]$
$arc\,1'' = 0{,}000004848136809 = [0{,}6855748668235 - 6]$.

Sei nun $\varphi < 40'$, so wird

5) $sin\,\varphi = arc\,\varphi = \varphi'\,arc\,1' = \varphi''\,arc\,1''$

6) $\varphi' = \frac{sin\,\varphi}{sin\,1'} = sin\,\varphi\,.\,3437'\,74677078$

$\varphi'' = \frac{sin\,\varphi}{sin\,1''} = sin\,\varphi\,.\,206264''\,806247096.$

Man merke noch

7) $log\,R^0 = log\,57^0\,2957795131 = 1{,}75812263241$
$log\,R' = log\,3437'\,74677078 = 3{,}53627388279$
$log\,R'' = log\,206264''\,806\ldots = 5{,}31442513318.$

Die Länge des Radius ist $= 1$ genommen.
Die Zahlen in Klammern sind Logarithmen.

Trigonometrie.

§. 156.

Das geradlinige Dreieck.

Seien α, β, γ die Winkel, a, b, c die ihnen gegenüberliegenden Seiten, ferner $2s = a + b + c$ und f der Flächeninhalt.

1) $a = b\cos\gamma + c\cos\beta$

2) $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\gamma$

3) $$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$$

4) $$\sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}}$$

5) $$\cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}}$$

6) $$tgn\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}}$$

7) $$\frac{a+b}{c} = \frac{\cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta)}{\sin\frac{1}{2}\gamma}$$ 8) $$\frac{a-b}{c} = \frac{\sin\frac{1}{2}(\alpha-\beta)}{\cos\frac{1}{2}\gamma}$$

9) $$tgn\frac{1}{2}(\alpha-\beta) = \frac{a-b}{a+b}\cot g\frac{\gamma}{2}$$

10) $$f = \frac{ab}{2}\sin\gamma = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} = \frac{a^2}{2}\frac{\sin\beta\sin\gamma}{\sin\alpha}$$

Es bezeichne h_a, h_b, h_c die zu den Seiten a, b, c gehörigen Höhen, m_a, m_b, m_c die Mittellinien (d. h. die von den Spitzen zu den Halbirungspunkten gezogenen Geraden), w_a, w_b, w_c die die Winkel α, β, γ halbirenden Transversalen; ferner r den Radius des umschriebenen, ϱ den des eingeschriebenen Kreises, ferner ϱ_α, ϱ_β, ϱ_γ die Radien der drei Berührungskreise.

11) $h_a = \frac{2f}{a} = \frac{2}{a}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} = a\,\frac{\sin\beta\,\sin\gamma}{\sin\alpha}$

12) $r = \frac{a}{2\sin\alpha} = \frac{abc}{4f} = \frac{s}{4\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}}$

13) $\varrho = (s-a)\,tgn\,\frac{\alpha}{2} = 4r\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}$

14) $\varrho_a = \frac{f}{s-a} = \sqrt{\frac{s(s-b)(s-c)}{s-a}}$

$= s\,tgn\,\frac{\alpha}{2} = (s-b)\,cotg\,\frac{\gamma}{2} = (s-c)\,cotg\,\frac{\beta}{2}$

$= 4r\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}.$

Man merke folgende Formeln:

15) $a = \frac{2}{3}\sqrt{2(m_b^2 + m_c^2) - m_a^2}.$

Sei $2M = m_a + m_b + m_c$, so wird:

16) $f = \frac{4}{3}\sqrt{M(M-m_a)(M-m_b)(M-m_c)}$

Sei $2H = \frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c}$, so wird:

17) $f = \frac{1}{4\sqrt{H\left(H-\frac{1}{h_a}\right)\left(H-\frac{1}{h_b}\right)\left(H-\frac{1}{h_c}\right)}}$

Es ist weiter

18) $h_a = \frac{3f}{\sqrt{2(m_b^2 + m_c^2) - m_a^2}}$

19) $m_a = f\sqrt{2\left(\frac{1}{h_b^2} + \frac{1}{h_c^2}\right) - \frac{1}{h_a^2}}$

20) $\frac{1}{\varrho} = \frac{1}{\varrho_\alpha} + \frac{1}{\varrho_\beta} + \frac{1}{\varrho_\gamma} = \frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c}$

Weitere Relationen findet man in Heis, Eschweiler's Lehrbuch der Geometrie, III. Thl. Köln 1875.

21) $(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) = (h_a+h_b+h_c)\left(\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}\right)$

22) $m_a = \sqrt{\frac{1}{2}\left\{b^2 + c^2 - \frac{1}{2}a^2\right\}}$

23) $f = \frac{\varrho_\alpha \varrho_\beta \varrho_\gamma}{s} = \sqrt{\varrho\, \varrho_\alpha \varrho_\beta \varrho_\gamma}$

24) $\frac{1}{h_a} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\varrho_\beta} + \frac{1}{\varrho_\gamma}\right)$

25) $\varrho_\alpha + \varrho_\beta + \varrho_\gamma = 4r + \varrho$

26) $$a = b\,\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = b(\cos\gamma + \sin\gamma\,\mathrm{cotg}\,\beta) = 2r\sin\alpha$$

$$= \frac{b}{\cos\gamma + \sin\gamma\,\mathrm{cotg}\,\alpha} = b\cos\gamma \pm \sqrt{c^2 - b^2\sin^2\gamma}$$

$$= \varrho\left(\mathrm{cotg}\,\frac{\beta}{2} + \mathrm{cotg}\,\frac{\gamma}{2}\right)$$

$$= \frac{s\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}} = \frac{\varrho_\alpha}{s}(\varrho_\beta + \varrho_\gamma) = \frac{\varrho\cos\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}}$$

$$= \frac{\varrho_\alpha\cos\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}}$$

$$= f\left\{\frac{1}{\varrho_\beta} + \frac{1}{\varrho_\gamma}\right\} = f\left\{\frac{1}{\varrho} - \frac{1}{\varrho_\alpha}\right\} = \varrho_\alpha\left(\mathrm{tgn}\,\frac{\beta}{2} + \mathrm{tgn}\,\frac{\gamma}{2}\right)$$

$$= \frac{c - b}{\cos\varphi},\ \text{wenn}\ \mathrm{tgn}^2\varphi = \frac{4bc}{(b-c)^2}\sin^2\frac{\alpha}{2}$$

27) $$\sin\alpha = \frac{a}{c}\sin\gamma = \frac{2}{bc}f = \sin(\beta + \gamma)$$

$$= \sqrt{1 - \left(\frac{c^2 + b^2 - a^2}{2bc}\right)^2}$$

$$= \frac{a}{2r} = 2\varrho_\alpha\,\frac{\sqrt{\varrho_\beta\varrho_\gamma + \varrho_\alpha(\varrho_\beta + \varrho_\gamma)}}{(\varrho_\alpha + \varrho_\beta)(\varrho_\gamma + \varrho_\alpha)}$$

$$= 2\varrho\,\frac{\sqrt{\varrho_\beta\varrho_\gamma - \varrho(\varrho_\beta + \varrho_\gamma)}}{(\varrho_\beta - \varrho)(\varrho_\gamma - \varrho)}$$

$$= \frac{1}{2r}\sqrt{(\varrho_\alpha - \varrho)(\varrho_\beta + \varrho_\gamma)} = \frac{a^2}{2f}\sin\beta\sin\gamma$$

$$= \frac{a^2\sin(\gamma - \beta)}{c^2 - b^2}$$

$$28)\quad \sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}} = \frac{\varrho}{4r\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}}$$

$$= \frac{a}{s-a}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}$$

$$= \frac{\varrho_\alpha}{4r\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}} = \frac{\varrho}{\sqrt{(\varrho_\beta-\varrho)(\varrho_\gamma-\varrho)}}$$

$$= \frac{\varrho_\alpha}{\sqrt{(\varrho_\alpha+\varrho_\beta)(\varrho_\gamma+\varrho_\alpha)}} = \sqrt{\frac{\varrho_\alpha-\varrho}{4r}}$$

$$29)\quad \cos\alpha = \pm\sqrt{\frac{c^2-a^2\sin^2\gamma}{c^2}} = -\cos(\beta+\gamma) = \frac{c^2+b^2-a^2}{2bc}$$

$$= \frac{b-a\cos\gamma}{\sqrt{a^2+b^2-2ab\cos\gamma}}$$

$$= \frac{b}{c}\sin^2\gamma \pm \frac{\cos\gamma}{c}\sqrt{c^2-b^2\sin^2\gamma}.$$

$$30)\quad tgn\,\alpha = \frac{a\sin\gamma}{\sqrt{c^2-a^2\sin^2\gamma}} = \frac{a\sin b}{c-a\cos b}$$

$$= \sqrt{\left(\frac{2bc}{c^2+b^2-a^2}\right)^2-1}$$

Sei $\alpha < 90^0$ und $a\cos\gamma = b\sin^2\varphi$, so wird $tgn\,\alpha = \frac{a\sin\gamma}{b\cos^2\varphi}$.

Sei $\alpha > 90^0$ und $-a\cos\gamma = b\,tgn^2\varphi$, so wird

$$tgn\,\alpha = \frac{a}{b}\sin\gamma\cos^2\varphi.$$

§. 157.

Das sphärische Dreieck.

Seien α, β, γ die Winkel, a, b, c die ihnen gegenüberliegenden Seiten, ferner

$$2\sigma = \alpha+\beta+\gamma$$
$$2s = a+b+c$$

und f die Fläche des Dreieckes für den Radius $= 1$.

A. Die vier Grundformeln.

1) $\cos a = \cos\alpha \sin b \sin c + \cos b \cos c$

2) $\cos\alpha = \cos a \sin\beta \sin\gamma - \cos\beta \cos\gamma$

3) $\operatorname{cotg} a \sin c = \operatorname{cotg}\alpha \sin\beta + \cos c \cos\beta$

4) $\dfrac{\sin\alpha}{\sin a} = \dfrac{\sin\beta}{\sin b} = \dfrac{\sin\gamma}{\sin c}$

B. Abgeleitete Formeln.

5)
$$\sin\frac{a}{2} = \sqrt{\frac{\sin(\sigma-\beta)\sin(\sigma-\gamma)}{\sin\beta\sin\gamma}}$$
$$\cos\frac{a}{2} = \sqrt{\frac{\sin\sigma\sin(\sigma-\alpha)}{\sin\beta\sin\gamma}}$$
$$\operatorname{tgn}\frac{a}{2} = \sqrt{\frac{\sin(\sigma-\beta)\sin(\sigma-\gamma)}{\sin\sigma\sin(\sigma-\alpha)}}$$

6)
$$\sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{-\cos s\cos(s-a)}{\sin b\sin c}}$$
$$\cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{\cos(s-b)\cos(s-c)}{\sin b\sin c}}$$
$$\operatorname{tgn}\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{-\cos s\cos(s-a)}{\cos(s-b)\cos(s-c)}}$$

C. Die Gauss'schen Gleichungen.

7)
$$\sin\frac{1}{2}(a+b)\cos\frac{1}{2}\gamma = \cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta)\cos\frac{1}{2}c$$
$$\sin\frac{1}{2}(a-b)\sin\frac{1}{2}\gamma = \sin\frac{1}{2}(\alpha-\beta)\cos\frac{1}{2}c$$
$$\cos\frac{1}{2}(a+b)\cos\frac{1}{2}\gamma = \cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\sin\frac{1}{2}c$$
$$\cos\frac{1}{2}(a-b)\sin\frac{1}{2}\gamma = \sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\sin\frac{1}{2}c$$

NB. Ist $a + b \lesseqgtr 180^0$, so muss auch $\alpha + \beta \lesseqgtr 180^0$ sein und umgekehrt.

(Gauss, Theoria Motus, 1809, p. 51, ohne Beweis.)

D. Die Neper'schen Gleichungen.

$$8)\quad tgn\,\frac{1}{2}(\alpha+\beta)=\frac{\cos\frac{1}{2}(a-b)}{\cos\frac{1}{2}(a+b)}\,tgn\,\frac{1}{2}\gamma$$

$$tgn\,\frac{1}{2}(\alpha-\beta)=\frac{\sin\frac{1}{2}(a-b)}{\sin\frac{1}{2}(a+b)}\,tgn\,\frac{1}{2}\gamma$$

$$tgn\,\frac{1}{2}(a+b)=\frac{\cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta)}{\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta)}\,cotg\,\frac{1}{2}c$$

$$tgn\,\frac{1}{2}(a-b)=\frac{\sin\frac{1}{2}(\alpha-\beta)}{\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta)}\,cotg\,\frac{1}{2}c$$

(Mirifici logar. canonis descriptio 1614, II, 6.)

E. Andere Gleichungen.

$$9)\quad f=r^2\pi\,\frac{a+b+c-180^0}{180^0}$$

$a+b+c-180^0$ ist stets positiv und wird der sphärische Excess des Dreieckes genannt und mit e bezeichnet.

$$10)\quad tgn\,\frac{e}{2}=tgn\,\frac{\beta}{2}\cdot tgn\,\frac{\gamma}{2}\ \text{(für ein rechtwinkliges Dreieck)}$$

$$11)\quad tgn\,\frac{e}{4}=\sqrt{tgn\,\frac{\sigma}{2}\cdot tgn\,\frac{1}{2}(\sigma-\alpha)\,.\,tgn\,\frac{1}{2}(\sigma-\beta)\,.\,tgn\,\frac{1}{2}(\sigma-\gamma)}$$

(die l'Huilier'sche Formel).

Seien h_a, h_b, h_c die drei Höhen des Dreieckes, so findet man:

$$12)\quad \sin h_a=\frac{2P}{\sin a},\ \text{wobei}$$

$$P=\sqrt{\sin s\cdot\sin(s-a)\,.\,\sin(s-b)\,.\,\sin(s-c)}$$

$$13)\quad \sin h_a=\frac{2Q}{\sin\beta\,\sin\gamma},\ \text{wobei}$$

$$Q=\sqrt{-\cos\sigma\,.\,\cos(\sigma-\alpha)\,.\,\cos(\sigma-\beta)\,.\,\cos(\sigma-\gamma)}$$

Sei r der Radius des dem sphärischen Dreiecke umschriebenen, ϱ der des eingeschriebenen Kreises, so wird:

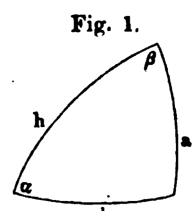
$$14)\quad tgn\, r = \frac{tgn\, \frac{a}{2}}{cos\,(\sigma - \alpha)}$$

$$15)\quad tgn\, \varrho = tgn\, \frac{\alpha}{2}\, sin\,(s - a).$$

F. Das rechtwinklige sphärische Dreieck (Fig. 1).

Sei h die Hypotenuse; a, b die Seiten; α, β die Winkel.

Fig. 1.

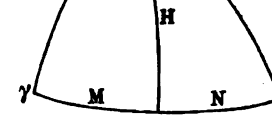


$$16)\quad cos\, h = cos\, a\, cos\, b$$
$$= cotg\, \alpha\, cotg\, \beta$$
$$17)\quad cos\, \alpha = tgn\, b\, cotg\, h$$
$$= cos\, a\, sin\, \beta$$
$$18)\quad cotg\, \alpha = cotg\, a\, sin\, b$$
$$19)\quad sin\, a = sin\, \alpha\, sin\, h.$$

G. Das getheilte schiefwinklige Dreieck (Fig. 2).

Sei H das Perpendikel von der Spitze α auf die Seite a, welche dadurch in zwei Abschnitte M und N getheilt wird. Der Winkel α erscheint dadurch in m und n zertheilt.

Fig. 2.



$$20)\quad tgn\, m = \frac{tgn\, b\, cotg\, c - cos\, \alpha}{sin\, \alpha}$$

(analog für n)

$$cotg\, m = \frac{cos\, \beta + cos\, \alpha\, cos\, \gamma}{sin\, \alpha\, cos\, \gamma}$$
$$= tgn\, \gamma\, cos\, b$$

$$21)\quad tgn\, M = \frac{cos\, c - cos\, a\, cos\, b}{sin\, a\, cos\, b} = cos\, \gamma\, tgn\, b$$

$$cotg\, M = \frac{tgn\, \gamma\, cotg\, \beta + cos\, a}{sin\, a}$$

$$22)\quad sin\, a\, sin\, H = 2\sqrt{sin\, s\, .\, sin\,(s - a)\, .\, sin\,(s - b)\, .\, sin\,(s - c)}$$
$$sin\, \alpha\, sin\, H = 2\sqrt{-\, cos\, \sigma\, cos\,(\sigma - \alpha)\, cos\,(\sigma - \beta)\, cos\,(\sigma - \gamma)}$$

23) $tgn\,\frac{1}{2}(m+n)\,tgn\,\frac{1}{2}(m-n)=\frac{\sin(b-c)}{\sin(b+c)}$

$$\frac{tgn\,\frac{1}{2}(m-n)}{tgn\,\frac{1}{2}(m+n)}=tgn\,\frac{1}{2}(\beta+\gamma)\,tgn\,\frac{1}{2}(\beta-\gamma)$$

24) $tgn\,\frac{1}{2}(M+N)\,tgn\,\frac{1}{2}(M-N)=tgn\,\frac{1}{2}(b+c)\,tgn\,\frac{1}{2}(b-c)$

$$\frac{tgn\,\frac{1}{2}(M-N)}{tgn\,\frac{1}{2}(M+N)}=\frac{\sin(\beta-\gamma)}{\sin(\beta+\gamma)}$$

25) $\frac{tgn\,m}{tgn\,n}=\frac{tgn\,M}{tgn\,N}$

$$\frac{\sin(m+n)}{\sin(m-n)}=\frac{\sin(M+N)}{\sin(M-N)}$$

26) $\frac{\cos m}{\cos n}=\frac{tgn\,c}{tgn\,b}$

27) $\frac{\sin M}{\sin N}=\frac{tgn\,\beta}{tgn\,\gamma},\quad \frac{\cos M}{\cos N}=\frac{\cos b}{\cos c}.$

H. Das schiefwinklige Dreieck.

Alle Winkel sind spitz und die Seiten kleiner als der Quadrant.

28) $\sin a\,cotg\,\alpha=\sin b\,\{\cos a\sin\gamma-\cos\gamma\,cotg\,\beta\}$

29) $\sin\alpha\,cotg\,a=\sin\beta\,\{\cos\alpha\sin c+\cos c\,cotg\,b\}$

30) $\sin\beta\sin\gamma-\cos\beta\cos\gamma\cos a=\sin b\sin c+\cos b\cos c\cos\alpha$
(Cagnoli'sche Gleichung, Traité de Trigon., p. 326.)

31) $\sin\frac{1}{2}(a+b)\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\,cotg\,\frac{1}{2}c$

$$=\cos\frac{1}{2}(a-b)\cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta)\,cotg\,\frac{1}{2}\gamma$$

32) $tgn\,\frac{1}{2}\alpha+tgn\,\frac{1}{2}\beta=2\,\frac{\sin\frac{1}{2}c\cos\frac{1}{2}(a-b)}{\sin s\,.\,tgn\,\frac{1}{2}\gamma}$

33) $tgn\,\frac{1}{2}\alpha\,tgn\,\frac{1}{2}\beta=\frac{\sin(s-c)}{\sin s}$

34) $$\frac{tgn\,\frac{1}{2}(a-b)}{tgn\,\frac{1}{2}(a+b)} = \frac{tgn\,\frac{1}{2}(\alpha-\beta)}{tgn\,\frac{1}{2}(\alpha+\beta)}$$

35) $$tgn\,\frac{1}{2}\,a\,.\,tgn\,\frac{1}{2}\,b = -\frac{\cos\sigma}{\cos(\sigma-\gamma)}$$

36) $$tgn\,\frac{1}{2}\,a + tgn\,\frac{1}{2}\,b = 2\,\frac{\cos\frac{1}{2}\,\gamma\,\cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta)}{\cos(\gamma-\sigma)\,cotg\,\frac{1}{2}\,c}$$

$$tgn\,\frac{1}{2}\,a - tgn\,\frac{1}{2}\,b = 2\,\frac{\sin\frac{1}{2}\,\gamma\,\sin\frac{1}{2}(\alpha-\beta)}{\cos(\sigma-\gamma)\,cotg\,\frac{1}{2}\,c}$$

37) $$cotg\,\frac{1}{2}\,\alpha + cotg\,\frac{1}{2}\,\beta = 2\,\frac{\sin\frac{1}{2}\,c\,\cos\frac{1}{2}(a-b)}{\sin(s-c)\,tgn\,\frac{1}{2}\,\gamma}$$

$$cotg\,\frac{1}{2}\,\alpha - cotg\,\frac{1}{2}\,\beta = \frac{2\cos\frac{1}{2}\,c\,\sin\frac{1}{2}(a-b)}{\sin(s-c)\,tgn\,\frac{1}{2}\,\gamma}$$

38) $$cotg\,\frac{1}{2}\,a + cotg\,\frac{1}{2}\,b = \frac{2\cos\frac{1}{2}\,\gamma\,\cos\frac{1}{2}(\alpha-\beta)}{-\cos\sigma\,cotg\,\frac{1}{2}\,c}$$

$$cotg\,\frac{1}{2}\,a - cotg\,\frac{1}{2}\,b = \frac{2\sin\frac{1}{2}\,\gamma\,\sin\frac{1}{2}(\alpha-\beta)}{-\cos\sigma\,cotg\,\frac{1}{2}\,c}$$

39) $$\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin\gamma} = \frac{\cos a+\cos b}{1+\cos c}$$

$$\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\sin\gamma} = \frac{\cos b-\cos a}{1-\cos c}$$

40) $$\frac{\sin a+\sin b}{\sin c} = \frac{\sin\alpha+\sin\beta}{\sin\gamma}$$

$$\frac{\sin a-\sin b}{\sin c} = \frac{\sin\alpha-\sin\beta}{\sin\gamma}$$

$$41)\quad \frac{\sin(a+b)}{\sin c} = \frac{\cos\alpha + \cos\beta}{1-\cos\gamma}$$

$$\frac{\sin(a-b)}{\sin c} = \frac{\cos\beta - \cos\alpha}{1+\cos\gamma}$$

Wir unterlassen es, weitere Formeln anzuführen, indem wir auf Klügel's mathematisches Wörterbuch, V. Thl., verweisen, woselbst auch die ältere Literatur sich vollständig findet.

Differentialformeln.

$$42)\quad da = \cos\gamma\, db + \cos\beta\, dc + \sin b \sin\gamma\, d\alpha$$

$$43)\quad \operatorname{cotg} a\, da + \operatorname{cotg}\beta\, d\beta = \operatorname{cotg} b\, db + \operatorname{cotg}\alpha\, d\alpha$$

$$44)\quad \sin a\, d\beta = \sin\gamma\, db - \cos a \sin\beta\, dc - \sin b \cos\gamma\, d\alpha$$

$$45)\quad d\alpha = -\cos c\, d\beta - \cos b\, d\gamma + \sin b \sin\gamma\, da$$

§. 158.

Berechnung der ebenen Dreiecke.

Seien a, b, c die Seiten, α, β, γ die ihnen gegenüberliegenden Winkel, f der Flächeninhalt.

I. Gegeben α, β, γ. Gesucht α, b, c.

$$b = a\,\frac{\sin\beta}{\sin\alpha},\quad c = a\,\frac{\sin\gamma}{\sin\alpha}$$

$$\alpha = 180^0 - (\beta+\gamma)$$

$$f = \frac{1}{2}\,c^2\,\frac{\sin\alpha\sin\beta}{\sin\gamma}$$

$$d\alpha = -\,d\beta - d\gamma$$

$$db = \frac{\sin\beta\, da - b\cos\alpha\, d\alpha + a\cos\beta\, d\beta}{\sin\alpha}$$

$$dc = \frac{\sin\gamma\, da - c\cos\alpha\, d\alpha + a\cos\gamma\, d\gamma}{\sin\alpha}$$

II. Gegeben b, c, α. Gesucht β, γ, a.

Es sei $b > c$, demnach $\beta > \gamma$.

Man hat

$$\operatorname{tyn} n = \frac{2\sin\frac{1}{2}\alpha}{b-c}\sqrt{b\,c}$$

$$a = \frac{b - c}{\cos n}$$

$$\frac{\gamma + \beta}{2} = \frac{180^0 - \alpha}{2}$$

$$tgn\,\frac{\beta - \gamma}{2} = \frac{b - c}{b + c}\,cotg\,\frac{\alpha}{2}$$

$$f = \frac{1}{2}\,b\,c\sin\alpha$$

$$d\,a = \frac{a\cos\gamma\,d\,b + a\cos\beta\,d\,c + b\,c\sin\alpha\,d\,\alpha}{a}$$

$$= \frac{(b - c\cos\alpha)\,d\,b + (c - b\cos\alpha)\,d\,c + b\,c\sin\alpha\,d\,\alpha}{\sqrt{b^2 + c^2 - 2\,b\,c\cos\alpha}}$$

$$d\beta = \frac{b\,d\,b - b\cos\gamma\,d\,a - b\cos\alpha\,d\,c}{a\,c\sin\beta}$$

$$d\gamma = \frac{c\,d\,c - c\cos\beta\,d\,a - c\cos\alpha\,d\,b}{a\,c\sin b}$$

III. Gegeben b, c, β. Gesucht α, γ, a.

$$\sin\gamma = \frac{c}{b}\sin\beta$$

$$\alpha = 180^0 - (\beta + \gamma)$$

$$a = \frac{b\sin\alpha}{\sin\beta}$$

$$d\,a = \frac{b\,d\,b - b\cos\alpha\,d\,c - a\,c\sin\beta\,d\,\beta}{b\cos\gamma}$$

$$d\,\alpha = \frac{\sin\beta\,d\,a - \sin\alpha\,d\,b + a\cos\beta\,d\,\beta}{b\cos\alpha}$$

$$d\,\gamma = \frac{\sin\beta\,d\,c - \sin\gamma\,d\,b + c\cos\beta\,d\,\beta}{b\cos\gamma}$$

IV. Gegeben a, b, c. Gesucht α, β, γ.

$$2\,s = a + b + c$$

$$tgn\,\alpha = \sqrt{\frac{(s - b)\,(s - c)}{s\,(s - a)}}$$

$$d\,\alpha = \frac{2\,a\,b\,c\,d\,a - (a^2 + b^2 - c^2)\,c\,d\,b - (a^2 + c^2 - b^2)\,b\,d\,c}{2\,b\,c\sqrt{s\,(s - a)\,(s - b)\,(s - c)}}$$

$$f = \sqrt{s\,(s - a)\,(s - b)\,(s - c)}$$

Anmerkung. Rechnet man mit n stelligen Logarithm‹ und bezeichnet mit M den Modull $= 0{,}4342945$, sowie mit ε d Zahl 206264,8 ... (vergl. §. 155), so wird die Winkelzunahme Secunden

$$\varDelta x'' = \frac{\varepsilon}{M \,.\, 10^n \, cotg\, x} (\varDelta \log \sin x)$$

$$\varDelta x'' = - \frac{\varepsilon}{M \,.\, 10^n \, tgn\, x} (\varDelta \log \cos x)$$

$$\varDelta x'' = \frac{\varepsilon \sin 2x}{2 \,.\, M \,.\, 10^n} (\varDelta \log tgn\, x).$$

Diese Gleichungen zeigen, wie genau man den Werth ein‹ Winkels durch Sinus, Cosinus und Tangente finden kann. Ma wird es immer vorziehen, den Winkelwerth durch Tangente z berechnen, weil in Folge der Grössen $tgn\, x$ und $cotg\, x$ der Fehl‹ beim Sinus und Cosinus sehr anwachsen kann.

§. 159.

Berechnung der rechtwinkligen sphärischen Dreieck‹

Seien die beiden Seiten a, b, die ihnen gegenüberliegende Winkel α, β, die Hypotenuse sei H. Gleichartig werden zw‹ Grössen hier genannt, wenn sie beide zugleich entweder $>$ odc $< 90^0$ sind.

I. Gegeben H, α. Gesucht a, b, β.

1) $\sin a = \sin H \sin \alpha$
2) $tgn\, b = tgn\, H \cos \alpha$
3) $cotg\, \beta = \cos H\, tgn\, \alpha$

Das Gesuchte ist $< 90^0$, wenn:	oder $> 90^0$, wenn:
1) $\alpha < 90^0$	$\alpha > 90^0$
2) H gleichartig mit α	H ungl. mit α
3) "	"

II. Gegeben H, a. Gesucht b, α, β.

1) $\cos b = \cos H : \cos a$
2) $\sin \alpha = \sin a : \sin H$
3) $\cos \beta = tgn\, a \,.\, cotg\, H.$

Das Gesuchte ist $< 90^0$, wenn:	oder $> 90^0$, wenn:
1) H gleichartig mit a	H ungl. mit a
2) $a < 90^0$	$a > 90^0$
3) H gleichartig mit a	H ungl. mit a.

III. Gegeben a, β. Gesucht b, H, α.

1) $tgn\, b = tgn\, \beta\, sin\, a$

2) $cotg\, H = cotg\, a\, cos\, \beta$

3) $cos\, \alpha = cos\, a\, sin\, \beta$

Das Gesuchte ist $< 90^0$, wenn:	oder $> 90^0$, wenn:
1) $\beta < 90^0$	$b > 90^0$
2) a gleichartig mit β	a ungl. mit β
3) $a < 90^0$	$a > 90^0$.

IV. Gegeben a, b. Gesucht H, α, β.

1) $cos\, H = cos\, a\, cos\, b$

2) $cotg\, \alpha = cotg\, a\, sin\, b$

3) $cotg\, \beta = cotg\, b\, sin\, a$

Das Gesuchte ist $< 90^0$, wenn:	oder $> 90^0$, wenn:
1) a gleichartig mit b	a ungl. mit b
2) $a < 90^0$	$a > 90^0$
3) $b < 90^0$	$b > 90^0$

V. Gegeben α, β. Gesucht a, b, H.

1) $cos\, H = cotg\, \alpha\, cotg\, \beta$

2) $cos\, a = cos\, \alpha : sin\, \beta$

3) $cos\, b = cos\, \beta : sin\, \alpha$.

Das Gesuchte ist $< 90^0$, wenn:	oder $> 90^0$, wenn:
1) α gleichartig mit β	α ungl. mit β
2) $\alpha < 90^0$	$\alpha > 90^0$
3) $\beta < 90^0$	$\beta > 90^0$.

VI. Gegeben a, α. Gesucht b, β, H.

1) $sin\, b = tgn\, a\, cotg\, \alpha$

2) $sin\, H = sin\, a : sin\, \alpha$

3) $sin\, \beta = cos\, \alpha : cos\, a$

Hier ist es zweifelhaft, ob das Gesuchte $\gtrless 90^0$ ist, dies muss aus der Aufgabe selbst gefolgert werden.

Anmerkung. Vertauscht man Winkel mit Seiten und Seite mit Winkeln, sowie das Wort „gleichartig" mit „ungleichartig" und umgekehrt, so gilt das Gesagte von einem schiefwinkligen Dreieck, dessen eine Seite = 90°, mit den Seiten α, β, den Winkeln a, b, wobei zugleich der der Seite 90° gegenüberliegende Winkel mit H zu bezeichnen ist.

§. 160.

Berechnung der schiefwinkligen sphärischen Dreiecke

Seien a, b, c die Seiten, α, β, γ die ihnen gegenüberliegenden Winkel,

$$2s = a + b + c, \quad 2\sigma = \alpha + \beta + \gamma.$$

I. Gegeben a, b, c. Gesucht α, β, γ.

Es muss die $\begin{Bmatrix}\text{Summe}\\ \text{Differenz}\end{Bmatrix}$ je zweier Seiten $\begin{Bmatrix}>\\ <\end{Bmatrix}$ die dritte sein.

Sei

$$L = \sqrt{\frac{\sin(s-a)\sin(s-b)\sin(s-c)}{\sin s}},$$

so wird

$$tgn\,\frac{\alpha}{2} = \frac{L}{\sin(s-a)}$$

$$d\alpha = \frac{da - \cos\gamma\, db - \cos\beta\, dc}{\sin c \sin\beta}$$

oder wenn

$$M = (\cos c - \cos a \cos b)\sin c$$

$$N = (\cos b - \cos a \cos c)\sin b$$

gesetzt wird:

$$d\alpha = \frac{1}{2}\left\{\frac{\sin a\, da}{L \sin s} - \frac{M db + N dc}{2L \sin b \sin c \sin s}\right\}$$

II. Gegeben α, β, γ. Gesucht a, b, c.

Es muss

$$6R > \alpha + \beta + \gamma > 2R,$$

ferner die Summe zweier Winkel < als der um 180° vermehrte dritte

$$tgn\,\frac{1}{2}\,a = \sqrt{\frac{-\cos\sigma\cos(\sigma-\alpha)}{\cos(\sigma-\beta)\cos(\sigma-\gamma)}}$$

$$d\,a = \frac{d\,\alpha + \cos c\,d\,\beta + \cos b\,d\,\gamma}{\sin b\,\sin\gamma},$$

oder wenn

$$M = (\cos\gamma + \cos\alpha\cos\beta)\sin\gamma$$

$$N = (\cos\beta + \cos\alpha\cos\gamma)\sin\beta$$

gesetzt wird:

$$d\,a = \frac{\sin\alpha\,\sin\beta\,\sin\gamma\,d\,\alpha + M\,d\,\beta + N\,d\,\gamma}{2\sin\beta\,\sin\gamma\sqrt{-\cos\sigma\cos(\sigma-\alpha)\cos(\sigma-\beta)\cos(\sigma-\gamma)}}$$

III. Gegeben b, c, α. Gesucht γ, β, a.

Sei

$$tgn\,m = \cos\alpha\,tgn\,b$$

$$n = c - m,$$

so wird

$$tgn\,\beta = \pm\frac{tgn\,\alpha\,\sin m}{\sin n},\ c \gtrless m$$

$$\cos a = \frac{\cos b\,\cos n}{\cos m}.$$

Ist a sehr klein, so setze man

$$\cos p = \frac{\cos\frac{1}{2}\,\alpha}{\sin\frac{1}{2}\,(b+c)}\sqrt{\sin b\,\sin c}$$

sodann wird

$$\sin\frac{1}{2}\,a = \sin p\,\sin\frac{1}{2}\,(b+c)$$

$$d\,a = \cos\gamma\,d\,b + \cos\beta\,d\,c + \sin c\,\sin\beta\,d\,\alpha$$

$$d\,\beta = \frac{\sin^2\gamma\,d\,b - \cos a\,\sin\beta\,\sin\gamma\,d\,c - \sin c\,\sin\beta\,\cos\gamma\,d\,a}{\sin c\,\sin\alpha}$$

IV. Gegeben a, β, γ. Gesucht α, b, c.

Sei

$$cotg\,\lambda = \cos a\,tgn\,\beta,$$

so wird

$$\cos\alpha = \frac{\cos\beta}{\sin\lambda}\sin(\gamma-\lambda)$$

$$\sin b = \frac{\sin a\,\sin\beta}{\sin\alpha}$$

$$d\alpha = \sin b \sin \gamma \, d a - \cos c \, d\beta - \cos b \, d\gamma$$

$$d b = \frac{\sin^2 c \, d\beta + \sin b \sin c \cos \alpha \, d\gamma + \sin b \cos c \sin \gamma \, d a}{\sin a \sin \gamma}.$$

Man kann sich hier auch mit Vorthéil der Neper'sche Gleichungen bedienen, aus denen b und c berechnet werde kann, zur Auffindung von α dient sodann die Gauss'sche Gle chung.

V. Gegeben a, b, α. Gesucht β, γ, c.

$$\sin \beta = \frac{\sin b \sin \alpha}{\sin a}.$$

Es muss $\sin b \sin \alpha \overline{\gtrless} \sin a$ sein.

Sodann ergiebt sich γ und c aus den beiden Gleichungen:

$$\cot g \frac{\gamma}{2} = \frac{\sin \frac{1}{2}(a+b)}{\sin \frac{1}{2}(a-b)} \operatorname{tgn} \frac{1}{2}(\alpha - \beta)$$

$$\operatorname{tgn} \frac{c}{2} = \frac{\sin \frac{1}{2}(\alpha+\beta)}{\sin \frac{1}{2}(\alpha-\beta)} \operatorname{tgn} \frac{1}{2}(a - b)$$

	Ist			so ist	Zahl der Dreiecke
1	$\alpha < 90^0$	$b < 90^0$	$b \leqq a$	$\beta < 90^0$	1
2			$b > a$	$\beta \gtrless 90^0$	2
3		$b > 90^0$	$180^0 - b \leqq a$	$\beta > 90^0$	1
4			$180^0 - b > a$	$\beta \gtrless 90^0$	2
5	$\alpha > 90^0$	$b > 90^0$	$a \leqq b$	$\beta > 90^0$	1
6			$a > b$	$\beta \gtrless 90^0$	2
7		$b < 90^0$	$180^0 - b \geqq a$	$\beta < 90^0$	1
8			$180^0 - b < a$	$\beta \gtrless 90^0$	2

$$d\beta = \frac{\sin \alpha \cos b \, d b + \cos \alpha \sin b \, d\alpha - \sin \beta \cos a \, d a}{\cos \beta \sin a}$$

$$d\,c = \frac{d\,a - \cos\gamma\, d\,b - \sin c \sin\beta\, d\,\alpha}{\cos\beta}$$

$$d\,\gamma = \frac{d\,c - \cos\beta\, d\,a - \cos\alpha\, d\,b}{\sin b \sin\alpha}$$

VI. Gegeben α, β, a. Gesucht b, c, γ.

$$\sin b = \frac{\sin a \sin\beta}{\sin\alpha}$$

Es muss $\sin a \sin\beta \leqq \sin\alpha$.

$$cotg\, \frac{\gamma}{2} = \frac{\sin\frac{1}{2}(a + b)}{\sin\frac{1}{2}(a - b)}\, tgn\, \frac{1}{2}(\alpha - \beta)$$

$$tgn\, \frac{c}{2}\, c = \frac{\sin\frac{1}{2}(\alpha + \beta)}{\sin\frac{1}{2}(\alpha - \beta)}\, tgn\, \frac{1}{2}(a - b)$$

	Ist			so ist	Zahl der Dreiecke
1	$a < 90^0$	$\beta < 90^0$	$\beta < \alpha$	$b < 90^0$	1
2			$\beta > \alpha$	$b \gtrless 90^0$	2
3		$\beta > 90^0$	$\alpha + \beta > 180^0$	$b > 90^0$	1
4			$\alpha + \beta < 180^0$	$b \gtrless 90^0$	2
5	$\alpha > 90^0$	$\beta > 90^0$	$\alpha < \beta$	$b > 90^0$	1
6			$\alpha > \beta$	$b \gtrless 90^0$	2
7		$\beta < 90^0$	$\alpha + \beta < 180^0$	$b < 90^0$	1
8			$\alpha + \beta > 180^0$	$b \gtrless 90^0$	2

$$d\,b = \frac{\sin\beta \cos a\, d\,a + \cos\beta \sin a\, d\,\beta - \cos\alpha \sin b\, d\,\alpha}{\sin\alpha \cos b}$$

$$d\,\gamma = \frac{-\,d\,\alpha - \cos c\, d\,\beta + \sin b \sin\gamma\, d\,a}{\cos b}$$

$$d\,c = \frac{d\,\gamma + \cos b\, d\,\alpha + \cos a\, d\,\beta}{\sin a \sin\beta}$$

Analytische Geometrie der Ebene.

§. 161.

Analytische Geometrie des Punktes.

A. Cartesische Coordinaten.

1) Die Entfernung zweier Punkte $(x_1 y_1)$, $(x_2 y_2)$ ist

$$d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}.$$

Die Richtungscosinuse der Verbindenden sind:

$$\cos\alpha = \frac{x_1 - x_2}{d}, \quad \cos\beta = \frac{y_1 - y_2}{d}.$$

2) Die Coordinaten eines Punktes $(x_3 y_3)$, der diese Verbindende im Verhältnisse $m : n$ theilt:

$$x_3 = \frac{n x_1 \pm m x_2}{n \pm m}, \quad y_3 = \frac{n y_1 \pm m y_2}{n \pm m}.$$

3) Die Punkte $(x_1 y_1)$, $(x_2 y_2)$, $(x_3 y_3)$ liegen in einer Geraden, wenn

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

4) Der Flächeninhalt F des durch die drei Punkte $(x_1 y_1)$, $(x_2 y_2)$, $(x_3 y_3)$ gebildeten Dreieckes ist gegeben durch:

$$2F = \pm \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} \sin\theta.$$

θ ist dabei der Coordinatenwinkel.

5) Der Flächeninhalt F eines beliebigen Polygons ist gegeben durch:

$$\frac{2F}{\sin\theta} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{vmatrix} + \cdots \begin{vmatrix} x_n & y_n \\ x_1 & y_1 \end{vmatrix}$$

Ueber die Geometrie des Raumes von einer Dimension vergleiche: Balzer, Analytische Geometrie, §. 1.

B. Plücker's Liniencoordinaten.

1) Zu diesen gelangen wir am anschaulichsten auf folgendem Wege. Sei irgend ein schiefwinkliges Coordinatensystem gegeben und eine Gerade, die sowohl die X-, als auch die Y-Axe schneidet. Die Schnittlänge mit der Y-Axe nennen wir μ, jene mit der X-Axe λ. Sei ferner $x_1 y_1$ ein Punkt auf dieser Geraden, so wird

$$\frac{y_1}{\lambda - x_1} = \frac{\mu}{\lambda}$$

oder

$$x_1\left\{-\frac{1}{\lambda}\right\} + y_1\left\{-\frac{1}{\mu}\right\} + 1 = 0,$$

setzen wir $-\dfrac{1}{\lambda} = u$, $-\dfrac{1}{\mu} = v$, so wird

$$x_1 u + y_1 v + 1 = 0.$$

So erhalten wir die Gleichung des Punktes $(x_1 y_1)$. Hier sind u und v variabel. Setzt man etwa

$$u = a, \quad v = b,$$

so erhält man irgend eine bestimmte Gerade.

2) Es ist

$u \equiv Au + Bv + C = 0$ die allgem. Punktgleichung,

$A \equiv au + bv + 1 = 0$ die Normalgleichung.

3) Sind u und v die Coordinaten einer geraden Linie, so ist der senkrechte Abstand des Punktes

$$au + bv + 1 = 0$$

von der Geraden gegeben durch:

$$p = \frac{au + bv + 1}{\sqrt{u^2 + v^2}}.$$

4) $\left.\begin{matrix} u = 0 \\ v = 0 \end{matrix}\right\}$ ist die Gleichung des ∞ weiten Punktes der $\left\{\begin{matrix} X \\ Y \end{matrix}\right\}$-Axe.

$v = au$ ist die Gleichung eines Punktes, der auf der ∞ fernen Geraden liegt.

5) Seien $A = 0$ und $A_1 = 0$ die Gleichungen zweier Punkte in der Normalform, dann ist $A + \lambda A_1 = 0$ die Gleichung eines Punktes auf der Verbindungslinie. Vergl. 10).

Wird $\lambda = +1$, so ist es der Halbirungspunkt von $A = 0$ und $A_1 = 0$.

Wird $\lambda = -1$, so ist es der unendlich ferne Punkt dieser Geraden.

6) Drei Punkte $u_1 = 0$, $u_2 = 0$, $u_3 = 0$ liegen auf einer Geraden, wenn es drei Factoren $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ giebt, so dass

$$\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 u_3 = 0.$$

7) Die Coordinaten der Geraden, welche die beiden Punkte

$$A_1 \equiv a_1 u + b_1 v + 1 = 0$$
$$A_2 \equiv a_2 u + b_2 v + 1 = 0$$

verbindet, lauten

$$u = \frac{b_1 - b_2}{a_1 b_2 - a_2 b_1}, \quad v = \frac{a_2 - a_1}{a_1 b_2 - a_2 b_1}.$$

8) Wird der Abstand zwischen $A_1 = 0$ und $A_2 = 0$ im Verhältnisse $m : n$ getheilt, so ist die Gleichung des Theilpunktes gegeben durch

$$\frac{A_1 n \pm A_2 m}{n \pm m} = 0.$$

9) Seien $A_1 = 0$, $A_2 = 0$, $A_3 = 0$, die Gleichungen der Eckpunkte eines Dreieckes, so ist

$$\frac{1}{3}(A_1 + A_2 + A_3) = 0$$

die Gleichung des Schwerpunktes.

10) Seien $A_1 = 0$, $A_2 = 0$ die Gleichungen zweier Punkte, so ist $A_1 - \varkappa A_2 = 0$ die Gleichung eines auf der Verbindungsgeraden liegenden Punktes und es ist $\varkappa$ das Verhältniss der Perpendikel, welche von den beiden Punkten auf eine beliebige, durch den Punkt $A_1 - \varkappa A_2 = 0$ gehende Gerade gefällt werden.

11) Seien $A_1 = 0$, $A_2 = 0$, $A_1 - \varkappa A_2 = 0$, $A_1 - \lambda A_2 = 0$ die Gleichungen von vier Punkten auf einer geraden Linie, sodann wird

$$\frac{\varkappa}{\lambda}$$

das **Doppelverhältniss** des zweiten Punktepaares zum ersten genannt, und ist $\frac{\varkappa}{\lambda} = -1$, so nennt man es ein **harmonisches**.

Die drei Punktepaare

$$\begin{cases} A_1 - \lambda_\varkappa A_2 = 0 \\ A_1 - \mu_\varkappa A_2 = 0 \end{cases} \quad \varkappa = 1, 2, 3$$

bilden eine **Involution**, wenn sich ein viertes finden lässt, welches zu jedem der gegebenen harmonisch ist, dies findet statt, wenn

$$\begin{vmatrix} \lambda_1 + \mu_1, & \lambda_2 + \mu_2, & \lambda_3 + \mu_3 \\ \lambda_1 \mu_1 & \lambda_2 \mu_2 & \lambda_3 \mu_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Vergl. §. 2. A. 9), 10).

Siehe Theorie und Anwendung der Liniencoordinaten von Dr. K. **Schwering**. Leipzig 1884.

C. Homogene Liniencoordinaten.

1) Seien drei Punkte gegeben, die nicht in einer Geraden liegen,

$$A_1 \equiv a_1 u + b_1 v + 1 = 0$$
$$A_2 \equiv a_2 u + b_2 v + 1 = 0$$
$$A_3 \equiv a_3 u + b_3 v + 1 = 0$$

soll die Gleichung des Punktes

$$A \equiv a u + b u + 1 = 0$$

in der Form

$$\varkappa_1 A_1 + \varkappa_2 A_2 + \varkappa_3 A_3 = 0$$

dargestellt werden, so muss

$$\varkappa_1 = \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} a & a_2 & a_3 \\ b & b_2 & b_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}, \quad \varkappa_2 = \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} a_1 & a & a_3 \\ b_1 & b & b_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\varkappa_3 = \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a \\ b_1 & b_2 & b \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}, \quad \Delta = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix};$$

führen wir, nachdem wir die obige Gleichung durch $\sqrt{u^2 + v^2}$ dividirt haben,

$$u_1 = \frac{A_1}{\sqrt{u^2 + v^2}}, \quad u_2 = \frac{A_2}{\sqrt{u^2 + v^2}}, \quad u_3 = \frac{A_3}{\sqrt{u^2 + v^2}},$$

ein, so wird

$$\varkappa_1 u_1 + \varkappa_2 u_2 + \varkappa_3 u_3 = 0$$

die Gleichung eines Punktes sein. Die Bedeutung der Grössen $\varkappa$ ergiebt sich aus dem Folgenden.

2) Seien ferner d_1, d_2, d_3 die Abstände des Punktes

$$\varkappa_1 u_1 + \varkappa_2 u_2 + \varkappa_3 u_3 = 0$$

von den Seiten des Fundamentaldreiecks, so wird

$$\frac{d_1}{h_1} u_1 + \frac{d_2}{h_2} u_2 + \frac{d_3}{h_3} u_3 = 0.$$

3) Ist $\varkappa_1 + \varkappa_2 + \varkappa_3 = 0$, so ist

$$\varkappa_1 u_1 + \varkappa_2 u_2 + \varkappa_3 u_3 = 0$$

die Gleichung des ∞ fernen Punktes.

4) Der Abstand des Punktes

$$\varkappa_1 u_1 + \varkappa_2 u_2 + \varkappa_3 u_3 = 0$$

von der Geraden

$$u_1', u_2', u_3'$$

ist gegeben durch:

$$d = \pm \frac{\varkappa_1 u_1' + \varkappa_2 u_2' + \varkappa_3 u_3'}{\varkappa_1 + \varkappa_2 + \varkappa_3}.$$

5) Sollen drei Punkte

$$\varkappa_1^n u_1 + \varkappa_2^n u_2 + \varkappa_3^n u_3 = 0, \quad n = 1, 2, 3$$

auf einer Geraden liegen, so muss

$$\begin{vmatrix} \varkappa_1^1 & \varkappa_2^1 & \varkappa_3^1 \\ \varkappa_1^2 & \varkappa_2^2 & \varkappa_3^2 \\ \varkappa_1^3 & \varkappa_2^3 & \varkappa_3^3 \end{vmatrix} = 0$$

sein. Vergl. §. 162, C. Heger: Elemente der Analytischen Geometrie, Braunschweig.

§. 162.

Analytische Geometrie der Geraden.

A. Cartesische Coordinaten.

1) Gleichung einer Geraden.

1) $Ax + By + C = 0$

2) $y = ax + b, \quad a = -\frac{A}{B}, \quad b = -\frac{C}{B}$

3) $\frac{x}{m} + \frac{y}{n} = 1, \; m = -\frac{C}{A}, \quad n = -\frac{C}{B}$

4) $x \cos\alpha + y \cos\beta - p = 0.$ (Normalform.)

Nehmen wir an, dass die Coordinatenaxen den Winkel θ einschliessen, so wird der Winkel, den die Gerade mit der + Richtung der Abscissenaxe einschliesst, α gegeben sein durch

$$tgn\,\alpha = \frac{a \sin\theta}{1 + a\cos\theta}, \quad \text{für } \theta = \frac{\pi}{2}, \quad tgn\,\alpha = a,$$

m ist der Abschnitt der Abscissenaxe, $n = b$ jener der Ordinatenaxe. p ist die vom Ursprung auf die Gerade gefällte Senkrechte, α und β in 4) jene Winkel, die sie mit den Axen einschliesst. Es ist immer

$$\alpha + \beta = \theta.$$

Wir haben ferner

$$\cos\alpha = \frac{A}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}}, \quad \cos\beta = \frac{B}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}},$$

$$p = \frac{-C}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Die Länge der von einem Punkte $x_1 y_1$ auf die Gerade gefällten Senkrechten ist gegeben durch

$$\pm p' = x_1 \cos\alpha + y_1 \cos\beta - p$$

$$p' = \frac{A x_1 + B y_1 + C}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Wird $\theta = \frac{\pi}{2}$, so wird $\cos\beta = \sin\alpha$.

Specielle Fälle:

$Ax + By = 0$: die Gerade geht durch den Ursprung

$\left.\begin{matrix} Ax + C = 0 \\ By + C = 0 \end{matrix}\right\}$ die Gerade || zur $\left\{\begin{matrix} Y \\ X \end{matrix}\right\}$ - Axe

$\left.\begin{matrix} x = 0 \\ y = 0 \end{matrix}\right\}$ Gleichungen der $\left\{\begin{matrix} Y \\ X \end{matrix}\right\}$ - Axe.

2) Geht die Gerade durch den Punkt $(x_1 y_1)$, so ist

$$y - y_1 = a(x - x_1),$$

geht sie auch noch durch $(x_2 y_2)$, so wird

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \quad \text{oder} \quad \begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

oder auch

$$\frac{x}{\frac{y_1 x_2 - x_1 y_2}{y_1 - y_2}} + \frac{y}{\frac{y_1 x_2 - x_1 y_2}{x_2 - x_1}} - 1 = 0.$$

3) Eine Gerade, die durch $(x_1 y_1)$ geht und auf

$$Ax + By + C = 0$$

senkrecht steht, ist gegeben durch:

$$y - y_1 = \frac{B}{A}(x - x_1).$$

4) Gleichungen von der Form

$$Ax + By + C = 0, \quad \lambda(Ax + By) + C' = 0$$

entsprechen parallelen Geraden, ist

$$y = ax + b, \quad y = a_1 x + b_1,$$

so wird:

$a = a_1$, wenn die Geraden parallel,

$a = -\frac{1}{a_1}$, wenn sie auf einander senkrecht stehen.

5) Der Durchschnittspunkt zweier Geraden

$$Ax + By + C = 0, \quad A_1 x + B_1 y + C_1 = 0$$

ist gegeben durch:

$$x = \begin{vmatrix} B & C \\ B_1 & C_1 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} A & B \\ A_1 & B_1 \end{vmatrix}$$

$$y = \begin{vmatrix} C & A \\ C_1 & A_1 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} A & B \\ A_1 & B_1 \end{vmatrix}$$

Der Winkel v, den zwei Geraden mit einander einschliessen, ist für

$$y = ax + b, \quad y = a_1 x + b_1$$

gegeben durch

$$tgn\, v = \pm \frac{(a_1 - a) \sin\theta}{1 + (a + a_1)\cos\theta + a a_1}.$$

Sie stehen auf einander $\perp$ wenn

$$1 + (a + a_1)\cos\theta + a a_1 = 0$$

wird.

6) Wir bezeichnen nach Plücker {Analytisch geometrische Entwickelungen, 1828}

$$U_\varkappa^\lambda \equiv A_\varkappa x_\lambda + B_\varkappa y_\lambda + C_\varkappa = 0$$

$$A_\varkappa^\lambda \equiv x_\lambda \cos\alpha_\varkappa + y_\lambda \cos\beta_\varkappa - p_\varkappa = 0.$$

Dies gestattet uns, statt mit Coordinaten mit Gleichungen zu rechnen. Seien m_1 und m_2 zwei beliebige Zahlen, dann geht die Gerade $m_1 U_1 + m_2 U_2 = 0$ durch den Schnittpunkt der Geraden $U_1 = 0$, $U_2 = 0$. Es schneiden sich die Geraden $U_1 = 0$, $U_2 = 0$, $U_3 = 0$ in einem Punkte, wenn es drei Zahlen m_1, m_2, m_3 giebt von der Beschaffenheit, dass

$$U_1 m_1 + U_2 m_2 + U_3 m_3 = 0.$$

7) Geht eine Gerade durch den Punkt $(x_1 y_1)$ und durch den Schnittpunkt von $U_1 = 0$, $U_2 = 0$, so wird

$$U_1 + \varkappa U_2 = 0,$$

wobei

$$\varkappa = -\left(\frac{U_1}{U_2}\right) = -\frac{A_1 x_1 + B_1 y_1 + C_1}{A_2 x_1 + B_2 y_1 + C_2}.$$

Es ist demnach durch $U_1 + \varkappa U_2 = 0$, $\varkappa = \pm 0$ bis $\pm \infty$ ein Strahlenbüschel repräsentirt.

8) Sei $A_1 = 0$, $A_2 = 0$, so ist durch

$$A_1 - \varkappa A_2 = 0$$

eine Gerade dargestellt, die durch den Schnittpunkt von $A_1 = 0$ und $A_2 = 0$ hindurchgeht. Seien α' und β' die Winkel, die diese Gerade mit A_1 und A_2 einschliesst, sowie d_1 und d_2 die von einem beliebigen Punkte $(\xi \eta)$ dieser Geraden auf A_1 und A_2 gefällten Perpendikel, so wird

$$\varkappa = \frac{\xi \cos \alpha_1 + \eta \cos \beta_1 - p_1}{\xi \cos \alpha_2 + \eta \cos \beta_2 - p_2} = \frac{\sin \alpha'}{\sin \beta'} = \frac{d_1}{d_2}.$$

Es ist speciell:

$A_1 \pm A_2 = 0$ die Gleichung jener Geraden, welche den Winkel der beiden Geraden $A_1 = 0$, $A_2 = 0$ halbirt, in welchem der Anfangspunkt der Coordinaten $\begin{Bmatrix}\text{nicht liegt}\\ \text{liegt}\end{Bmatrix}$.

9) Seien 0, 1, 2, 3 gegebene Geraden, die sich in einem Punkte schneiden, und die wir durch $A_0 = 0$, $A_1 = 0$, $A_2 = 0$, $A_3 = 0$ uns gegeben denken, so wird für

$$A_2 \equiv A_0 - \lambda A_1 = 0, \quad \lambda = \frac{\sin(20)}{\sin(21)}.$$

Sei ferner

$$A_3 \equiv A_0 - \mu A_1 = 0, \quad \mu = \sin\frac{(30)}{(31)}.$$

Alle Winkel in einerlei Richtung gezählt, so wird

$$\frac{\lambda}{\mu} = \frac{sin(20)}{sin(21)} : \frac{sin(30)}{sin(31)} \quad \text{(Hesse)}$$

das Doppelverhältniss des Linienpaares 2,3 zu 0,1, oder auch das anharmonische Verhältniss (Chasles) genannt. Wird $\frac{\lambda}{\mu} = -1$, so wird das Verhältniss ein harmonisches genannt.

Schreibweisen:

$$\frac{\lambda}{\mu} = \frac{sin(02)}{sin(21)} : \frac{sin(03)}{sin(31)} \quad \text{(Moebius)}$$

$$\frac{\lambda}{\mu} = \frac{sin(02)}{sin(12)} : \frac{sin(03)}{sin(13)} \quad \text{(Steiner).}$$

Seien $u_0 - \lambda_0 u_1 = 0$, $u_0 - \mu_0 u_1 = 0$, so ist dieses Linienpaar harmonisch mit

$$u_0 - \lambda u_1 = 0, \quad u_0 - \mu u_1 = 0,$$

wenn

$$\lambda \mu - \frac{1}{2}(\lambda + \mu)(\lambda_0 + \mu_0) + \lambda_0 \mu_0 = 0.$$

Setzt man

$$\lambda \mu = b, \quad \lambda + \mu = a,$$

so wird

$$z^2 - a z + b = 0$$

eine quadratische Gleichung, deren Wurzeln die gesuchten Grössen λ und μ sind.

10) Drei Linienpaare, die sich in einem Punkte schneiden, bilden eine Involution, wenn ein viertes Linienpaar gefunden werden kann, welches harmonisch ist zu jedem der drei Linienpaare.

Seien drei Linienpaare

$$\begin{matrix} V_0 - \lambda_x V_1 = 0 \\ V_0 - \mu_x V_1 = 0 \end{matrix} \quad x = 0, 1, 2$$

gegeben, so bilden sie eine Involution, wenn

$$(\lambda_0 - \mu_1)(\lambda_1 - \mu_2)(\lambda_2 - \mu_0) + (\mu_0 - \lambda_1)(\mu_1 - \lambda_2)(\mu_2 - \lambda_0) = 0$$

ist.

11) Der homogenen Gleichung

$$x^n - a x^{n-1} y + b x^{n-2} y^2 - \cdots + (-1)^n q y^n = 0$$

entsprechen n gerade Linien, die durch den Coordinatenursprung gehen.

12) Ist für

$$Ay^2 + Bxy + Cx^2 + Dy + Ex + F = 0$$
$$AE^2 + CD^2 + B^2F - BDE - 4ACF = 0,$$

so entsprechen der ersteren Gleichung zwei gerade Linien.

B. Polarcoordinaten.

1) Sei das Coordinatensystem ein schiefwinkliges mit dem Winkel θ, so ist der Uebergang von Parallelcoordinaten x, y zu den Polarcoordinaten r, φ gegeben durch

$$x = \frac{r \sin(\theta - \varphi)}{\sin\theta}, \quad y = \frac{r \sin\varphi}{\sin\theta}$$

speciell für $\theta = \frac{\pi}{2}$

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi.$$

Daraus ergiebt sich

$$\cos\varphi = \frac{x + y\cos\theta}{r}, \quad \sin\varphi = \frac{y\sin\theta}{r}, \quad tgn\,\varphi = \frac{y\sin\theta}{x + y\cos\theta},$$
$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + 2xy\cos\theta}$$

oder im zweiten Falle

$$\cos\varphi = \frac{x}{r}, \quad \sin\varphi = \frac{y}{r}, \quad r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad tgn\,\varphi = \frac{y}{x}.$$

2) Polargleichung einer Geraden:

Aus $y = a'x + b = x\,tgn\,\alpha + b$ folgt $r = \dfrac{b\cos\alpha}{\sin(\varphi - \alpha)}$.

Sei β der Winkel, den die vom Ursprung auf die Gerade gefällte Senkrechte p mit der Richtung $\varphi = 0$ ausmacht, so ist

$$r\cos(\varphi - \beta) - p = 0 \quad \text{(Normalform).}$$

C. Homogene Coordinaten.

1) Seien gegeben die Gleichungen dreier Geraden, die nicht durch einen Punkt gehen

$$x_1 \equiv x\cos\alpha_1 + y\sin\alpha_1 - p_1 = 0$$
$$x_2 \equiv x\cos\alpha_2 + y\sin\alpha_2 - p_2 = 0$$
$$x_3 \equiv x\cos\alpha_3 + y\sin\alpha_3 - p_3 = 0.$$

Wird die Gleichung der Geraden

$$A \equiv x \cos\alpha + y \sin\alpha - p = 0$$

auf die Form

$$A_1 x_1 + A_2 x_2 + A_3 x_3 = 0$$

gebracht, so muss

$$A_1 = \frac{1}{\varDelta} \begin{vmatrix} \cos\alpha & \cos\alpha_2 & \cos\alpha_3 \\ \sin\alpha & \sin\alpha_2 & \sin\alpha_3 \\ p & p_2 & p_3 \end{vmatrix}, \quad A_2 = \frac{1}{\varDelta} \begin{vmatrix} \cos\alpha_1 & \cos\alpha & \cos\alpha_3 \\ \sin\alpha_1 & \sin\alpha & \sin\alpha_3 \\ p_1 & p & p_3 \end{vmatrix}$$

$$A_3 = \frac{1}{\varDelta} \begin{vmatrix} \cos\alpha_1 & \cos\alpha_2 & \cos\alpha \\ \sin\alpha_1 & \sin\alpha_2 & \sin\alpha \\ p_1 & p_2 & p \end{vmatrix}, \quad \varDelta = \begin{vmatrix} \cos\alpha_1 & \cos\alpha_2 & \cos\alpha_3 \\ \sin\alpha_1 & \sin\alpha_2 & \sin\alpha_3 \\ p_1 & p_2 & p_3 \end{vmatrix}$$

2) Sei

$$a \equiv a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 = 0$$

und es mögen die Höhen des Fundamentaldreiecks mit h_1, h_2, h_3 die Abstände der Ecken von der Geraden $a = 0$, mit d_1, d_2, d_3 bezeichnet werden, so ist

$$a_1 : a_2 : a_3 = \frac{d_1}{h_1} : \frac{d_2}{h_2} : \frac{d_3}{h_3},$$

oder wenn

$$\varkappa = \frac{d_1}{d_1 h_1} = \frac{d_2}{d_2 h_2} = \frac{d_3}{d_3 h_3}$$

gesetzt wird:

$$\frac{1}{\varkappa} a \equiv \frac{d_1}{h_1} x_1 + \frac{d_2}{h_2} x_2 + \frac{d_3}{h_3} x_3 = 0.$$

3) Allgemeiner ergiebt sich der Begriff der homogenen Coordinaten durch folgende Betrachtung.

Als Coordinatensystem benützen wir drei Geraden, die sich nicht in einem Punkte schneiden. Sei M ein Punkt der Ebene, p_1, p_2, p_3 die von ihm auf die Dreiecksgeraden gefällten Perpendikel $+$ wenn ihr Fusspunkt auf der Innenseite des Dreieckes liegt, $-$ im anderen Falle, ferner x_1, x_2, x_3 drei Zahlen, die sich wie die Perpendikel verhalten, also

$$x_1 : x_2 : x_3 = p_1 : p_2 : p_3$$

l_1, l_2, l_3 noch später zu bestimmende Grössen, welche der Gleichung

$$x_1 : x_2 : x_3 = p_1 l_1 : p_2 l_2 : p_3 l_3$$

genügen. Seien ferner die Gleichungen der Seiten des Fundamentaldreieckes:

$$G_\varkappa \equiv a_\varkappa x + b_\varkappa y + c_\varkappa, \quad \varkappa = 1, 2, 3.$$

So wird

$$p_\varkappa = \frac{G_\varkappa}{\sqrt{a_\varkappa^2 + b_\varkappa^2}}, \quad \varkappa = 1, 2, 3$$

und

$$\varrho x_\varkappa = l_\varkappa p_\varkappa,$$

woraus, wenn

$$\lambda_\varkappa = \frac{l_\varkappa}{\sqrt{a_\varkappa^2 + b_\varkappa^2}}$$

gesetzt wird,

$$\varrho x_\varkappa = \lambda_\varkappa (a_\varkappa x + b_\varkappa y + c)$$

folgt. Sei

$$R = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

und A_i, B_i, C_i die Unterdeterminanten, so wird

$$x = \frac{\sum \frac{A_\varkappa}{\lambda_\varkappa} x_\varkappa}{\sum \frac{C_\varkappa}{\lambda_\varkappa} x_\varkappa}, \quad y = \frac{\sum \frac{B_\varkappa}{\lambda_\varkappa} x_\varkappa}{\sum \frac{C_\varkappa}{\lambda_\varkappa} x_\varkappa}.$$

Aus der Gleichung

$$\alpha x + \beta y + \gamma = 0$$

folgt sodann

$$\alpha \sum \frac{A_\varkappa}{\lambda_\varkappa} x_\varkappa + \beta \sum \frac{B_\varkappa}{\lambda_\varkappa} x_\varkappa + \gamma \sum \frac{C_\varkappa}{\lambda_\varkappa} x_\varkappa = 0$$

oder

$$m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3 = 0.$$

Je nach der Bestimmung von l_1, l_2, l_3, giebt es nun verschiedene Coordinatensysteme.

Die einfachsten Coordinaten sind jene von Hesse. Hier wird einfach

$$x = \frac{x_1}{x_3}, \quad y = \frac{x_2}{x_3},$$

damit wird

$$l_1 = l_2 = 1, \quad l_3 = \frac{1}{\delta},$$

wobei δ das vom Ursprung auf $x_3 = 0$ gefällte Perpendikel bezeichnet. Das Coordinatensystem von Chasles und Moebius lautet

$$x_1 : x_2 : x_3 = s_1 p_1 : s_2 p_2 : s_3 p_3,$$

dabei sind s_1, s_2, s_3 die Seitenlängen des Fundamentaldreiecks.

4) Im Folgenden benutzen wir das durch 1) gegebene Coordinatensystem.

Seien s_1, s_2, s_3 die Seiten, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ die ihnen gegenüberliegenden Winkel des Fundamentaldreieckes, so wird, wenn

$$J = \frac{1}{2}(p_1 s_1 + p_2 s_2 + p_3 s_3)$$

gesetzt wird, für jeden unendlichen Punkt

$$s_1 x_1 + s_2 x_2 + s_3 x_3 = 2J$$
$$x_1 \sin\alpha_1 + x_2 \sin\alpha_2 + x_3 \sin\alpha_3 = \frac{2J \sin\alpha_1}{s_1}.$$

Die Gleichungen

$$s_1 x_1 + s_2 x_2 + s_3 x_3 = 0$$
$$x_1 \sin\alpha_1 + x_2 \sin\alpha_2 + x_3 \sin\alpha_3 = 0$$

stellen die unendlich ferne Gerade dar.

5) Ist die Gerade

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 = 0$$

gegeben, so ist die Lage der Schnittpunkte mit den Seiten des Fundamentaldreiecks gegeben durch:

$$x_1 = 0,\quad a_2 x_2 + a_3 x_3 = 0,\quad s_2 x_2 + s_3 x_3 = 2J$$
$$x_2 = 0,\quad a_1 x_1 + a_3 x_3 = 0,\quad s_1 x_1 + s_3 x_3 = 2J$$
$$x_3 = 0,\quad a_1 x_1 + a_2 x_2 = 0,\quad s_1 x_1 + s_2 x_2 = 2J.$$

6) Der Schnittpunkt zweier Geraden

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 = 0$$
$$b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3 = 0$$

ist bestimmt durch

$$x_1 : x_2 : x_3 = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}$$
$$s_1 x_1 + s_2 x_2 + s_3 x_3 = 2J.$$

7) Die Gleichung der Geraden, die durch die beiden Punkte

$$\xi_1\, \xi_2\, \xi_3,\quad \xi'_1\, \xi'_2\, \xi'_3$$

geht, ist gegeben durch

$$x_1 \{\xi_2 \xi'_3 - \xi_3 \xi'_2\} + x_2 \{\xi_3 \xi'_1 - \xi_1 \xi'_3\} + x_3 \{\xi_1 \xi'_2 - \xi_2 \xi'_1\} = 0.$$

8) Sollen die drei Geraden

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 = 0$$
$$b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3 = 0$$
$$c_1 x_1 + c_2 x_2 + c_3 x_3 = 0$$

durch einen und denselben Punkt gehen, so muss

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = 0$$

sein.

9) Zwei Geraden

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 = 0$$
$$b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3 = 0$$

durchschneiden sich rechtwinklig, wenn

$$a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 = (a_1 b_2 + a_2 b_1) \cos \alpha_3 + (a_2 b_3 + a_3 b_2) \cdot \cos \alpha_1 + (a_3 b_1 + a_1 b_3) \cos \alpha_2$$

dabei sind α_1, α_2, α_3 die Winkel des Fundamentaldreieckes.

10) Der Abstand d des Punktes $\xi_1\ \xi_2\ \xi_3$ von der Geraden

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 = 0$$

ist gegeben durch

$$d = \frac{a_1 \xi_1 + a_2 \xi_2 + a_3 \xi_3}{\xi_1 \sin \alpha_1 + \xi_2 \sin \alpha_2 + \xi_3 \sin \alpha_3}.$$

§. 163.

Coordinaten-Transformation.

1) Die ursprünglichen Coordinaten seien $x y$, die transformirten $X Y$, so ist für parallele Transformation

$$x = X \pm a, \quad y = Y \pm b.$$

2) Der Anfangspunkt bleibt wegen Raumersparniss derselbe, sodann ist

$$x = a X + b Y, \quad y = a_1 X + b_1 Y$$
$$a = \frac{\sin(X y)}{\sin(x y)}, \quad b = \frac{\sin(Y y)}{\sin(x y)}$$
$$a_1 = \frac{\sin(X x)}{\sin(x y)}, \quad b_1 = \frac{\sin(Y x)}{\sin(x y)}.$$

Speciell wird für die Transformation eines rechtwinkligen Coordinatensystems in ein anderes rechtwinkliges

$$x = X\cos\alpha - Y\sin\alpha$$
$$y = X\sin\alpha + Y\cos\alpha.$$

Für ein rechtwinkliges in ein schiefwinkliges, wenn

$$\measuredangle (Xx) = \alpha, \quad \measuredangle (Yx) = \beta$$

gesetzt wird

$$x = X\cos\alpha + Y\cos\beta$$
$$y = X\sin\alpha + Y\sin\beta.$$

Bei der Transformation eines rechtwinkligen Coordinatensystems in ein anderes mit demselben Anfangspunkt wird:

$$x^2 + y^2 = X^2 + Y^2$$

und zugleich

$$a^2 + a_1^2 = +1, \quad b^2 + b_1^2 = +1$$
$$ab + a_1 b_1 = 0.$$

3) Es sei $\alpha x + \beta y + \gamma = 0$ die X-, $ax + by + c = 0$ die Y-Axe, θ und Θ seien die Coordinatenwinkel; man hat

$$x = -\frac{\beta}{\varrho}X - \frac{b}{r}Y + \frac{b\gamma - c\beta}{a\beta - b\alpha}, \quad X = \frac{1}{r}\frac{\sin\theta}{\sin\Theta}(ax + by + c)$$

$$y = \frac{\alpha}{\varrho}X + \frac{a}{r}Y + \frac{c\alpha - a\gamma}{a\beta - b\alpha}, \quad Y = -\frac{1}{\varrho}\frac{\sin\theta}{\sin\Theta}(\alpha x + \beta y + \gamma)$$

$$r = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta}, \quad \varrho = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta\cos\theta}$$

$$r\varrho\sin\Theta = -(a\beta - b\alpha)\sin\theta,$$

$$r\varrho\cos\Theta = a\alpha + b\beta - (a\beta + b\alpha)\cos\theta.$$

Der Kreis.

1) Die allgemeine Gleichung:

$$A(x^2 + y^2) + Dx + Ey + F = 0$$

hat zur Normalform

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = r^2,$$

dabei sind α und β die Coordinaten des Mittelpunktes und r der Radius.

2) In Liniencoordinaten lautet die Kreis-Gleichung:

$$Au^2 + Buv + Cv^2 + Du + Ev + F = 0,$$

wobei jedoch

$$DE - 2BF = 0$$
$$D^2 - 4AF = E^2 - 4CF,$$

und die Normalform ist:

$$(au + bv + 1)^2 - r^2(u^2 + v^2) = 0.$$

Die Coordinaten des Mittelpunktes sind:

$$a = \frac{D}{2F}, \quad b = \frac{E}{2F}.$$

Man findet ferner

$$r^2 = \frac{D^2 - 4AF}{4F^2} = \frac{E^2 - 4CF}{4F^2}.$$

3) Die Gleichung des Kreises im schiefwinkligen Coordinatensystem:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + 2(x - a)(y - b)\cos\theta = r^2,$$

oder wenn

$$m = a + b\cos\theta$$
$$n = b + a\cos\theta$$
$$P = a^2 + b^2 + 2ab\cos\theta - r^2$$

gesetzt wird,

$$x^2 + y^2 + 2xy\cos\theta - 2mx - 2ny + P = 0.$$

Die Entfernung des Kreismittelpunktes vom Coordinatenanfang ist:

$$e^2 = a^2 + b^2 + 2ab\cos\theta.$$

P ist die Potenz des Coordinatenanfangs in Bezug auf den Kreis.

Unter Potenz eines Punktes 0 in Bezug auf einen Kreis versteht man das Product $OM.ON$, wobei M und N die Schnittpunkte einer von 0 ausgehenden Geraden mit dem Kreise bezeichnen. Diese Grösse ist eine constante. Es werde von 0 eine Tangente an den Kreis gelegt, welche denselben im Punkte T berührt, dann ist:

$$\overline{OT}^2 = OM.ON.$$

4) Es sei gegeben ein Kreis

$$x^2 + y^2 - r^2 = 0$$

und eine Gerade

$$x\cos\alpha + y\sin\alpha - p = 0,$$

so sind die gemeinschaftlichen Punkte:

$$\begin{cases} x_1 = p\cos\alpha + \sin\alpha\sqrt{r^2 - p^2} \\ y_1 = p\sin\alpha - \cos\alpha\sqrt{r^2 - p^2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_2 = p\cos\alpha - \sin\alpha\sqrt{r^2 - p^2} \\ y_2 = p\sin\alpha + \cos\alpha\sqrt{r^2 - p^2}. \end{cases}$$

Seien $x_1\, y_1$ die Coordinaten des Berührungspunktes, so ist die Gleichung der Tangente

$$x x_1 + y y_1 - r^2 = 0.$$

Seien $x_1\, y_1$ die Coordinaten eines beliebigen Punktes, durch den die Tangente geht, so wird:

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{-x_1 y_1 \pm r\sqrt{x_1^2 + y_1^2 - r^2}}{r^2 - x_1^2}$$

die Gleichung der Tangente sein.

5) Die Polare des Punktes ξ, η, in Bezug auf den Kreis

$$x^2 + y^2 + 2xy\cos\theta - 2mx - 2ny + P = 0$$

hat die Gleichung:

$$(\xi + \eta\cos\theta - m)x + (\eta + \xi\cos\theta - n)y + (P - m\xi - n\eta) = 0$$

Sei

$$Ax + By + C = 0$$

die Gleichung einer geraden Linie, die als Polare von ξ, η angesehen wird, so folgt

$$\xi = a - \frac{Ar^2}{Aa + Bb + C}$$

$$\eta = b - \frac{Br^2}{Aa + Bb + C},$$

wenn

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$

die Gleichung des Fundamentalkreises war. Die Gleichung der Polare ist:

$$(x - a)(\xi - a) + (y - b)(\eta - b) = r^2.$$

6) Sei

$$K_0 \equiv (x - a_0)^2 + (y - b_0)^2 - r_0^2$$
$$K_1 \equiv (x - a_1)^2 + (y - b_1)^2 - r_1^2$$

. . . .

So stellt

$$K_0 - \lambda K_1 = 0$$

las ganze System von Kreisen dar, welche sich in den beiden Punkten schneiden, in welchen sich die gegebenen Kreise $K_0 = 0$ and $K_1 = 0$ schneiden.

Um die Mittelpunkte dieser Kreise darzustellen, setze man

$$A_0 \equiv a_0 u + b_0 v + 1$$
$$A_1 \equiv a_1 u + b_1 v + 1,$$
$$\cdots\cdots\cdots$$

ferner bezeichne man die Distanz der Mittelpunkte 0 und 1 mit [0 1].

Sodann wird für irgend einen Kreis

$$K_0 - \lambda K_1 = 0,$$
$$A_0 - \lambda A_1 = 0$$

die Gleichung des Mittelpunktes und

$$r^2 = \frac{r_1^2 \lambda^2 + \{[0\,1]^2 - r_0^2 - r_1^2\} \lambda + r_0^2}{(1 - \lambda)^2}$$

sein Radius sein.

Die Gleichung

$$K_0 - K_1 = 0$$

stellt einen Kreis mit unendlich grossem Radius dar, also eine Gerade, die den Namen der gemeinschaftlichen Secante führt (Linie der gleichen Tangenten, Potenzlinie, Chordale).

Wird $r = 0$, so erhalten wir für λ zwei Werthe (λ_1) und (λ_2). Die Mittelpunkte der beiden Kreise

$$K_0 - (\lambda_1) K_1 = 0$$
$$K_0 - (\lambda_2) K_1 = 0$$

mit verschwindendem Radius nennt man die Grenzpunkte des Systems

$$K_0 - \lambda K_1 = 0.$$

Ein System von Kreisen, welche durch zwei gegebene Punkte gehen, hat zwei imaginäre Grenzpunkte, wenn die gegebenen Punkte reell sind, dagegen reelle Grenzpunkte, wenn sich die Kreise in imaginären Punkten schneiden.

7) Sei

$$K = (x - a)^2 + (y - b)^2 - r^2,$$

Sei ferner die Entfernung des Punktes (xy) vom Mittelpunkte (ab) gleich ϱ, sowie t die Länge der von (xy) an den Kreis, so wird

$$K = \varrho^2 - r^2 = t^2.$$

8) Die Coordinaten des inneren Aehnlichkeitspunktes sind:

$$x = \frac{\frac{a}{r} + \frac{a'}{r'}}{\frac{1}{r} + \frac{1}{r'}}, \quad y = \frac{\frac{b}{r} + \frac{b'}{r'}}{\frac{1}{r} + \frac{1}{r'}},$$

die des äusseren:

$$x = \frac{\frac{a}{r} - \frac{a'}{r'}}{\frac{1}{r} - \frac{1}{r'}}, \quad y = \frac{\frac{b}{r} - \frac{b'}{r'}}{\frac{1}{r} - \frac{1}{r'}}.$$

Es seien

$$K_1 = 0, \quad K_2 = 0, \quad K_3 = 0,$$

die Gleichungen dreier Kreise, so liegen die äusseren Aehnlichkeitspunkte in einer Geraden (Aehnlichkeitsaxe), deren Gleichung

$$yA + xB + C = 0$$

ist, wobei

$$A = r_1(a_3 - a_2) + r_2(a_1 - a_3) + r_3(a_2 - a_1)$$

$$-B = r_1(b_3 - b_2) + r_2(b_1 - b_3) + r_3(b_2 - b_1)$$

$$-C = \begin{vmatrix} r_1 & a_1 & b_1 \\ r_2 & a_2 & b_2 \\ r_3 & a_3 & b_3 \end{vmatrix}.$$

Formen der Curven.

1) Sei die Curve durch die Gleichung

$$f(x, y) = 0$$

gegeben. Durch Differentiation ergiebt sich

$$f_1\,dx + f_2\,dy = 0$$

$$f_{11}\,dx^2 + 2f_{12}\,dx\,dy + f_{22}\,dy^2 = 0.$$

Aus dieser Gleichung ergiebt sich:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-f_{12} \pm \sqrt{-H}}{f_{22}},$$

wobei

$$H = \begin{vmatrix} f_{11} f_{12} \\ f_{21} f_{22} \end{vmatrix}. \quad \text{(Hesse'sche Determinante.)}$$

Diese Gleichung liefert entweder

I. Zwei ungleiche reelle Wurzeln, wenn $H < 0$, oder

II. Zwei gleiche Wurzeln, wenn $H = 0$, oder

III. Zwei imaginär conjugirte Wurzeln $H > 0$.

I. Im ersten Falle giebt es zwei reelle Tangenten, der Punkt ist ein Doppelpunkt (Fig. 14, 18 auf der folgenden Tafel).

II. Im zweiten Falle ist der Punkt entweder ein Rückkehrpunkt, oder ein Selbstberührungspunkt. Welcher von diesen, das hängt davon ab, wie sich $\frac{d^2 y}{d x^2}$ für zwei benachbarte Punkte $x = \alpha \pm h$, $\lim h = 0$ verhält.

Sei $\frac{d^2 y}{d x^2}$ entweder nur für $x = \alpha + h$, oder für $x = \alpha - h$, reell und $\begin{Bmatrix}\text{zweideutig}\\ \text{eindeutig}\end{Bmatrix}$ im entgegengesetzten Falle imaginär, so ist der Punkt ein Rückkehrpunkt der $\begin{Bmatrix}\text{ersten}\\ \text{zweiten}\end{Bmatrix}$ Art. (Fig. 12 und 13 der Tafel.)

Ist $\frac{d^2 y}{d x^2}$ sowohl für $x = \alpha + h$, als auch für $x = \alpha - h$ reell, so ist der Punkt ein Selbstberührungspunkt (Fig. 15).

III. In diesem Falle ist der Punkt ein Einsiedler oder conjugirter Punkt (Fig. 17).

2) Wird die Gleichung einer Curve

$$f(x, y) = 0$$

nach y aufgelöst, so wird

$$y = \sum_0^n a_\varkappa x^\varkappa + \sum_1^\infty b_\varkappa \frac{1}{x^\varkappa}.$$

Wird $\sum b_\varkappa \frac{1}{x^\varkappa} = 0$ für $\lim x = \infty$, so ist

$$y_\infty = \sum_0^n a_\varkappa x^\varkappa$$

die Asymptote der Curve y. Um die Asymptote zu erhalten, kann man auch verfahren wie folgt:

Man setze $y = a_n x^n$ und bestimme a_n aus

$$f\{x, a_n x^n\} = 0 \quad \text{für } \lim x = \infty,$$

sodann

$$y = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1},$$

und bestimme a_{n-1} aus

$$f(x, a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1}) = 0 \quad \text{für } \lim x = \infty$$

und so fort, bis

$$y_\infty = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots a_0.$$

Lässt sich die Gleichung der Curve auf die Form

$$x^n \varphi\left(\frac{y}{x}\right) + x^{n-1} \psi\left(\frac{y}{x}\right) + \cdots = 0$$

bringen, so dividire durch x^n und setze $y = a_1 x$, $\lim x = \infty$, es wird

$$\varphi(a_1) = 0,$$

für a_0 ergiebt sich

$$a_0 = -\frac{\psi(a_1)}{\varphi'(a_1)},$$

sollte aber $\psi(a_1) = 0$, $\varphi'(a_1) = 0$ sein, so bilde man

$$\frac{1}{2} a_0^2 \varphi''(a_1) + a_0 \psi'(a_1) + X(a_1) = 0 \text{ etc.}$$

Ist die Gleichung der Curve von der Form

$$y^n \varphi(x) + y_{n-1} \psi(x) + \cdots = 0,$$

so liefern die reellen Wurzeln von

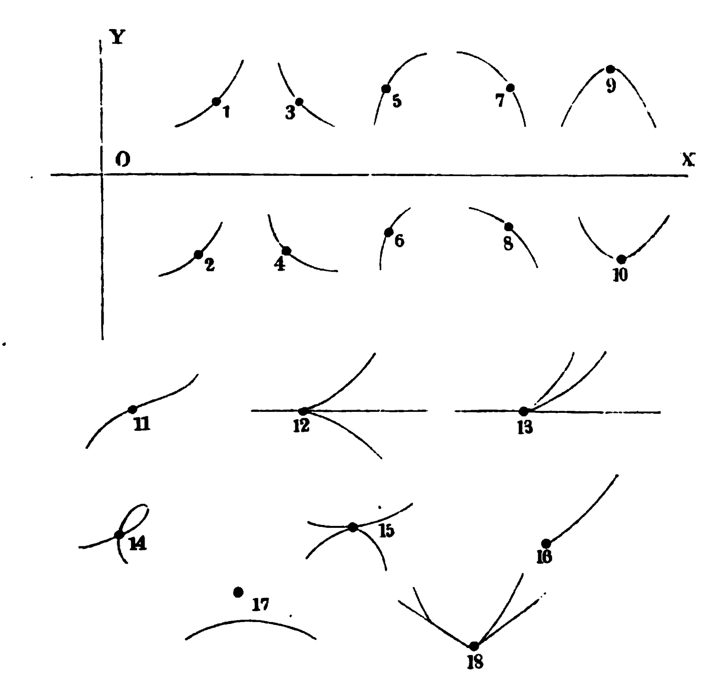
$$\varphi(x) = 0$$

die zur Ordinatenaxe || Asymptoten.

3) Was nun die gewöhnlichen Formen der Curven anbetrifft, so liefert die folgende Tafel das Nöthige. Die Spaltenzahlen sind identisch mit den Zahlen der Figurentafel. Es bedeutet

$+$ positiv, $\quad -$ negativ.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y	$+$	$-$	$+$	$-$	$+$	$-$	$+$	$-$	$\pm$	$\pm$
$\frac{dy}{dx}$	$+$	$+$	$-$	$-$	$+$	$+$	$-$	$-$	0	0
$\frac{d^2y}{dx^2}$	$+$	$+$	$+$	$+$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	$+$



Allgemeine Curventheorie.

1) Man nennt die höchste Dimension, in welcher die Variabeln x, y in der Gleichung in Punktcoordinaten, die **Ordnung der Curve**; in welcher die Variabeln uv in Liniencoordinatengleichung vorkommen, die **Classe der Curve**.

2) Eine Curve n-ter Ordnung wird von einer Geraden in n (reellen oder imaginären) Punkten geschnitten. An eine Curve n-ter Classe lassen sich von einem Punkte n Tangenten (reelle oder imaginäre) ziehen.

3) Eine Curve n-ter Ordnung ist im Allgemeinen durch

$$\frac{n(n+3)}{1.2}$$

ihrer Punkte bestimmt und ihre Classe ist im Allgemeinen gleich

$$K = n(n-1).$$

Sei d die Zahl der Doppelpunkte, r jene der Rückkehrpunkte, so wird

$$K = n(n-1) - 2d - 3r \quad \ldots \ldots \quad \text{I}$$

3) Die Zahl der Wendepunkte ist im Allgemeinen

$$w = 3n(n-2).$$

Kommen aber Doppelpunkte und Rückkehrpunkte vor, so wird

$$w = 3n(n-2) - 6d - 8r \quad \ldots \ldots \quad \text{II}$$

4) Ersetzt man nach dem Princip der Dualität

Ordnung (n), Doppelpunkt (d), Rückkehrpunkt (r)

durch

Classe (K), Doppeltangente (t), Wendetangente (w),

so ergeben sich folgende Formeln:

$$n = K(K-1) - 2t - 3w \quad \ldots \ldots \quad \text{III}$$

$$r = 3K(K-2) - 6t - 8w \quad \ldots \ldots \quad \text{IV.}$$

5) Die Zahl der Doppeltangenten ist im Allgemeinen für eine Curve n-ter Ordnung (d. h. für eine solche ohne Doppel- und Rückkehrpunkte)

$$t = \frac{1}{2} n(n-2)(n^2-9).$$

Durch das Auftreten der Doppel- und Rückkehrpunkte wird diese Formel modificirt wie folgt:

$$t = \frac{1}{2} n(n-2)(n^2-9) - [2d + 3r][n(n-1) - 6]$$
$$+ 2d(d-1) + \frac{9}{2} r(r-1) + 6dr \quad \ldots \ldots \quad \text{V.}$$

Eine Curve n-ter Classe hat im Allgemeinen $n(n-1)$ Asymptoten oder $n(n-1)$ unendlich ferne Punkte.

Jede Curve n-ter Classe hat, wenn $n > 2$, Spitzen. Dieselben sind also keine Singularität für diese Curven. Ihre Anzahl beträgt im Allgemeinen $3n(n-2)$.

6) Zu diesen Charakteren kommt noch das Geschlecht der Curve, dasselbe ist definirt durch:

$$p = \frac{1}{2}(n-1)(n-2) - d - r$$
$$= \frac{1}{2}(K-1)(K-2) - t - w.$$

Sodann lassen sich die Formeln I. bis IV. übersichtlich schreiben wie folgt:

$$\begin{aligned} 2p - 2 &= K + r - 2n \\ &= n + w - 2K \\ &= n(n-3) - 2(d+r) \\ &= K(K-3) - 2(t+w) \end{aligned}$$

7) Sei die Gleichung einer Curve n-ter Ordnung gegeben durch

$$f(x_1 x_2 x_3) \equiv a_x^n = 0.$$

Man setze

$$x_\varkappa = y_\varkappa + \lambda z_\varkappa, \quad \varkappa = 1, 2, 3,$$

so wird

$$a_x^n = \lambda^n a_y^n + n\lambda^{n-1} a_y^{n-1} a_z + \binom{n}{2} \lambda^{n-2} a_y^{n-2} a_z^2 + \cdots a_z^n.$$

Lassen wir y constant und z variabel sein, so wird

$$a_y^{n-r} a_z^r = 0$$

eine Curve r-ter Ordnung, die sogenannte $(n-r)$te Polare von y in Bezug auf die Grundcurve.

Die $n(n-1)$ Berührungspunkte der von einem Punkte an eine Curve n-ter Ordnung gelegten Tangenten sind zugleich Schnittpunkte dieser Curve mit der ersten Polaren in Bezug auf diesen Punkt.

Die k-te Polare eines Punktes in Bezug auf die i-te Polare dieses Punktes nach $f = 0$ ist zugleich die $(i+k)$-te Polare dieses Punktes nach $f = 0$.

Liegt y auf der k-ten Polare von z, so liegt z auf der $(n-k)$-ten Polare von y.

Liegt der Pol auf der Grundcurve, so gehen alle seine Polaren durch ihn hindurch und berühren in ihm die Grundcurve.

Man kann demnach von einem Punkte der Curve nur noch

$$n(n-1) - 2$$

Tangenten an dieselbe legen.

8) Sei

$$f_{i\varkappa} = \frac{1}{n(n-1)} \frac{\partial f}{\partial x_i \, \partial x_\varkappa},$$

ferner

$$\frac{1}{6}\Delta = \begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} \end{vmatrix}$$

so wird die Curve $\Delta = 0$ die Hesse'sche genannt.

Die Schnittpunkte dieser Curve mit der Grundcurve $f = ($ sind zugleich Wendepunkte der letzteren.

Die Hesse'sche Curve ist gleichzeitig der Ort der Punkte deren $(n-2)$-te Polare einen Doppelpunkt hat und der Or der Doppelpunkte der ersten Polaren.

Die Hesse'sche Curve hat in einem Doppelpunkte de Grundcurve ebenfalls einen Doppelpunkt, und zwar sind die Tan-genten dieser Curve im Doppelpunkte dieselben.

In einem Rückkehrpunkte der Grundcurve hat die Hesse'-sche Curve einen dreifachen Punkt, und zwar berühren zwei Zweige desselben die Rückkehrtangente, während der dritte von diesen getrennt verläuft.

Die Singularitäten einer Hesse'schen Curve, einer Curve n-ter Ordnung (durch gestrichene Buchstaben zu bezeichnen) sind

$$n' = 3(n-2)$$
$$d' = 0$$
$$r' = 0$$
$$k' = 3(n-2)(3n-7)$$
$$w' = 9(n-2)(3n-8)$$
$$t' = \frac{27}{2}(n-1)(n-2)(n-3)(3n-8)$$
$$p' = \frac{1}{2}(3n-7)(3n-8)$$

9) Die linearen Polaren der Punkte der Hesse'schen Curve umhüllen die sogenannte Steiner'sche Curve. Die Singularitäten der Steiner'schen Curve sind:

$$n'' = 3(n-2)^2$$
$$d'' = \frac{3}{2}(n-2)(n-3)(3n^2-9n-5)$$
$$r'' = 12(n-2)(n-3)$$
$$k'' = 3(n-1)(n-2)$$
$$w'' = 3(n-2)(4n-9)$$

$$t'' = \frac{3}{2}(n-2)(n-3)(3n^2-3n-8)$$

$$p'' = \frac{1}{2}(3n-7)(3n-8).$$

Cartesische Coordinaten.

1) Die Gleichung einer ebenen Curve lautet:

$$y = f(x) \quad \text{oder} \quad F(x, y) = 0,$$

ihre Differentiation giebt

$$\frac{dy}{dx} = y' = f'(x); \quad F_1\,dx + F_2\,dy = 0.$$

2) Gleichung der Tangente:

$$\frac{\xi - x}{dx} = \frac{\eta - y}{dy}, \quad (\xi - x)F_1 + (\eta - y)F_2 = 0.$$

Gleichung der Normale:

$$(\xi - x)\,dx = (\eta - y)\,dy, \quad \frac{\xi - x}{F_1} = \frac{\eta - y}{F_2}.$$

Seien τ_x, τ_y, ν_x, ν_y die Winkel, welche die Tangente resp. die Normale mit den positiven Richtungen der x- resp. y-Axe bildet, so wird:

$$\cos\tau_x = \cos\nu_y = \frac{dx}{\sqrt{dx^2 + dy^2}} = \frac{dx}{ds} = \frac{F_2}{\sqrt{F_1^2 + F_2^2}}$$

$$\cos\tau_y = -\cos\nu_x = \frac{dy}{ds} = -\frac{F_1}{\sqrt{F_1^2 + F_2^2}}.$$

Die Länge des Perpendikels vom Ursprung auf die Tangente p_t und jenes auf die Normale p_n ist gegeben durch:

$$p_t = \frac{y - xy'}{\sqrt{1 + y'^2}} = \frac{F_1 x + F_2 y}{\sqrt{F_1^2 + F_2^2}}$$

$$p_n = \frac{x + yy'}{\sqrt{1 + y'^2}} = \frac{F_2 x - F_1 y}{\sqrt{F_1^2 + F_2^2}}.$$

Für eine homogene Function findet man

$$p_t = \frac{nF}{\sqrt{F_1^2 + F_2^2}}.$$

Für die Länge der Tangente findet man

$$T = \frac{y}{y'}\sqrt{1 + y'^2} = y\,\frac{ds}{dy} = \frac{y}{F_1}\sqrt{F_1^2 + F_2^2},$$

für jene der Subtangente

$$ST = \frac{y}{y'} = y\,\frac{dx}{dy} = -\,y\,\frac{F_2}{F_1},$$

für jene der Normale

$$N = y\sqrt{1+y'^2} = y\,\frac{ds}{dx} = \frac{y}{F_2}\sqrt{F_1^2 + F_2^2},$$

für jene der Subnormale

$$SN = yy' = y\,\frac{dy}{dx} = -\,\frac{F_1}{F_2}\,y.$$

Es ist

$$ST.SN = y^2.$$

3) Zwei auf einander folgende Tangenten bilden den Contingenzwinkel

$$d\tau = \left(\frac{dx}{ds}\right)^2 d\left(\frac{dy}{ds}\right) = \frac{d^2y\,dx - d^2x\,dy}{ds^2}.$$

4) Ein Kreis, der drei benachbarte Punkte mit der Curve gemein hat, wird ein Krümmungskreis genannt. Man hat, wenn ϱ sein Radius und θ der Coordinatenwinkel ist,

$$\varrho\,d\tau = ds$$

$$\varrho\sin\theta = \frac{ds^3}{dx\,d^2y - dy\,d^2x} = \frac{ds}{\sqrt{\left(d\,\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(d\,\frac{dy}{ds}\right)^2}}$$

$$= \frac{ds^2}{\sqrt{(d^2x)^2 + (d^2y)^2 - (d^2s)^2}}$$

$$= \frac{1}{\Delta}\,\{F_1^2 + F_2^2 - 2F_1F_2\cos\theta\}.$$

Dabei ist

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & F_1 & F_2 \\ F_1 & F_{11} & F_{12} \\ F_2 & F_{12} & F_{22} \end{vmatrix} = F_{11}F_2^2 + F_{22}F_1^2 - 2F_{12}F_1F_2,$$

wobei

$$F_{11}\,dx^2 + 2F_{12}\,dx\,dy + F_{22}\,dy^2 = 0$$

ist. Für rechtwinklige Coordinaten wird speciell

$$\varrho = \frac{\left(\frac{ds}{dx}\right)^3}{\frac{d^2y}{dx^2}} = \frac{\left\{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}^{3/2}}{\frac{d^2y}{dx^2}}$$

nd seine Coordinaten ξ und η

$$\xi = x - \varrho \frac{dy}{ds} = x - \left(\frac{ds}{dx}\right)^2 \frac{\frac{dy}{dx}}{\frac{d^2y}{dx^2}}$$

$$\eta = y + \varrho \frac{dx}{ds} = y + \left(\frac{ds}{dx}\right)^2 \frac{1}{\frac{d^2y}{dx^2}},$$

ür schiefwinklige Coordinaten hat man:

$$\xi = x - \varrho \frac{dy + \cos\theta\, dx}{\sin\theta . ds}$$

$$\eta = y + \varrho \frac{dx + \cos\theta\, dy}{\sin\theta . ds}.$$

5) Das Bogendifferential ergiebt sich aus

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + 2\cos\theta\, dx\, dy$$

$$= \frac{F_1^2 + F_2^2 - 2F_1F_2\cos\theta}{F_2^2} dx^2 = \frac{F_1^2 + F_2^2 - 2F_1F_2\cos\theta}{F_1^2} dy^2$$

laraus für $\theta = 90^0$

$$ds^2 = dx^2 + dy^2.$$

Polarcoordinaten.

1) Die Gleichung der Curve sei

$$\varrho = f(\varphi),$$

so wird

$$dx = d\varrho \cos\varphi - \varrho \sin\varphi\, d\varphi$$
$$dy = d\varrho \sin\varphi + \varrho \cos\varphi\, d\varphi$$

Sei τ der Winkel, den die Tangente zum Punkte ϱ, φ mit der Polaraxe einschliesst, so wird

$$cotg(\tau - \varphi) = \frac{1}{\varrho} \frac{d\varrho}{d\varphi}.$$

Die Polargleichung der Tangente im Punkte ϱ_1, φ_1 ist

$$\frac{1}{\varrho} \frac{d\varrho}{d\varphi} = \frac{\varrho_1 \cos(\varphi_1 - \varphi) - \varrho}{\varrho_1 \sin(\varphi_1 - \varphi)}.$$

Sei ν der Winkel, den die Normale mit der Polaraxe einschliesst, so wird

$$tgn(\nu - \varphi) = -\frac{1}{\varrho} \frac{d\varrho}{d\varphi}$$

und

$$-\frac{1}{\varrho}\frac{d\varrho}{d\varphi}=\frac{\varrho_1 \cos(\varphi_1-\varphi)-\varrho}{\varrho_1 \sin(\varphi_1-\varphi)}$$

die Gleichung der Normale. Seien T, N, ST, SN die Länge der Polar-Tangente, Polar-Normale, Polar-Subtangente, Polar-Subnormale, so wird, wenn τ der Winkel zwischen dem Leitstrahl und der Tangente ist,

$$T=\varrho\sqrt{1+\left(\frac{\varrho\,d\varphi}{d\varrho}\right)^2}=\frac{\varrho}{\cos\tau}=\varrho\frac{ds}{d\varrho}$$

$$N=\sqrt{\varrho^2+\left(\frac{d\varrho}{d\varphi}\right)^2}=\frac{\varrho}{\sin\tau}=\frac{ds}{d\varphi}$$

$$ST=\varrho^2\frac{d\varphi}{d\varrho}=\varrho\,tgn\,\tau$$

$$SN=\frac{d\varrho}{d\varphi}=\varrho\,cotg\,\tau.$$

Für die Entfernung des Poles von der Tangente und Normale findet man:

$$p_t=\frac{\varrho^2}{\sqrt{\varrho^2+\left(\frac{d\varrho}{d\varphi}\right)^2}},\quad p_n=\frac{\varrho\frac{d\varrho}{d\varphi}}{\sqrt{\varrho^2+\left(\frac{d\varrho}{d\varphi}\right)^2}}.$$

Der Krümmungsradius ist gegeben durch

$$R=\frac{\left\{\varrho^2+\left(\frac{d\varrho}{d\varphi}\right)^2\right\}^{3/2}}{\varrho^2+2\left(\frac{d\varrho}{d\varphi}\right)^2-\varrho\frac{d^2\varrho}{d\varphi^2}}=\frac{ds}{d\varphi+du},$$

wobei

$$ds=\sqrt{(d\varrho)^2+\varrho^2(d\varphi)^2}$$

$$\sin u=\frac{\varrho\,d\varphi}{ds},\quad \cos u=\frac{d\varrho}{ds},\quad tgn\,u=\frac{\varrho\,d\varphi}{d\varrho},$$

dabei ist u derjenige Winkel, den die Tangente der Curve mit dem Radiusvector ϱ bildet. Er liegt mit der Polaraxe auf derselben Seite von ϱ.

Seien γ und δ die Coordinaten des Krümmungsmittelpunktes. Man setze

$$tgn\,\vartheta = \frac{\left(\frac{d\varrho}{d\varphi}\right)^3 + \varrho^2 \frac{d\varrho}{d\varphi}}{\varrho\left(\frac{d\varrho}{d\varphi}\right)^2 - \varrho^2 \frac{d^2\varrho}{d\varphi^2}},$$

o wird

$$tgn\,\gamma = tgn(\varphi + \vartheta),$$

erner

$$\delta^2 = \frac{\varrho^2\left[\left(\frac{d\varrho}{d\varphi}\right)^2 - \varrho\frac{d^2\varrho}{d\varphi^2}\right]^2 + \left(\frac{d\varrho}{d\varphi}\right)^2\left[\left(\frac{d\varrho}{d\varphi}\right)^2 + \varrho^2\right]^2}{\left[\varrho^2 + 2\frac{d\varrho}{d\varphi} - \varrho\frac{d^2\varrho}{d\varphi^2}\right]^2}.$$

Hat die Curve eine Asymptote, so muss

$$lim\,\varrho^2\frac{d\varphi}{d\varrho} = A, \text{ für } lim\,\varrho = \infty.$$

Rechtwinklige Coordinaten des Krümmungsmittelpunktes:

$$\varrho\cos\varphi - \frac{\left\{\varrho^2 + \left(\frac{d\varrho}{d\varphi}\right)^2\right\}\left\{\frac{d\varrho}{d\varphi}\sin\varphi + \varrho\cos\varphi\right\}}{\varrho^2 + 2\left(\frac{d\varrho}{d\varphi}\right)^2 - \varrho\frac{d^2\varrho}{d\varphi^2}}$$

$$\varrho\sin\varphi + \frac{\left\{\varrho^2 + \left(\frac{d\varrho}{d\varphi}\right)^2\right\}\left\{\frac{d\varrho}{d\varphi}\cos\varphi - \varrho\sin\varphi\right\}}{\varrho^2 + 2\left(\frac{d\varrho}{d\varphi}\right)^2 - \varrho\frac{d^2\varrho}{d\varphi^2}}$$

Sei θ der Winkel zwischen Radiusvector und Tangente, ψ ener zwischen Radiusvector und Normale, so wird

$$tgn\,\theta = \frac{\varrho}{\frac{d\varrho}{d\varphi}}, \quad tgn\,\psi = -\frac{\frac{d\varrho}{d\varphi}}{\varrho}.$$

Man hat ferner

$$\frac{\varrho}{R} = \cos\psi + \frac{d\sin\psi}{d\varphi}.$$

Quadratur ebener Curven.

1) Die Fläche zwischen zwei Abscissen x_1 und x_2 ist:

$$F_1 = \sin\theta\int_{x_1}^{x_2} y\,dx, \quad \theta \text{ ist der Coordinatenwinkel.}$$

Die Fläche zwischen zweien vom Ursprung an die Punkt $(x_1 y_1)$ und $(x_2 y_2)$ gezogenen Leitstrahlen ist gegeben durch

$$F_2 = \frac{1}{2} \int [x\,dy - y\,dx] + C.$$

Ersetzt man die rechtwinkligen Coordinaten durch Polar coordinaten, also

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi,$$

so wird

$$F_2 = \frac{1}{2} \int r^2 d\varphi + C.$$

2) Der Flächeninhalt V des Vierecks zwischen den beiden Krümmungsradien, dem Evoluten- und Evolventen-Bogen, ist gegeben durch

$$V = \frac{1}{2} \int \frac{\left\{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}^2}{\frac{d^2 y}{dx^2}} dx + \text{Const.}$$

wenn $y = f(x)$ die Gleichung der Evolvente ist.

3) Es sei

$$y_x = \sum a_x x^x,$$

so wird der Flächeninhalt zwischen der x-Axe und den Ordinaten $y_0 \ldots y_x$, wenn die Differenz $x_n - x_0 = h$ in n gleiche Theile getheilt wird:

$$F_1 = \frac{1}{2} h \sin\theta . (y_0 + y_1)$$

$$F_2 = \frac{1}{6} h \sin\theta . (y_0 + 4 y_1 + y_2)$$

$$F_3 = \frac{1}{8} h \sin\theta . (y_0 + 3 y_1 + 3 y_2 + y_3)$$

$$F_4 = \frac{1}{90} h \sin\theta . (7 y_0 + 32 y_1 + 12 y_2 + 32 y_3 + 7 y_4)$$

Allgemein

$$F_x = \left\{n h \sum_1^n A_x y_x\right\} \sin\theta.$$

Dabei ist

$$A_p = \int_0^1 \frac{X_p}{M_p}\, dx$$

$$X_p = \frac{nx(nx-1)\ldots(nx-n)}{nx-p}$$

$$M_p = X_p \Big|^{x=\frac{p}{n}}$$

Allgemein ist

$A_p = A_{n-p}$. (Methode von Cotes.)

Man hat auch nach Simpson

$$\frac{F_x}{\sin\theta} = \frac{1}{3} h(y_0 + y_x) + \frac{2}{3} h(y_2 + y_4 + \cdots y_{x-2}) + \frac{4}{3} h(y_1 + y_3 + \cdots y_{x-1}).$$

Vergl. Integralrechnung, §. 97.

Rectification ebener Curven.

1) Die Bogenlänge s ist gegeben durch

$$s = \int_{x_0}^{x_1} dx \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}, \quad \text{wenn } y = f(x)$$

oder

$$s = \int_{y_0}^{y_1} dy \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2}, \quad \text{wenn } x = f(y)$$

oder

$$s = \int_{t_1}^{t_2} dt \sqrt{\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\psi}{dt}\right)^2}, \quad \text{wenn } \begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}$$

In Polarcoordinaten, wenn ϱ als Function von φ gegeben ist:

$$s = \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} \sqrt{\varrho^2 + \left(\frac{d\varrho}{d\varphi}\right)^2}\, d\varphi,$$

und wenn φ als Function von ϱ gegeben ist:

$$s = \int_{\varrho}^{\varrho_1} \sqrt{1 + \left(\varrho \frac{d\varphi}{d\varrho}\right)^2}\, d\varrho.$$

2) Der zwischen zwei Punkten einer Evolute gelegene Bogen ist gleich der Differenz zwischen den entsprechenden Krümmungsradien der Evolvente.

3) Sei w die Sehne und Δs die Länge des Bogens, welchen sie unterspannt, so wird

$$w = \Delta s - \frac{1}{24\varrho^2}\Delta s^3 - \frac{1}{48}\frac{d\left(\frac{1}{\varrho^2}\right)}{ds}\Delta s^4$$
$$+\frac{1}{720}\left\{\frac{3}{8\varrho^4} - \frac{1}{\varrho^2 r^3} - 4\frac{d^2\left(\frac{1}{\varrho^2}\right)}{ds^2} - \frac{1}{\varrho}\frac{d^2\left(\frac{1}{\varrho}\right)}{ds^2}\right\}\Delta s^5 + \cdots$$

Dabei ist ϱ der Krümmungsradius.

Somoff, Theoretische Mechanik, p. 69.

4) Man hat näherungsweise

$$\Delta s = w + \frac{1}{48}\left\{\frac{1}{\varrho^2} + \frac{1}{\varrho'^2}\right\}\Delta s^3,$$

ϱ und ϱ' sind die Krümmungsradien am Anfang und Ende des Bogens.

Serret, Cours de calcul diff. et int. 1868, Tom. I., p. 396.

5) Die Länge eines Bogens einer Curve ist annähernd gleich $\frac{4}{3}$ seiner Sehne vermindert um den sechsten Theil der Summe der Projectionen der Sehne auf die in den Endpunkten des Bogens an denselben gelegten Tangenten.

6) Sei A die Sehne des ganzen, B jene des halben Kreisbogens, so ist genähert der Bogen

$$= \frac{8B - A}{3}.$$

Huyghens: De circuli magnitudine inventa.

7) Mit der Aufgabe, rectificable Curven zu finden, hat sich zunächst Euler (Com. Acad. Petr. V und VI, 1730), sodann Monge (Mém. de l'acad. 1784), beschäftigt.

Lösung von Euler.

Es ist

$$y = \int dy = yx - \int x\frac{d^2y}{dx^2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 1)$$

$$s = \int ds = \int dx\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

$$= x\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2} - \int \frac{x\frac{dy}{dx}\frac{d^2y}{dx^2}}{\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}} \quad . \quad . \quad . \quad 2)$$

Setzt man

$$\left.\begin{aligned} P &= \int x\frac{d^2y}{dx^2} \\ Q &= \int \frac{x\frac{dy}{dx}\cdot\frac{d^2y}{dx^2}}{\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}} \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 3)$$

so wird

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dQ}{\sqrt{dP^2 - dQ^2}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 4)$$

Seien P und Q zwei beliebige Functionen einer Variablen t, so bestimmt man durch 4) $\frac{dy}{dx}$, daraus nach 2) die Länge des Bogens, und aus 1) und 3) durch Elimination von t die Gleichung der Curve.

Lösung von Monge.

Aus

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$$

folgt wegen

$$1 = \cos^2\omega + \sin^2\omega$$

$$ds^2 = \{\cos\omega\, dx - \sin\omega\, dy\}^2 + \{\sin\omega\, dx + \cos\omega\, dy\}^2.$$

Wird nun

$$\sin\omega\, dx + \cos\omega\, dy = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 1)$$

so folgt:

$$ds = \cos\omega\, dx - \sin\omega\, dy \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 2)$$

Durch Integration von 1) und 2) folgt:

$$x\sin\omega + y\cos\omega = \psi(\omega) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 3)$$

$$s = x\cos\omega - y\sin\omega + \varphi(\omega) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 4)$$

wobei ψ und φ noch zu bestimmende Functionen sind.

Um diese zu bestimmen, differentiren wir die letzten Gleichungen und vergleichen das Resultat mit 1) und 2), sodann folgt:

$$\left.\begin{aligned} x\cos\omega - y\sin\omega &= \psi'(\omega) \\ x\sin\omega + y\cos\omega &= \varphi'(\omega) \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 5)$$

oder wegen der früheren Beziehungen

$$\psi(\omega) = \varphi'(\omega)$$

also

$$\psi'(\omega) = \varphi''(\omega).$$

Sodann liefern die Gleichungen 5)

$$x = \varphi'(\omega) \sin \omega + \varphi''(\omega) \cos \omega \quad \ldots \ldots \quad \text{I.}$$

$$y = \varphi'(\omega) \cos \omega - \varphi''(\omega) \sin \omega \quad \ldots \ldots \quad \text{II.}$$

und damit aus 4)

$$s = \varphi(\omega) + \varphi''(\omega) \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad \text{III.}$$

Man hat

$$\frac{dy}{dx} = -\operatorname{tgn} \omega.$$

Also wenn R den Krümmungsradius bezeichnet, wegen

$$ds = R \frac{dy}{dx},$$

auch wegen III

$$R = \varphi'(\omega) + \varphi'''(\omega) \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad \text{IV.}$$

wodurch zugleich R bestimmt ist. Wählt man $\varphi(\omega)$ beliebig, so liefert die Elimination von ω aus I. und II. eine Curve

$$f(xy) = 0,$$

deren Bogenlänge durch III. dargestellt ist.

Parallele Curven.

Sei

$$F(xy) = 0$$

die Gleichung einer Curve,

$$F_1 dx + F_2 dy = 0,$$

ferner

$$(\xi - x) dx + (\eta - y) dy = 0$$

$$(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 = c^2.$$

Eliminirt man $x, y, \frac{dy}{dx}$, so ergiebt sich

$$f(\xi \eta) = 0$$

als Gleichung der Parallelcurve. Sie ist der geometrische Ort derjenigen Punkte der Normalen der gegebenen Curve, welche von der Curve gleichen Abstand c haben.

Parallelcurven haben dieselbe Evolute, demnach ist die Differenz der Krümmungsradien der entsprechenden Punkte gleich der Entfernung $c = R' - R$.

Die Differenz der Bogen zweier Parallelcurven zwischen denselben Normalen ist gleich einem Kreisbogen, dessen Radius c und dessen Centriwinkel der von jenen Normalen eingeschlossene Winkel ψ ist. $s' - s = \pm c(\psi' - \psi)$.

Der Flächeninhalt zwischen den Bogen zweier Parallelcurven und zweier Normalen ist

$$F = \frac{1}{2} c^2 (\psi' - \psi) \pm cs = \pm \frac{1}{2} c(s + s').$$

Trajectorien.

Geschichte: Johann Bernoulli war der erste, der sich mit (orthogonalen) Trajectorien beschäftigte (Acta Erudit. 1697, p. 211 und 1698, p. 472).

Entstehung: Ein System von Curven ist gegeben, dargestellt durch eine Gleichung, in welcher ein variabler Parameter enthalten ist; es sollen die Curven bestimmt werden, welche die gegebenen unter einem bestimmten Winkel schneiden.

Ist dieser Winkel ein rechter, so nennt man die Curven orthogonale Trajectorien.

Sei

$$F(x, y, \alpha) = 0 \quad \ldots \ldots \ldots \quad 1)$$

die Gleichung der Curvenschaar, aus ihr findet man

$$\frac{dy}{dx} = \varphi(x, y, \alpha).$$

Sei ferner die Tangente des Schnittwinkels ε gleich n und ξ, η die Coordinaten der Trajectorie, so wird

$$n = \frac{d\eta - \varphi(x, y, a)\, d\xi}{d\xi + \varphi(x, y, a)\, d\eta} \quad \ldots \ldots \quad 2)$$

die Differentialgleichung derselben. Aus 1) und 2) eliminire man a, setze sodann $x = \xi$, $y = \eta$ und integrire die so entstandene Gleichung.

Ist $\varepsilon = 90$, also $n = \infty$, so wird

$$1 + \frac{dy}{dx}\frac{d\eta}{d\xi} = 0$$

die Gleichung der orthogonalen Trajectorien.

Die Elimination des Parameters a kann manchmal Schwierigkeiten verursachen. Ueber reciproke Trajectorien siehe **Klügel** mathem. Wörterbuch V., S. 113.

Ist die Gleichung der Curve in Polarcoordinaten gegeben, also

$$F(r, \varphi, \alpha) = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 1)$$

so sei $tgn\,\varepsilon = n$ und es ergiebt sich:

$$\left(n\frac{\partial F}{\partial \varphi} - r\frac{\partial F}{\partial r}\right)\frac{dr}{d\varphi} - r\left(\frac{\partial F}{\partial \varphi} + nr\frac{\partial F}{\partial r}\right) = 0 \quad . \quad . \quad 2)$$

Im speciellen Falle $\varepsilon = \frac{\pi}{2}$,

$$\frac{\partial F}{\partial \varphi}\cdot\frac{dr}{d\varphi} - r^2\frac{\partial F}{\partial r} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 2!)$$

Daraus die Gleichung der verlangten Curve durch Elimination des Parameters α.

Einhüllende Curven.

1) Man eliminire den veränderlichen Parameter p aus

$$f(x, y, p) = 0, \quad \frac{\partial f(x, y, p)}{\partial p} = 0.$$

2) Die Gleichung enthalte zwei Parameter, die jedoch einer Bedingungsgleichung Genüge leisten

$$f(x, y, p_1, p_2) = 0$$
$$\varphi(p_1, p_2) = 0.$$

Bildet man noch

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial p_1} & \frac{\partial f}{\partial p_2} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial p_1} & \frac{\partial \varphi}{\partial p_2} \end{vmatrix} = 0,$$

so lässt sich p_1, p_2 aus diesen drei Gleichungen eliminiren. Ebenso, wenn

$$f(x, y, p_1, p_2, \ldots p_n) = 0$$
$$\varphi_\varkappa(p_1, \ldots p_n) = 0, \quad \varkappa = 1, \ldots (n-1)$$

gegeben ist. Man bilde

$$\sum \pm \frac{\partial \varphi_1}{\partial p_1}\frac{\partial \varphi_2}{\partial p_2}\cdots\frac{\partial \varphi_{n-1}}{\partial p_{n-1}} = 0$$

und eliminire aus allen diesen Gleichungen die Grössen $p_1, \ldots p_n$.

Fusspunktcurven.

Lässt man von einem festen Punkte (g, h) Senkrechte auf die Tangenten einer gegebenen Curve $F(x,y) = 0$, so bilden die Fusspunkte (u, v) die Fusspunktcurve.

Es wird

$$v - y = \frac{dy}{dx}(u - x)$$

$$v - h = -\frac{dx}{dy}(u - g).$$

Dazu kommt noch

$$F(x, y) = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{dy}{dx}\frac{\partial F}{\partial y} = 0.$$

Aus diesen vier Gleichungen muss x, y, $\frac{dy}{dx}$ eliminirt werden.

Evoluten.

Geschichte. Die Evoluten wurden zuerst von Huyghens (Horologium oscillatorium) synthetisch behandelt (1673).

Eine Evolute ist der geometrische Ort der Krümmungsmittelpunkte.

Sei

$$\frac{dy}{dx} = y', \quad \frac{d^2y}{dx^2} = y''$$

und ξ, η die Coordinaten des Krümmungsmittelpunktes, so wird

$$\xi = x - \frac{1 + y'^2}{y''} \cdot y'$$

$$\eta = y + \frac{1 + y'^2}{y''}.$$

Eliminirt man aus diesen und der gegebenen Gleichung

$$F(x,y) = 0$$

die Grössen x und y, so bleibt die Gleichung der Evolute übrig.

Die Tangente der Evolute ist zugleich die Normale der Evolvente oder der Grundcurve.

Die Länge des Evolutenbogens ist gleich der Differenz der beiden ihn begrenzenden Krümmungsradien der Evolvente. Die

Punkte der grössten und kleinsten Krümmung der Evolvente entsprechen im Allgemeinen den Rückkehrpunkten (auch ∞ fernen Punkten [ausnahmsweise]) der Evolute. Die Normale in einem Wendepunkte der Evolvente ist im Allgemeinen eine Asymptote der Evolute.

Evolventen.

Bewegt sich die Tangente ohne zu gleiten auf einer Curve, so beschreibt ein beliebiger Punkt derselben eine Evolvente. Eine Curve hat demnach unendlich viele Evolventen, die einander parallel laufen.

Seien x, y die Coordinaten der Curve, ξ, η jene der Evolute, so wird:

$$f(x, y) = 0$$

$$\eta - y = \frac{dy}{dx}(\xi - x)$$

$$(y - \eta)\frac{d\eta}{d\xi} + x - \xi = 0 \quad \text{oder} \quad \frac{dy}{dx}\frac{d\eta}{d\xi} + 1 = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{dy}{dx}\frac{\partial f}{\partial y} = 0.$$

Aus diesen vier Gleichungen muss $x, y, \frac{dy}{dx}$ eliminirt werden.

Jede Evolvente ist eine Roulette. Die rollende Curve ist eine Gerade, in welcher der erzeugende Punkt liegt.

Den Wendepunkten der Evolute entsprechen im Allgemeinen Rückkehrpunkte der Evolvente.

Tractorien.

Geschichte: Huyghens war der erste, der diese Curven betrachtete (Acta Erud. 1693, p. 476).

Tractorie oder Zugcurve heisst jede Curve, bei welcher der zwischen dem Berührungspunkte und irgend einer anderen gegebenen Curve, welche Directrix genannt wird, liegende Theil der Tangente eine constante Länge hat.

Sei

$$F(x, y) = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad 1)$$

die Gleichung der Directrix und ξ, η die Coordinaten der Tractorie, so wird

$$y - \eta = \frac{d\eta}{d\xi}(x - \xi) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 2)$$

und wenn T eine Constante bezeichnet,

$$T^2 = (x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 3)$$

Wird aus den Gleichungen 1), 2), 3) x und y eliminirt, so ergiebt sich die Differentialgleichung der Tractorie. Man findet

$$x = \xi + \frac{T d\xi}{\sqrt{d\xi^2 + d\eta^2}}$$

$$y = \eta + \frac{T d\eta}{\sqrt{d\xi^2 + d\eta^2}}$$

diese Grössen hat man also in 1) einzusetzen, um die verlangte Gleichung zu erhalten.

Rollcurven oder Trochoidalcurven.

Geschichte: Die erste Abhandlung über diese Curven hat De la Hire geliefert. Paris, Mem. 1706.

Rollt eine Curve $Y = f(X)$, ohne zu gleiten, auf einer Curve $y = F(x)$ als Basis, so beschreibt ein mit ihr fest verbundener Punkt eine Trochoide $\eta = \varphi(\xi)$.

Seien (c, d) die Coordinaten des Berührungspunktes im Anfange der Bewegung, so wird:

$$\int_c^X dX \sqrt{1 + \left(\frac{dY}{dX}\right)^2} = \int_c^x dx \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \quad . \quad . \quad . \quad 1)$$

Seien (a, b) die Anfangscoordinaten des Punktes, welcher die Trochoide beschreibt, so wird:

$$(X - a)^2 + (Y - b)^2 = (\xi - x)^2 + (\eta - y)^2$$
$$= \{\psi(X)\}^2.$$

Aus 1) folgt

$$y = \chi(x),$$

macht man $x = X$, so wird

$$y = \chi(X)$$

und damit

$$\{\psi(X)\}^2 - (\xi - X)^2 + (\eta - \chi[X])^2 = 0,$$

daraus durch Differentiation

$$\xi - X + \{\eta - \chi(X)\}\chi'(X) + \psi(X)\psi'(X) = 0.$$

Eliminirt man aus den beiden letzten Gleichungen X, so ergiebt sich eine Beziehung zwischen ξ und η, welche eben die Gleichung der gesuchten Trochoide ist.

Oft ist es bequemer zu verfahren wie folgt:

Sei

$$r = f(\varphi) \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad 2)$$

die Gleichung der rollenden Curve

$$y = F(x) \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad 3)$$

die der Basiscurve, sodann ergiebt sich

$$\left[(\xi - x) + (\eta - y)\frac{dy}{dx}\right]\sqrt{1 + \left(r\frac{d\varphi}{dr}\right)^2} + r\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = 0$$

$$(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 = r^2$$

$$\xi - x + (\eta - y)\frac{d\eta}{d\xi} = 0.$$

Setzt man in diese drei Gleichungen die Werthe für

$$y,\ \frac{dy}{dx},\ r,\ \frac{dr}{d\varphi},$$

wie sie aus 2) und 3) folgen, so erhält man drei neue Gleichungen. Aus diesen eliminire man x und φ und integrire die so entstandene Gleichung. Die Constante ist durch die Anfangslage bestimmt.

Die Normale in einem Punkte einer Roulette geht durch den entsprechenden Berührungspunkt der beiden gegebenen Curven.

Kegelschnitte.

1) Die allgemeine Gleichung der Kegelschnitte sei:

$$f \equiv a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + a_{33}z^2 = 0.$$

Sei ferner

$$-\varDelta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} \quad \text{Hesse'sche Determinante}$$

$$= a_{11}(a_{23}^2 - a_{22}a_{32}) + a_{12}(a_{12}a_{33} - a_{13}a_{23}) + a_{13}(a_{31}a_{22} - a_{32}a_{12})$$

$$\varDelta_{11} = a_{23}^2 - a_{22}a_{33},\ \varDelta_{22} = a_{31}^2 - a_{33}a_{11},\ \varDelta_{33} = a_{12}^2 - a_{11}a_{22}$$

$$\varDelta_{12} = a_{12}a_{33} - a_{13}a_{23},\ \varDelta_{23} = a_{23}a_{11} - a_{21}a_{31},\ \varDelta_{13} = a_{31}a_{22} - a_{32}a_{12}.$$

Sei θ der Coordinatenwinkel und es werde

$$2\Phi \sin^2\theta = a_{11} + a_{22} - 2a_{12}\cos\theta$$

gesetzt.

2) Classification der Kegelschnitte:

I. $\frac{\Delta_{33}}{\sin^2\theta} < 0$ Elliptische Kegelschnitte.

$a_{11}\Delta$ oder $a_{22}\Delta > 0$ 1) reelle Ellipse
< 0 2) imaginäre Ellipse
$= 0$ 3) Punkt

II. $\Delta_{33} = 0$ Parabolische Kegelschnitte

$\Delta \lessgtr 0$ Parabel

$$\Delta = 0 \begin{cases} \Delta_{22} > 0 & \text{4) zwei parallele reelle Gerade} \\ \phantom{\Delta_{22}} = 0 & \text{5) zwei zusammenfallende Gerade} \\ \phantom{\Delta_{22}} < 0 & \text{6) zwei parallele imaginäre Gerade.} \end{cases}$$

III. $\frac{\Delta_{33}}{\sin^2\theta} > 0$ Hyperbolische Kegelschnitte

$\Delta \gtrless 0$ 7) Hyperbel

$\Delta = 0$ 8) zwei sich schneidende reelle Gerade.

Specielle Formen:

$$a_{11} = a_{22}, \quad a_{12} = a_{11}\cos\theta, \quad \text{Kreis}$$

$$\Phi = 0, \quad \text{gleichseitige Hyperbel.}$$

Der Winkel φ zwischen den beiden Geraden in 8) ist gegeben durch

$$tgn\,\varphi = \frac{\sqrt{\Delta_{33}}}{\Phi \sin\theta}.$$

Die Coordinaten des Mittelpunktes für 1) und 7)

$$x = \frac{\Delta_{13}}{\Delta_{33}}, \quad y = \frac{\Delta_{23}}{\Delta_{33}}.$$

3) Die allgemeine Gleichung des Kegelschnittes sei:

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0,$$

so ergiebt sich Folgendes:

α) Ist $F = 0$, so geht die Curve durch den Coordinatenanfang,

β) $D^2 - AF = 0$, so berührt die Curve die X-Axe,

$E^2 - CF = 0$, „ „ „ „ „ Y-Axe.

4) Seien $(x_\varkappa y_\varkappa)$, $\varkappa = 1, 2, 3, 4, 5$ diejenigen fünf Punkte, durch welche eine Curve zweiten Grades gegeben ist, so ist die letztere selbst gegeben durch

$$\begin{vmatrix} x^2 & x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & x_4^2 & x_5^2 \\ xy & x_1 y_1 & x_2 y_2 & x_3 y_3 & x_4 y_4 & x_5 y_5 \\ y^2 & y_1^2 & y_2^2 & y_3^2 & y_4^2 & y_5^2 \\ x & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \\ y & y_1 & y_2 & y_3 & y_4 & y_5 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

5) Die Gerade

$$y = Mx + n$$

hat mit dem Kegelschnitt zwei Punkte gemein. Sei

$$\begin{aligned} \varDelta = (Bn + D)^2 + EM(EM - 2Bn) + 2DM(E + Cn) \\ - An(Cn + 2E) - F(A + 2BM + CM^2), \end{aligned}$$

so werden diese

reell, wenn $\varDelta > 0$,
fallen zusammen, wenn $\varDelta = 0$,
sind imaginär, wenn $\varDelta < 0$.

6) Sei gegeben

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0,$$

so lautet die Gleichung dieser Curve in Liniencoordinaten:

$$\begin{vmatrix} C E \\ E F \end{vmatrix} u^2 + 2 \begin{vmatrix} D F \\ B E \end{vmatrix} uv + \begin{vmatrix} A D \\ D F \end{vmatrix} v^2$$

$$+ 2 \begin{vmatrix} B D \\ C E \end{vmatrix} u + 2 \begin{vmatrix} B E \\ A D \end{vmatrix} v + \begin{vmatrix} A B \\ B C \end{vmatrix} = 0.$$

7) Sei gegeben

$$Au^2 + 2Buv + Cv^2 + 2Du + 2Ev + F = 0.$$

Sei ferner

$$\varDelta = \begin{vmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{vmatrix}$$

so stellt die gegebene Gleichung

α) eine Ellipse dar, wenn $F_1 \varDelta > 0$
β) eine Parabel, wenn $F_1 = 0, \quad \varDelta \gtrless 0$
γ) eine Hyperbel, wenn $F_1 \varDelta < 0$.

Wird $\varDelta = 0$ und

$$\begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} < 0,$$

so stellt die Gleichung zwei Punkte dar. Ist

$$\begin{vmatrix} AB \\ BC \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} AB \\ DE \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} AD \\ DF \end{vmatrix} = 0,$$

so entspricht die Gleichung einem einzigen Punkt.

Allgemeine Sätze über Kegelschnitte.

1) In jedem Sechseck, welches einem Kegelschnitt umschrieben ist, schneiden sich die drei Verbindungslinien gegenüberliegender Ecken in einem Punkte. (Satz von Brianchon.) (Journ. de l'ecol. polyt. 1806, Cah. 13.)

2) In jedem Sechseck, welches einem Kegelschnitt eingeschrieben ist, liegen die drei Schnittpunkte gegenüberliegender Seiten auf einer Geraden. (Satz von Pascal.) (Essai pour les coniques, 1630.)

3) Tangente und Normale für irgend einen Punkt eines Kegelschnittes halbiren die Winkel, welche von den beiden Leitstrahlen gebildet werden.

4) Durchmesser, von denen jeder die Sehnen halbirt, die mit dem anderen parallel laufen, werden conjugirte Durchmesser genannt.

5) Die Diagonalen eines einem Kegelschnitte umschriebenen Parallelogramms bilden zwei conjugirte Durchmesser.

6) Die Seiten eines jeden einem Kegelschnitte eingeschriebenen Parallelogramms sind parallel zu zwei conjugirten Durchmessern. Die Diagonalen schneiden sich im Mittelpunkte der Curve, oder anders ausgedrückt: zwei Sehnen, welche irgend einen Punkt des Kegelschnittes mit den Endpunkten eines Durchmessers verbinden, sind parallel zu zwei conjugirten Durchmessern dieses Kegelschnittes.

7) Die Berührungspunkte des umschriebenen Parallelogramms bilden wieder ein Parallelogramm, dessen Seiten mit den Diagonalen des ersten parallel sind.

8) Die Tangenten in den Eckpunkten eines eingeschriebenen Parallelogramms bilden wieder ein Parallelogramm, dessen Diagonalen den Seiten des ersten parallel sind.

Pole und Polaren der Kegelschnitte.

1) Die Gleichung des Kegelschnittes sei

$$f(x\,y\,z) = 0.$$

Setzt man

$$x = x_0 + \lambda x_1, \quad y = y_0 + \lambda y_1, \quad z = z_0 + \lambda z_1$$

und entwickelt nach λ, so wird

$$f_{00} + 2\lambda f_{01} + \lambda^2 f_{11} = 0.$$

Die Wurzeln dieser Gleichung liefern die Schnittpunkte der Geraden mit dem Kegelschnitte. Es wird, wegen der Homogenität der Function:

$$2f_{00} = 2f(x_0\,y_0\,z_0) = x_0 f'(x_0) + y_0 f'(y_0) + z_0 f'(z_0)$$
$$2f_{11} = 2f(x_1\,y_1\,z_1) = x_1 f'(x_1) + y_1 f'(y_1) + z_1 f'(z_1)$$
$$2f_{01} = x_0 f'(x_1) + y_0 f'(y_1) + z_0 f'(z_1)$$
$$= x_1 f'(x_0) + y_1 f'(y_0) + z_1 f'(z_0),$$

dabei ist

$$\frac{1}{2} f'(x_0) = \frac{1}{2} \frac{\partial f_0}{\partial x_0} = a_{11} x_0 + a_{12} y_0 + a_{13} z_0$$

etc.

2) Zwei Punkte werden **harmonische Pole** des Kegelschnittes genannt, wenn ihre Verbindungslinie den Kegelschnitt in zwei Punkten schneidet, die harmonisch sind zu den beiden Punkten. Die Bedingung für ein harmonisches Polenpaar 0 und 1 ist

$$x f'(x_0) + y f'(y_0) + z f'(z_0) = 0,$$

dabei sind $x\,y\,z$ die Coordinaten von 1. Ist der Punkt 0 gegeben, so müssen die Coordinaten von 1 dieser Gleichung genügen, sie stellt eine Gerade dar, auf welcher der Punkt 1 beliebig angenommen werden kann. Diese führt den Namen **Polare** des Punktes 0. Es gelten nun folgende Sätze.

1) Die Polaren aller Punkte auf einer geraden Linie schneiden sich in dem Pole der geraden Linie.
2) Wenn eine gerade Linie sich um einen Punkt in ihr dreht, so beschreibt der Pol die Polare des Drehpunktes.
3) Wenn der Pol auf dem Kegelschnitte selbst liegt, so wird seine Polare Tangente des Kegelschnittes für den Pol selbst und der Pol der Tangente ist ihr Berührungspunkt.

4) Der Pol der unendlich fernen Geraden ist der Mittelpunkt des Kegelschnittes.
5) Je zwei Linien, welche durch den Brennpunkt gehen und auf einander senkrecht stehen, sind conjugirte Polaren in Bezug auf den Kegelschnitt.
6) Die Directrices eines Kegelschnittes sind die Polaren seiner reellen Brennpunkte.

Ellipse.

1) **Mittelpunktsgleichung**

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Gleichung in Polarcoordinaten

$$r^2 = \frac{b^2}{1 - \varepsilon^2 \cos^2 \varphi} = \frac{a^2 b^2}{a^2 \sin^2 \varphi + b^2 \cos^2 \varphi},$$

ε wird die numerische, $a\varepsilon$ die lineare Excentricität genannt. Es ist

$$b^2 = a^2(1 - \varepsilon^2) = ap$$

$$\varepsilon = \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2}}$$

$$p = a(1 - \varepsilon^2).$$

Abstand der Brennpunkte vom Mittelpunkte $= a\varepsilon$; von einem der Scheitel $a(1 \pm \varepsilon)$.

Die Directrix ist die Polare des ihr zunächst liegenden Brennpunktes; ihre Gleichung ist $x = -\frac{a}{\varepsilon}$, ihr Abstand vom Scheitel $a + \frac{a}{\varepsilon}$ oder $\frac{a}{\varepsilon} - a$.

2) **Scheitelgleichung**

$$y^2 = 2px - \frac{b^2}{a^2} x^2.$$

3) **Polargleichung** (Pol = Brennpunkt)

$$r = \frac{p}{1 + \varepsilon \cos \varphi}.$$

Für die Leitstrahlen von den beiden Brennpunkten findet man:

$$r_1 = a + \varepsilon x, \quad r_2 = a - \varepsilon x,$$

also

$$r_1 + r_2 = 2a.$$

4) Conjugirte Durchmesser als Axen. Seien α und β die Winkel der conjugirten Durchmesser mit der x-Axe, so wird:

$$tgn\,\alpha\; tgn\,\beta = -\frac{b^2}{a^2}.$$

Sei ferner

$$\frac{1}{a_1^2} = \frac{\cos^2\alpha}{a^2} + \frac{\sin^2\alpha}{b^2}$$
$$\frac{1}{b_1^2} = \frac{\cos^2\beta}{a^2} + \frac{\sin^2\beta}{b^2},$$

also

$$ab = a_1 b_1 \sin(\beta - \alpha)$$
$$a^2 + b^2 = a_1^2 + b_1^2,$$

so ist die Gleichung der Ellipse in Bezug auf die conjugirten Durchmesser:

$$\frac{x^2}{a_1^2} + \frac{y^2}{b_1^2} - 1 = 0.$$

Die Tangenten in den Endpunkten des einen Durchmessers sind dem conjugirten Durchmesser parallel. Die Supplementarsehnen laufen zu zwei conjugirten Durchmessern parallel.

Supplementarsehnen sind solche, die von einem beliebigen Punkte der Ellipse nach den Endpunkten der grossen Axe gezogen werden.

5) Gleichung in Liniencoordinaten:

$$a^2u^2 + b^2v^2 - 1 = 0.$$

6) Gleichung der Tangente (beziehungsweise der Polare):

$$\frac{x\xi}{a^2} + \frac{y\eta}{b^2} - 1 = 0.$$

Gleichung der Normale

$$y - \eta = \frac{a^2}{b^2}\frac{\eta}{\xi}(x - \xi).$$

Man findet ferner:

$$T = \frac{1}{\xi}\sqrt{a^2 - \xi^2}\,\sqrt{a^2 - \varepsilon^2\xi^2}$$

$$ST = \frac{a^2 - \xi^2}{\xi}$$

$$N = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - \varepsilon^2 \xi^2}$$

$$SN = -\frac{b^2}{a^2}\xi.$$

Gleichung der Brennstrahlen für den Punkt $\xi\eta$:

$$y(\xi - \varepsilon) = \eta(x - \varepsilon)$$
$$y(\xi + \varepsilon) = \eta(x + \varepsilon).$$

Seien r_1 und r_2 zwei auf einander $\perp$ stehende Radien, so wird

$$\frac{1}{r_1^2} + \frac{1}{r_2^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}.$$

Sind s_1 und s_2 zwei Sehnen, die durch den Brennpunkt gehen und auf einander $\perp$ stehen, so wird:

$$\frac{1}{s_1} + \frac{1}{s_2} = \frac{1}{2p} + \frac{1}{2a}.$$

7) Die Coordinaten des Krümmungsmittelpunktes und der Krümmungsradien ϱ sind gegeben durch:

$$\xi = \frac{a^2 - b^2}{a^4} x^3, \quad \eta = -\frac{a^2 - b^2}{b^4} y^3$$

$$\varrho = -\frac{\sqrt{(a^4 y^2 + b^4 x^2)^3}}{a^4 b^4}.$$

Gleichung der Evolute:

$$\left(\frac{\xi a}{a^2 - b^2}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{\eta b}{a^2 - b^2}\right)^{\frac{2}{3}} = 1.$$

Gleichung der Fusspunktcurve:

$$\{u(u - g) + v(v - h)\}^2 = a^2(u - g)^2 + b^2(v - h)^2.$$

Rectification der Ellipse. Sei

$$x = a \sin\varphi, \quad y = b\cos\varphi,$$

die Gleichung dieser Curve, ferner

$$\frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} = \varepsilon,$$

so wird der Bogen 0 bis φ

$$s = a\int_0^\varphi \sqrt{1 - \varepsilon^2 \sin^2\varphi} = a\,E(\varepsilon, \varphi).$$

Für einen Ellipsenquadranten q hat man speciell

$$q = a\,E(\varepsilon, \varphi).$$

Sei

$$P_0 = \varphi, \quad P_n = \frac{1}{n} \{(n-1) P_{n-2} - \sin^{n-1} \varphi . \cos \varphi\},$$

so wird

$$s = a \left\{P_0 - \frac{P_2}{2} \varepsilon^2 - \frac{1}{2} \frac{P_4}{4} \varepsilon^4 - \frac{1.3}{2.4} \frac{P_6}{6} \varepsilon^6 - \dots\right.$$

$$q = \frac{\pi}{2} a \left\{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 \frac{\varepsilon^2}{1} - \left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2 \frac{\varepsilon^4}{3} - \left(\frac{1.3.5}{2.4.6}\right)^2 \frac{\varepsilon^6}{5} - \dots\right.$$

Es ist näherungsweise:

$$q = \frac{\pi}{4} \left\{\frac{a+b}{2} + \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}\right\} + \varrho$$

$$0 < \varrho < \frac{\pi a}{180} \frac{\varepsilon^6}{1-\varepsilon^2}.$$

Die über einer Abscisse x der Mittelpunktsgleichung stehende Fläche ist:

$$F = \frac{b}{2a} \left\{x \sqrt{a^2 - x^2} + a^2 \arcsin \frac{x}{a}\right\}$$

oder

$$F = \frac{xy}{2} + \frac{ab}{2} \arcsin \frac{x}{a}.$$

Der Inhalt der ganzen Ellipse

$$J = ab\pi.$$

Hyperbel.

1) Mittelpunktsgleichung:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0.$$

Gleichung in Polarcoordinaten

$$r^2 = \frac{-b^2}{1 - \varepsilon^2 \cos^2 \varphi} = \frac{-a^2 b^2}{a^2 \sin^2 \varphi - b^2 \cos^2 \varphi},$$

dabei ist

$$b^2 = a^2 (\varepsilon^2 - 1) = pa.$$

Abstand des Brennpunktes vom Mittelpunkte $\pm a\varepsilon$

Gleichung der Directrix $x = \pm \frac{a}{\varepsilon}$

Gleichung der Asymptoten $y = \pm \frac{b}{a} x.$

2) Seien α und β jene Winkel, die zwei conjugirte Durchmesser mit der x-Axe einschliessen, so wird:

$$\frac{\cos\alpha\cos\beta}{a^2} - \frac{\sin\alpha\sin\beta}{b^2} = 0$$

oder

$$tgn\,\alpha\; tgn\,\beta = \frac{b^2}{a^2}.$$

Sei ferner

$$\frac{\cos^2\alpha}{a^2} - \frac{\sin^2\alpha}{b^2} = \frac{1}{a_1^2},$$

$$\frac{\cos^2\beta}{a^2} - \frac{\sin^2\beta}{b^2} = \frac{1}{b_1^2}$$

wobei

$$a\,b = a_1 b_1 \sin(\beta - \alpha)$$

$$a_1^2 - b_1^2 = a^2 - b^2$$

$$a_1^2 + b_1^2 = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\sin(\beta - \alpha)}(a^2 + b^2),$$

so lautet die Gleichung der Hyperbel bezogen auf zwei conjugirte Durchmesser

$$\frac{x^2}{a_1^2} - \frac{y^2}{b_1^2} - 1 = 0.$$

3) Polargleichung für einen Brennpunkt als Pol

$$r = \frac{p}{1 + \varepsilon\cos\varphi},$$

Scheitelgleichung:

$$y^2 = 2px + \frac{b^2}{a^2}x^2,$$

Asymptotengleichung:

$$xy = \frac{1}{4}(a^2 + b^2).$$

4) Für zwei Strahlen r_1, r_2 vom Brennpunkte nach (xy) findet man:

$$r_1 = a + \varepsilon x, \quad r_2 = -a + \varepsilon x,$$

also

$$r_1 - r_2 = 2a.$$

5) Gleichungen zweier Supplementarsehnen:

$$y - \eta = \frac{-\eta}{a - \xi}(x - \xi)$$

$$y - \eta = \frac{\eta}{a + \xi}(x - \xi).$$

6) Gleichung in Liniencoordinaten:

$$a^2 u^2 - b^2 v^2 - 1 = 0.$$

7) Gleichung der Tangente, beziehungsweise der Polare:

$$\frac{x\xi}{a^2} - \frac{y\eta}{b^2} - 1 = 0.$$

Gleichung der Normale:

$$y - \eta = -\frac{a^2}{b^2}\frac{\eta}{\xi}(x - \xi).$$

Man findet ferner:

$$T = \frac{1}{\xi}\sqrt{\xi^2 - a^2}\sqrt{\varepsilon^2\xi^2 - a^2}$$

$$S\,T = \frac{a^2 - \xi}{\xi}$$

$$N = \frac{b}{a}\sqrt{\varepsilon^2\xi^2 - a^2}$$

$$S\,N = \frac{b^2}{a^2}\,\xi.$$

8) Für zwei Sehnen, die sich rechtwinklig schneiden und durch den Brennpunkt gehen:

$$\frac{1}{s_1} + \frac{1}{s_2} = \frac{2 - \varepsilon^2}{2p}.$$

9) Die Coordinaten des Krümmungsmittelpunktes sind

$$\xi = \frac{a^2 + b^2}{a^4}\,x^3$$

$$y = -\frac{a^2 + b^2}{b^4}\,y^3.$$

Der Krümmungsradius

$$R = -\frac{\sqrt{(a^4 y^2 + b^4 x^2)^3}}{a^4 b^4}.$$

Gleichung der Evolute

$$\left(\frac{\xi}{\alpha}\right)^{\frac{2}{3}} - \left(\frac{\eta}{\beta}\right)^{\frac{2}{3}} = 1,$$

wobei

$$\alpha = \frac{a^2 + b^2}{a}, \quad \beta = \frac{a^2 + b^2}{b}$$

gesetzt wurde.

Gleichung der Fusspunktcurve

$$\{u(u - g) + v(v - h)\}^2 = a^2(u - g)^2 - b^2(v - h)^2.$$

Rectification der Hyperbel. Sei

$$\sqrt{a^2 + b^2} = c, \quad \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} = k,$$

so wird, wenn

$$y = \frac{b \, tgn \, \varphi}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$x = \frac{a}{\cos \varphi} \sqrt{1 - \frac{a^2 \sin^2 \varphi}{a^2 + b^2}}$$

die Gleichung dieser Curve ist,

$$s = \frac{b^2}{c} \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\cos^2 \varphi \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}}$$

oder

$$s = \frac{b^2}{c} F(k, \varphi) - c E(k, \varphi) + c \, tgn \, \varphi \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}.$$

Ersetzt man die Gleichung der Curve durch

$$x = a \sec \varphi, \quad y = b \, tgn \, \varphi,$$

so wird

$$s = \frac{a}{k} \int \sqrt{1 - k^2 \cos^2 \varphi} \, \frac{d\varphi}{\cos^2 \varphi}$$

oder

$$s = a \left\{ \frac{1}{k} tgn \, \varphi - \frac{Q_0}{2} k - \frac{1}{2} \frac{Q_2}{4} k^3 - \frac{1.3}{2.4} \frac{Q_4}{6} k^5 - \cdots \right.$$

wobei

$$Q_0 = \varphi, \quad Q_n = \frac{1}{n} \left\{ (n-1) Q_{n-2} + \cos^{n-1} \varphi \sin \varphi \right\}$$

oder

$$s = a \left\{ \frac{1}{k} tgn \, \varphi - A_0 \varphi - A_2 \sin 2\varphi - A_4 \sin 4\varphi - \cdots \right\}$$

wobei

$$A_0 = \frac{1}{2} k + \frac{1}{4} \left(\frac{1}{2}\right)^2 k^3 + \frac{1}{6} \left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2 k^5 + \frac{1}{8} \left(\frac{1.3.5}{2.4.6}\right)^2 k^7 + \cdots$$

$$A_2 = \frac{1}{32} k^3 + \frac{1}{64} k^5 + \frac{225}{3072} k^7 + \cdots$$

$$A_4 = \frac{1}{512} k^5 + \frac{15}{8192} k^7 + \cdots$$

$$A_6 = \frac{5}{24576} k^7 + \cdots$$

Für die Fläche der Hyperbel von $x = a$ bis $x = x$ findet man

$$F = \frac{b}{2a} \left\{ x\sqrt{x^2 - a^2} - a^2 \log \frac{x + \sqrt{x^2 - a^2}}{a} \right\}$$

oder

$$F = \frac{xy}{2} + \frac{ab}{2} \log \left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b} \right).$$

Wird

$$xy = \frac{a^2 + b^2}{4} = k^2$$

die Gleichung der Hyperbel, so folgt:

$$F = k^2 \log \frac{x_1}{x_0}.$$

Parabel.

1) Scheitelgleichung

$$y^2 = 2px.$$

Polargleichung, Brennpunkt als Pol

$$\varrho = \frac{p}{1 - \cos\varphi} = \frac{p}{2 \sin^2 \frac{\varphi}{2}}.$$

Abstand des Brennpunktes vom Scheitel und zugleich der Directrix $= \frac{1}{2} p$.

Gleichung der Parabel in Liniencoordinaten:

$$pv^2 - 2u = 0.$$

2) Die Parabel bezogen auf conjugirte Durchmesser

$$\eta^2 = \frac{2p\xi}{\sin^2\beta},$$

wobei

$$tgn\,\beta = \frac{p}{b},$$

dabei ist b eine beliebige Ordinate der Parabel.

Alle Durchmesser der Parabel sind zur Axe parallel. Jeder Durchmesser halbirt die Sehnen, welche zu der durch seinen Anfangspunkt gelegten Tangente parallel sind.

3) Gleichung der Tangente und zugleich der Polare:

$$y\eta = p(x + \xi)$$

oder

$$y - \eta = \frac{p}{\eta}(x - \xi).$$

Gleichung der Normale

$$y - \eta = -\frac{\eta}{p}(x - \xi).$$

Man findet ferner:

$$T = 2\sqrt{\xi\left(\xi + \frac{1}{2}p\right)}$$

$$ST = 2\xi$$

$$N = \sqrt{2p\left(\xi + \frac{1}{2}p\right)}$$

$$SN = p.$$

4) Coordinaten des Krümmungsmittelpunktes:

$$\xi = 3x + p$$

$$\eta = -\sqrt{\frac{8x^3}{p}} = -\frac{y^3}{p},$$

der Krümmungsradius:

$$R = -\frac{\sqrt{(p^2 + y^2)^3}}{p^2}.$$

Gleichung der Evolute

$$27p\eta^2 = 8\xi^3 \quad \text{(Semicubische Parabel).}$$

Fusspunktcurve:

$$u(u - g)^2 + (u - g)(v - h)v + a(v - h)^2 = 0.$$

Ein zwischen dem Scheitel und dem Punkte x, y enthaltener Bogen s, wenn

$$y = \frac{x^2}{2h}$$

die Gleichung der Parabel ist, hat die Länge

$$s = \frac{1}{2}\left\{\frac{x\sqrt{h^2 + x^2}}{h} + h \log \frac{x + \sqrt{h^2 + x^2}}{h}\right\}.$$

Der Flächeninhalt eines Parabelsegments beträgt $\frac{2}{3}$ des über seine Sehne errichteten, dem Segment umschriebenen Parallelogramms.

Sei

$$r = \frac{p}{1 + \cos\varphi}$$

die Gleichung der Parabel, so ist der Flächeninhalt zwischen Axe, Leitstrahl vom Brennpunkte und Bogen:

$$\frac{1}{6}\, y(p+r) = \frac{1}{4}\, p^2 tgn\, \frac{\varphi}{2} \cdot \left\{1 + \frac{1}{3}\, tgn^2\, \frac{\varphi}{2}\right\}.$$

Ferner ist der Flächeninhalt zwischen Sehne und Bogen

$$\frac{(y_1 - y_2)^3}{12p}.$$

Cyklische Curven.

Geschichte: A. Cykloide. Mersene und Galilei waren die ersten, die sich mit dieser Curve beschäftigt haben, letzterer fand auch eine geometrische Quadratur, welche Roberval 1634 analytisch bewies.

B. Epicykloide. Für den Erfinder der Epicykloiden gilt der bekannte dänische Astronom Olaf Roemer, der sie im Jahre 1674 bei der Untersuchung der besten Form der gezähnten Räder zur Anwendung brachte.

Ueber die cyklischen Curven vergleiche: Weissenborn, „Die cyklischen Curven", Eisenach 1856.

Entstehung: Wenn auf einer Geraden ein Kreis mit dem Radius r rollt, so beschreibt ein Punkt auf einem Radius ϱ

1) eine gedehnte Cykloide, wenn $\varrho < r$,
2) eine gewöhnliche Cykloide, wenn $\varrho = r$,
3) eine verkürzte Cykloide, wenn $\varrho > r$.

Wird die Basis nicht eine Gerade, sondern wieder ein Kreis, so entsteht eine Curve, die Epicykloide oder Hypocykloide genannt wird, je nachdem jener Kreis auf der äusseren oder inneren Seite des festen Kreises rollt. Diese Curven werden gedehnte oder verkürzte genannt, je nachdem der beschreibende Punkt innerhalb oder ausserhalb der Peripherie des bewegten Kreises liegt.

Sind die beiden Radien gleich, so wird die Epicykloide zu einer Cardioide.

Ausführlicher als es hier möglich, findet man diese Curve in L. A. Soncke's „Sammlung von Aufgaben aus der Differentialrechnung", Halle, 4. Aufl., behandelt.

A. Cykloide.

Sei r der Radius des rollenden Kreises, so wird

$$x = r\varphi - (r + d)\sin\varphi$$
$$y = (r + d)(1 - \cos\varphi)$$

oder

$$x = \arccos\frac{r + d - y}{r + d} - \sqrt{2(r + d)y - y^2}$$

und die Differentialgleichung

$$dx = \frac{(y - d)\,dy}{\sqrt{2(r + d)y - y^2}}.$$

Wird d +, so entsteht eine verkürzte,
$d = 0$, eine gewöhnliche,
d —, eine gedehnte Cykloide.

Man hat

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{2(r + d)y - y^2}}{y - d}$$
$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{ry + rd + d^2}{(y - d)^3}.$$

Die Gleichung der Tangente:

$$(y - d)(\eta - y) = \sqrt{2(r + d)y - y^2}(\xi - x),$$

diejenige der Normale:

$$\sqrt{2(r + d)y - y^2}(\eta - y) = -(y - d)(\xi - x).$$

Man hat ferner

$$T = \frac{y\sqrt{2ry + d^2}}{\sqrt{2(r + d)y - y^2}}$$
$$ST = -\frac{y(y - d)}{\sqrt{2(r + d)y - y^2}}$$
$$N = \frac{y\sqrt{2ry + d^2}}{y - d}$$
$$SN = \frac{y\sqrt{2(r + d)y - y^2}}{y - d}.$$

Krümmungshalbmesser ϱ

$$\varrho = \frac{(2ry + d^2)^{\frac{3}{2}}}{ry + rd + d^2}.$$

Die Coordinaten des Krümmungsmittelpunktes

$$\beta = \frac{d^3 + r y d - r y^2}{r y + r d + d^2}$$

$$\alpha = arcos\,\frac{r + d - y}{r + d} + \frac{r(y - d)\sqrt{2(r + d)y - y^2}}{r y + r d + d^2}.$$

Für die gewöhnliche Cykloide findet man

$$x = r\,arc\,cos\,\frac{r - y}{r} - \sqrt{2 r y - y^2}.$$

Flächeninhalt eines Stückes zwischen y_1 und y_2

$$= -\frac{3r + y_2}{2}\sqrt{2 r y_2 - y_2^2} + \frac{3r + y_1}{2}\sqrt{2 r y_1 - y_1^2}$$

$$+ \frac{3}{2} r^2\,arc\,cos\,\frac{1}{r^2}\left[(r - y_1)(r - y_2) + \sqrt{2 r y_1 - y_1^2}\sqrt{2 r y_2 - y_2^2}\right].$$

Der ganze Raum, der bei einer vollständigen Umwälzung erzeugt wird, beträgt $3 r^2 \pi$.

Die Länge des zwischen denselben Ordinaten enthaltenen Bogens

$$= 2\sqrt{2r}\sqrt{2r - y_1} - 2\sqrt{2r}\sqrt{2r - y_2}.$$

Die Länge der ganzen Cykloide $= 8r$.

B. Epi- und Hypocykloiden.

Das obere Zeichen bezieht sich auf die Epicykloide, das untere auf die Hypocykloide.

$$x = (r \pm \varrho)\cos\varphi \mp \varrho\cos\frac{r \pm \varrho}{\varrho}\varphi$$

$$y = (r \pm \varrho)\sin\varphi - \varrho\sin\frac{r \pm \varrho}{\varrho}\varphi,$$

dabei ist r der Radius des festen, und ϱ der des rollenden Kreises. Man findet

$$\frac{dy}{dx} = \mp\,tgn\,\frac{r \pm 2\varrho}{2\varrho}\varphi = -\frac{r\cos\varphi - x}{r\sin\varphi - y}$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{r \pm 2\varrho}{2\varrho(r \pm \varrho)}\,\frac{1}{\left[\cos\frac{r \pm 2\varrho}{2\varrho}\varphi\right]^2 \sin\frac{r}{2\varrho}\varphi}$$

und daraus leicht die Gleichung der Tangente und Normale.

Ferner wird

$$T = y \, cosec \, \frac{r \pm 2\varrho}{2\varrho} \varphi$$

$$S T = \pm y \, cotg \, \frac{r \pm 2\varrho}{2\varrho} \varphi$$

$$N = y \, sec \, \frac{r \pm 2\varrho}{2\varrho} \varphi$$

$$S N = \mp y \, tgn \, \frac{r \pm 2\varrho}{2\varrho} \varphi.$$

Der Krümmungsradius wird

$$= \frac{2\varrho(r \pm \varrho)}{r \pm 2\varrho} \sin \frac{r}{2\varrho} \varphi.$$

Die Coordinaten des Krümmungsmittelpunktes:

$$\beta = \frac{r}{r \pm 2\varrho} \left[(r \pm \varrho) \sin \varphi + \varrho \sin \frac{r \pm \varrho}{\varrho} \varphi \right]$$

$$\alpha = \frac{r}{r \pm 2\varrho} \left[(r \pm \varrho) \cos \varphi \pm \cos \frac{r \pm \varrho}{\varrho} \varphi \right].$$

Diese liefern zugleich die Gleichung der Evolute.

Wird $r = \varrho$, so entsteht die sogenannte Cardioide. Ihre Gleichung lautet in rechtwinkligen Coordinaten:

$$(x^2 + y^2)^2 - 6 r^2 (x^2 + y^2) + 8 r^3 x - 3 r^4 = 0.$$

Ihre einfachste Gleichung

$$u = 2r(1 + \sin t).$$

Die Spiralen.

A. Spirale des Archimedes.

Entstehung. Rotirt eine Gerade gleichförmig um einen festen Punkt, so beschreibt ein auf ihr sich gleichförmig bewegender Punkt eine Spirale des Archimedes.

Gleichung der Curve:

$$u = a\varphi = \frac{r\varphi}{2\pi}$$

$$\sqrt{x^2 + y^2} = a \, artgn \, \frac{y}{x}.$$

Man findet

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a \sin \varphi + u \cos \varphi}{a \cos \varphi - u \sin \varphi}$$

und damit leicht die Gleichung der Tangente und Normale.

Man hat ferner:

$$T = \frac{u \sin\varphi \sqrt{1+\varphi^2}}{\sin\varphi + \varphi\cos\varphi}$$

$$S\,T = \frac{u \sin\varphi \{\cos\varphi - \varphi\sin\varphi\}}{\sin\varphi + \varphi\cos\varphi}$$

$$N = \frac{u \sin\varphi \sqrt{1+\varphi^2}}{\cos\varphi - \varphi\sin\varphi}$$

$$S\,N = -\frac{u \sin\varphi (\sin\varphi + \varphi\cos\varphi)}{\cos\varphi - \varphi\sin\varphi}.$$

Der Krümmungsradius wird

$$= \frac{u(1+\varphi^2)^{\frac{3}{2}}}{\varphi(\varphi^2+2)}$$

und die Coordinaten des Krümmungsmittelpunktes

$$\beta = \frac{u\{\varphi\sin\varphi + (1+\varphi^2)\cos\varphi\}}{\varphi(\varphi^2+2)}$$

$$\alpha = \frac{u\{\varphi\cos\varphi - (1+\varphi^2)\sin\varphi\}}{\varphi(\varphi^2+2)}.$$

Man findet ferner

Die Polartangente $= a\varphi\sqrt{1+\varphi^2} = u\sqrt{1+u^2a^2}$

„ Polarsubtangente $= a$

„ Polarnormale $= a\sqrt{1+\varphi^2} = \sqrt{u^2+a^2}$

„ Polarsubnormale $= a.$

Der Flächeninhalt eines zwischen zwei Leitstrahlen enthaltenen Sectors wird

$$= \frac{r^2}{24\pi^2}(\varphi_2^3 - \varphi_1^3).$$

Die Länge eines zwischen diesen Leitstrahlen enthaltenen Bogens

$$= \frac{r}{4\pi}\{\varphi_2\sqrt{1+\varphi_2^2} - \varphi_1\sqrt{1+\varphi_1^2}\}$$

$$- \frac{r}{4\pi}\log\left\{\frac{-\varphi_2 + \sqrt{1+\varphi_2^2}}{-\varphi_1 + \sqrt{1+\varphi_1^2}}\right\}.$$

B. Die allgemeinen Spiralen.

Ihre Gleichung: $u = a\varphi^n$.

Specielle Fälle:

$u\varphi = a$, die hyperbolische Spirale.

$u^2 = a^2\varphi$, die parabolische Spirale.

Man findet

$$T = \frac{u \sin\varphi \sqrt{n^2 + \varphi^2}}{n \sin\varphi + \varphi \cos\varphi}$$

$$ST = \frac{u \sin\varphi \{n \cos\varphi - \varphi \sin\varphi\}}{n \sin\varphi + \varphi \cos\varphi}$$

$$N = \frac{u \sin\varphi \sqrt{n^2 + \varphi^2}}{n \cos\varphi - \varphi \sin\varphi}$$

$$SN = -\frac{u \sin\varphi (n \sin\varphi + \varphi \cos\varphi)}{n \cos\varphi - \varphi \sin\varphi}.$$

Der Krümmungsradius

$$\varrho = \frac{u (n^2 + \varphi^2)^{\frac{3}{2}}}{\varphi(\varphi^2 + n^2 + n)}.$$

Die Coordinaten des Krümmungsmittelpunktes

$$\beta = \frac{n u \{\varphi \sin\varphi + (n^2 + \varphi^2) \cos\varphi\}}{\varphi \{\varphi^2 + n^2 + n\}}$$

$$\alpha = \frac{n u \{\varphi \cos\varphi - (n^2 + \varphi^2) \sin\varphi\}}{\varphi \{\varphi^2 + n^2 + n\}}.$$

Die Polartangente wird $= u\sqrt{1 + u^2\left(\frac{d\varphi}{du}\right)^2} = \frac{a}{n}\varphi^n \sqrt{n^2 + \varphi^2}$

" Polarsubtangente $= n^2 \frac{d\varphi}{du} = \frac{a}{n} \varphi^{n-1}$

" Polarnormale $= \sqrt{u^2 + \left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2} = a\varphi^{n-1}\sqrt{n^2 + \varphi^2}$

" Polarsubnormale $= \frac{du}{d\varphi} = n a \varphi^{n-1}$.

C. Die logarithmische Spirale.

Ihre Gleichung: $u = a^\varphi$.

Sei $\lambda = \log a$, so wird:

$$T = \frac{u\sqrt{1 - \cos^2\varphi + \cos^4\varphi + 2\lambda \sin\varphi \cos^3\varphi + \lambda^2(1 - \cos^4\varphi)}}{\lambda \sin\varphi + \cos\varphi}$$

$$ST = u \sin\varphi \frac{\lambda \cos\varphi - \sin\varphi}{\lambda \sin\varphi + \cos\varphi}$$

$$N = \frac{u\sqrt{1 - \cos^4\varphi - 2\lambda \sin\varphi \cos^3\varphi + \lambda^2(1 - \cos^2\varphi + \cos^4\varphi)}}{\lambda \cos\varphi - \sin\varphi}$$

$$SN = -u \sin\varphi \frac{\lambda \sin\varphi + \cos\varphi}{\lambda \cos\varphi - \sin\varphi}.$$

Die Polartangente wird $= \frac{u}{\lambda}\sqrt{1 + \lambda^2}$

" Polarsubtangente $= \frac{u}{\lambda}$

" Polarnormale $= u\sqrt{1 + \lambda^2}$

" Polarsubnormale $= \lambda u$

Krümmungshalbmesser $= u\sqrt{1 + \lambda^2}$,

Coordinaten des Krümmungsmittelpunktes

$$\alpha = -\lambda a^{\varphi} \sin\varphi$$

$$\beta = \lambda a^{\varphi} \cos\varphi,$$

Gleichung der Evolute

$$\log\left\{\frac{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}{\lambda}\right\} = arctgn\left(-\frac{\alpha}{\beta}\right).$$

Demnach ist die Evolute wieder eine logarithmische Spirale.
Der Flächeninhalt eines Sectors

$$= \frac{1}{4} \frac{a^{2\varphi_2} - a^{2\varphi_1}}{\lambda}.$$

Die Länge des zugehörigen Bogens

$$= \sqrt{1 + \lambda^2} \left\{\frac{a^{\varphi_2} - a^{\varphi_1}}{\lambda}\right\}.$$

Geschichtliche Anmerkung.

Conon, ein Zeitgenosse des Archimedes, hat die archimedische Spirale entdeckt. Archimedes hat eine Schrift über sie geliefert. Die logarithmische Spirale hat zuerst Descartes betrachtet.

Die hyperbolische fand Joh. Bernoulli, der sich überhaupt viel mit Spiralen beschäftigt hat.

Die parabolische rührt von Jac. Bernoulli her (Act. Erud. 1691).

Quadratrix.

Allgemeine Definition. Quadratrix ist eine Curve, die, über derselben Axe mit einer gegebenen Curve beschrieben, durch ihre Ordinaten die Flächenräume dieser angiebt.

Geschichte. Die älteste Quadratrix ist die des Dinostratus, eines Zeitgenossen des Plato. Der allgemeine Begriff stammt von Newton (Opuscula I, p. 102).

Quadratrix des Dinostratus: Sei ein rechtwinkliges Coordinatensystem gegeben. Es bewege sich eine Gerade r um das Centrum. Denkt man sich nun auf dieser Geraden in irgend einer Lage, die durch die Coordinaten des Endpunktes xy bestimmt sein mag, einen Punkt so bestimmt, dass der bis dahin beschriebene Bogen sich zum Viertelkreis verhält wie $\overline{r-y} : r$, so gehört dieser Punkt der Quadratrix an.

Gleichung der Curve

$$u = \frac{2r}{\pi} \frac{\varphi}{\sin\varphi}.$$

Diese Curve hat unendlich viele Asymptoten.

Es wird

$$y = \frac{2\varphi}{\pi} r, \quad x = x \, tgn\, \varphi,$$

daraus lassen sich leicht die Tangenten und Normalen ableiten.

Es wird ferner

$$T = \frac{2r\varphi}{\pi \sin^2\varphi} \sqrt{\sin^2\varphi - 2\varphi \sin\varphi \cos\varphi + \varphi^2}$$

$$ST = \frac{2r\varphi}{\pi \sin^2\varphi} (\sin\varphi \cos\varphi - \varphi)$$

$$N = \frac{2r\varphi}{\pi} \frac{\sqrt{\sin^2\varphi - 2\varphi \sin\varphi \cos\varphi + \varphi^2}}{\sin\varphi \cos\varphi - \varphi}$$

$$SN = \frac{2r\varphi}{\pi} \frac{\sin^2\varphi}{\sin\varphi \cos\varphi - \varphi}.$$

Krümmungshalbmesser wird

$$= \frac{r}{\pi} \frac{[\sin^2\varphi - 2\varphi \sin\varphi \cos\varphi + \varphi^2]^{\frac{3}{2}}}{\sin^3\varphi (\sin\varphi - \varphi \cos\varphi)}$$

und die Coordinaten des Krümmungsmittelpunktes:

$$\alpha = -\frac{r}{\pi}\frac{\sin^2\varphi - 4\varphi\sin\varphi\cos\varphi + \varphi^2(1+2\cos^2\varphi)}{\sin\varphi(\sin\varphi - \varphi\cos\varphi)}$$

$$\beta = \frac{r}{\pi}\frac{\sin^3\varphi\cos\varphi + \varphi\sin^2\varphi(1-\varphi\cos^2\varphi) + \varphi^2\sin\varphi\cos\varphi(1+2\cos^2\varphi) + \varphi}{\sin^3\varphi(\sin\varphi - \varphi\cos\varphi)}$$

Der Flächeninhalt eines Sectors zwischen den **Amplituden** φ_1 und φ_2

$$J = \frac{2r^2}{\pi^2}\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}\frac{\varphi^2}{\sin^2\varphi}d\varphi$$

$$= \frac{2r^2}{\pi^2}\Big[\varphi^2 \cot g\,\varphi - 2\varphi \log\sin\varphi\Big]_{\varphi_1}^{\varphi_2} + \frac{4r^2}{\pi^2}\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}\log\sin\varphi\, d\varphi,$$

von 0 bis $\frac{\pi}{2}$ wird

$$J = \frac{2r^2}{\pi}\log 2.$$

Aehnlich ist die Quadratrix von Tschirnhausen

$$y = \frac{2\varphi}{\pi}r, \quad x = r\cos\varphi, \quad x = r\cos\frac{\pi y}{2r}$$

zu behandeln.

Ueber die Asymptoten der Quadratrix von Dinostratus vergleiche Kästner, Geometrische Abhandl. II, S. 218 bis 241.

Conchoide.

Geschichte. Von Nicomedes etwa im 2. Jahrh. v. Chr. bei Gelegenheit des Deli'schen Problems entdeckt. Newton gebraucht sie zur geometrischen Auflösung der Gleichungen dritten und vierten Grades (Arithm. univ., p. 115). Ueber Conchoiden auf beliebiger Basis vergl. De la Hire (Mem. de l'Acad. des Scien. 1708).

Entstehung. Denkt man sich eine horizontale Linie und unterhalb derselben einen Punkt, zieht man durch diesen Pol eine beliebige Gerade und beschreibt in jenem Punkte der Horizontale, in welchem die Gerade jene trifft, mit einem Radius $= a$ einen Kreis, so trifft dieser die Gerade in zwei Punkten der Conchoide.

Gleichung der Curve:

$$\frac{y^2 x^2}{(y+b)^2} + y^2 = a^2$$

(b ist die Entfernung des Poles von der Horizontalen), oder auch

$$y^4 + 2by^3 + (x^2 + b^2 - a^2)y^2 - 2a^2by - a^2b^2 = 0$$

$$x = \pm \frac{b+y}{y} \sqrt{a^2 - y^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y^2\sqrt{a^2 - y^2}}{y^3 + a^2 b}.$$

Wird $b < a$, so hat die Curve eine Schleife. Die Horizontale ist zugleich eine Asymptote.

Man hat:

$$T = \frac{a\sqrt{y^4 + 2by^3 + a^2b^2}}{y\sqrt{a^2 - y^2}}$$

$$ST = \frac{y^3 + a^2 b}{y\sqrt{a^2 - y^2}}$$

$$N = \frac{ay\sqrt{y^4 + 2by^3 + a^2b^2}}{y^3 + a^2 b}$$

$$SN = -\frac{y^3\sqrt{a^2 - y^2}}{y^3 + a^2 b}.$$

Der Krümmungshalbmesser ϱ und die Coordinaten des Krümmungsmittelpunktes $\alpha\,\beta$ werden

$$\varrho = \frac{a\{y^4 + 2by^3 + a^2b^2\}^{3/2}}{y^3\{2a^2b - y^3 - 3by^2\}}$$

$$\alpha = \frac{b(2y + 3b)(a^2 - y^2)^{3/2}}{y(2a^2b - y^3 - 3by^2)}$$

$$\beta = \frac{b[a^4b^2 - y^3(y^3 - 3a^2y - 3a^2b^2)]}{y^3[2a^2b - y^3 - 3by^2]}.$$

Die Bestimmung eines Bogens führt auf ein hyperelliptisches Integral; die zwischen zwei Ordinaten y_1 und y_2 enthaltene Fläche wird:

$$= \frac{1}{2}\left[y\sqrt{a^2 - y^2}\right]_{y_1}^{y_2} + ab\left[\log ay + y\sqrt{a^2 - y^2}\right]_{y_1}^{y_2}$$

$$- \frac{1}{2}a^2 \arcsin \frac{y^2\sqrt{a^2 - y_1^2} - y_1\sqrt{a^2 - y_2^2}}{a^2}.$$

Lemniscate.

Geschichte. Zuerst von Jac. Bernoulli (Acta Erud. 1694. Opera I, Nr. LX) entdeckt. Ueber die Geschichte dieser sehr interessanten Curve: Ennepper, Elliptische Functionen.

Entstehung. Fällt man vom Mittelpunkte einer gleichseitigen Hyperbel auf die Tangenten Perpendikel, so ist sie der geometrische Ort der Fusspunkte.

Gleichung:

$$(x^2 + y^2)^2 - a^2(x^2 - y^2) = 0$$

$$\varrho^2 = a^2 \cos 2\varphi$$

$$\frac{d\varrho}{d\varphi} = -\frac{a \sin 2\varphi}{\sqrt{\cos 2\varphi}}, \quad \frac{1}{\varrho}\frac{d\varrho}{d\varphi} = -\operatorname{tgn} 2\varphi$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{y}\,\frac{a^2 - 2x^2 - 2y^2}{a^2 + 2x^2 + 2y^2}.$$

Daraus leicht die Gleichung der Tangente und Normale. Die Curve hat im Anfangspunkt einen Doppelpunkt mit den Tangenwinkeln: $\frac{1}{4}\pi$ und $\frac{3}{4}\pi$. Die Form der Curve ∞.

Man findet:

$$T = \frac{a^2 \eta \sqrt{\eta^2 + \xi^2}}{\xi(a^2 - 2\xi^2 - 2\eta^2)} = \frac{a \sin\varphi \sqrt{\cos 2\varphi}}{\cos\varphi \{1 - 2\cos 2\varphi\}}$$

$$ST = -\frac{\eta^2}{\xi}\cdot\frac{a^2 + 2\xi^2 + 2\eta^2}{a^2 - 2\xi^2 - 2\eta^2}$$

$$= -\frac{a \sin^2\varphi}{\cos\varphi}\cdot\frac{1 + 2\cos 2\varphi}{1 - 2\cos 2\varphi}\sqrt{\cos 2\varphi}$$

$$N = \frac{a^2\sqrt{\xi^2 + \eta^2}}{a^2 + 2\xi^2 + 2\eta^2} = \frac{a\sqrt{\cos 2\varphi}}{1 + 2\cos\varphi}$$

$$SN = \frac{\xi(a^2 - 2\xi^2 - 2\eta^2)}{a^2 + 2\xi^2 + 2\eta^2} = a\cos\varphi\cdot\frac{1 - 2\cos\varphi}{1 + 2\cos\varphi}\sqrt{\cos 2\varphi}.$$

Krümmungshalbmesser

$$R = \frac{a^2}{3\sqrt{\xi^2 + \eta^2}} = \frac{a}{3\sqrt{\cos 2\varphi}} = \frac{a^2}{3\varrho}.$$

Coordinaten des Krümmungsmittelpunktes

$$\alpha = \frac{\xi(a^2 + \xi^2 + \eta^2)}{3(\xi^2 + \eta^2)} = \frac{2a\cos^3\varphi}{3\sqrt{\cos 2\varphi}}$$

$$\beta = -\frac{\eta(a^2 - \xi^2 - \eta^2)}{3(\xi^2 + \eta^2)} = -\frac{2a\sin^3\varphi}{3\sqrt{\cos 2\varphi}}.$$

Gleichung der Evolute

$$3\left(\alpha^{\frac{2}{3}} + \beta^{\frac{2}{3}}\right)\left(\alpha^{\frac{2}{3}} - \beta^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{2}} = 2a.$$

Flächeninhalt eines Sectors

$$= \frac{1}{2}\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \varrho^2 d\varphi = \frac{1}{4} a^2 \{\sin 2\varphi_2 - \sin 2\varphi_1\}.$$

Der ganze Raum der Fläche ist $= a^2$.

Die Länge eines Bogens ist

$$= \varrho \int \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - 2\sin^2\varphi}} = \frac{\varrho}{\sqrt{2}} F(\psi),$$

wobei $\sin\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}} \sin\psi$ und F das elliptische Integral erster Gattung mit dem Modul $= \sqrt{\frac{1}{2}}$ ist.

Der Inhalt des durch die Rotation einer Lemniscate entstandenen Körpers ist gleich

$$\frac{\pi a^3}{3}\left\{-\frac{1}{3} + \frac{1}{\sqrt{2}} \log\left(1 + \sqrt{2}\right)\right\}.$$

Zur Tangentenconstruction beachte man, dass der Winkel, den die Normale mit dem Radiusvector einschliesst, $= 2\varphi$ ist.

Die Lemniscate ist ein specieller Fall der

Cassinoide.

Geschichte. Von Dom. Cassini (Montucla hist. des Math. Nouv. ed. Tom. II, p. 563) erfunden, welcher durch sie die Bewegung der Erde um die Sonne genauer darzustellen glaubte.

Entstehung. Das Product der Entfernungen von zwei constanten Punkten in der Entfernung $2a$ ist constant und gleich b^2.

Gleichung:

$$(x^2 + y^2)^2 - 2a^2(x^2 - y^2) = b^4 - a^4,$$

oder in Polarcoordinaten:

$$\varrho^4 - 2a^2\varrho^2 \cos 2\varphi = b^4 - a^4,$$

für $b = a$ wird die Curve zu einer Lemniscate.

Discussion in Schlömilch's Uebungsbuch I, S. 96.

Cissoide.

Geschichte. Stammt von Diokles, der sie bei der Auflösung des Deli'schen Problems benutzte. Soll nach Geminus von κισσος, Epheu, stammen.

Vergleiche Reimer: historia duplicationis cubi. Göttingae 1798. Cantor, Vorlesungen über Gesch. der Math. 1880, I. S. 302, 306.

Entstehung. (Newton, Arithm. univ., p. 231.) Seien zwei sich ⊥ schneidende Gerade gegeben g_1 g_2. In der Entfernung a vom Schnittpunkte befinde sich auf der Geraden g_1 ein Punkt P. Durch diesen soll beständig der eine Schenkel eines rechten Winkels gehen, dessen anderer Schenkel von der Länge $2a$ beständig sich auf die Gerade g_2 stützt. Der Halbirungspunkt dieses zweiten Schenkels beschreibt bei der Bewegung die Cissoide.

Gleichung:

$$x^3 = y^2(2r - x) \text{ oder } (x^2 + y^2)x = 2ry^2.$$

Setzt man

$$uy = x,$$

so wird

$$x = \frac{2r}{1 + u^2}, \quad y = \frac{2r}{u(1 + u^2)}.$$

Ueber die Theorie der Cissoide auf Grund eines rationalen Parameters siehe Grunert's Archiv, Bd. 56, S. 144.

Wir haben

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3x^2 + y^2}{2y(2r - x)},$$

daraus ergiebt sich leicht die Gleichung der Tangente und Normale.

$x = 0$ ist ein Rückkehrpunkt erster Art, $x = 2r$ eine Asymptote, die Curve kehrt stets ihre convexe Seite der x-Axe zu.

Wir haben ferner:

$$T = \frac{\xi r}{3r - \xi}\sqrt{\frac{8r - 3\xi}{2r - \xi}}$$

$$ST = -\frac{\xi(2r - \xi)}{3r - \xi}$$

$$N = \frac{r\xi\sqrt{\xi(8r - 3\xi)}}{(2r - \xi)^2}$$

$$SN = \frac{\xi^2(3r - \xi)}{(2r - \xi)^2}.$$

Für den Krümmungsradius R und die Coordinaten des Krümmungsmittelpunktes α, β findet man:

$$R = \frac{r\sqrt{\xi(8r - 3\xi)}^{\frac{3}{2}}}{3(2r - \xi)^2}$$

$$\alpha = -\frac{r\xi(12r - 5\xi)}{3(2r - \xi)^2}$$

$$\beta = \frac{8r\sqrt{\xi}}{3\sqrt{2r - \xi}}.$$

Gleichung der Evolute

$$27\beta^4 + 1152r\beta^2 + 4096r^3\alpha = 0.$$

Allgemeine Gleichung der Cissoidalcurven

$$(ax^2 + bxy + cy^2)(mx + ny + p) - (mx + ny)(dx + cy) = 0$$

oder

$$a_1x^3 + b_1x^2y + c_1xy^2 + d_1y^3 + e_1x^2 + f_1xy + g_1y^2 = 0.$$

Eine jede derartige Curve hat einen Doppelpunkt.

Der über der Abscisse stehende Theil der Fläche hat den Inhalt

$$= \frac{3}{2}r^2 \arccos\frac{r - x}{r} - \frac{1}{2}(3r + x)\sqrt{2xr - x^2}.$$

Der gesammte zwischen der Curve und ihrer Asymptote liegende Flächenraum beträgt das dreifache des erzeugenden Kreises.

Ueber einer Strecke $AB = 2r$ beschreibe man einen Kreis und lege in B eine Tangente an. Durch A ziehe man eine beliebige Gerade, welche den Kreis in M und die Tangente in N schneidet. Wird hierauf von N auf AMN eine Strecke $= MN$ aufgetragen, so ist der so entstandene Punkt P ein Punkt der Cissoide. Das Wesen des erzeugenden Kreises ist hiermit klar.

Wird der Bogen vom Coordinatenursprung aus gerechnet, so ist seine Länge s

$$s = n\left\{\sqrt{\frac{4r - 3x}{r - x}} - 2 - \sqrt{3}\log\frac{\sqrt{4r - 3x} + \sqrt{3(r - x)}}{(2 + \sqrt{3})\sqrt{r}}\right\}.$$

Durch die Umdrehung der Cissoide um die x-Axe entsteht ein Körper, der von $x = 0$ an gerechnet den Inhalt

$$V = \pi \left[8 r^3 \log \left(\frac{2r}{2r - x}\right) - x \left\{4 r^2 + r x + \frac{1}{3} x^2\right\}\right]$$

hat. Rotirt die Cissoide um ihre Asymptote, so wird

$$V = \pi \left\{r^3 \arccos \frac{r - x}{r} - \frac{3 r^2 - 5 r x + x^2}{3} \sqrt{2 r x - x^2}\right\}.$$

daraus der Inhalt des ganzen Körpers

$$V = 2 r^3 \pi^2.$$

Kettenlinie.

Geschichte. Schon Galilei hat die Gleichgewichtsform eines biegsamen Fadens untersucht und irrthümlicher Weise für eine Parabel angesehen. Die Kettenlinie wurde von Jac. Bernoulli 1691 entdeckt.

Ueber ihre Theorie vergl.: Theorie der Potentialfunctionen von Gudermann, Berlin 1833. Kulik: Theorie und Tafeln der Kettenlinie, Prag 1832.

Gleichung:

$$y = \frac{1}{2} m \left(e^{\frac{x}{m}} + e^{-\frac{x}{m}}\right)$$

oder

$$x = m \log \frac{y \pm \sqrt{y^2 - m^2}}{m}$$

$$y = m \cos hyp \frac{x}{m}.$$

Man hat

$$\frac{dy}{dx} = \sin hyp \frac{x}{m}$$

$$T = m \left(\cos hyp \frac{x}{m}\right) \left(cotg\, hyp \frac{x}{m}\right)^2$$

$$S T = - m\, cotg\, hyp \frac{x}{m}$$

$$N = m \left(\cos hyp \frac{x}{m}\right)^2$$

$$S N = \frac{1}{2} m \sin hyp \frac{2x}{m}.$$

Krümmungsradius $= N$, die Coordinaten des Krümmungsmittelpunktes

$$\alpha = x - m \left(\cos hyp \frac{x}{m}\right)^2 = x - \frac{y^2}{m}$$

$$\beta = 2m \cos hyp \frac{x}{m} = 2y.$$

Gleichung der Evolute

$$\frac{\beta^2}{4m} + \alpha = m \, Arc \cos hyp \frac{\beta}{2m}.$$

Der Flächeninhalt des zwischen zwei Ordinaten liegenden Stückes

$$J = m^2 \left(\sin hyp \frac{x}{m}\right)_{x_1}^{x_2}.$$

Länge des Bogens zwischen denselben Ordinaten

$$= m \left(\sin hyp \frac{x}{m}\right)_{x_2}^{x_1}.$$

Logarithmische Curve.

Geschichte. Der Erfinder ist unbekannt. Huyghens gab ihr den Namen, sagt aber, dass sie schon von Anderen untersucht sei (Diss. de causa gravitatis).

Gleichung:

$$y = m . \log x, \quad \frac{dy}{dx} = \frac{m}{x}, \quad x = e^{\frac{y}{m}}$$

$$T = \sqrt{m^2 + x^2} \log x$$

$$ST = - x \log x$$

$$N = \frac{m}{x} \sqrt{m^2 + x^2}$$

$$SN = \frac{y}{x} m.$$

Die Subtangente in Bezug auf die Y-Axe ist constant.

Krümmungsradius und Coordinaten des Krümmungscentrums

$$\varrho = \frac{(m^2 + x^2)^{3/2}}{m x}$$

$$\alpha = \frac{2x^2 + m^2}{x}, \quad \beta = y - \frac{m^2 + x^2}{m}.$$

Die Länge des Bogens zwischen zwei Abscissen x_1 und x_2

$$= \left[\sqrt{m^2 + x^2} - m \log \{x \sqrt{m^2 + x^2} + m x\}\right]_{x_1}^{x_2}.$$

Der Flächenraum nach der X-Axe:

$$= \left[m x \log \frac{x}{m} - m x\right]_{x^1}^{x_2},$$

der Flächenraum nach der Y-Axe:

$$= m(x_2 - x_1).$$

Analytische Geometrie des Raumes.

§. 164.

Analytische Geometrie des Punktes.

Cartesische Coordinaten.

1) Die Entfernung zweier Punkte $(x_1 y_1 z_1)$, $(x_2 y_2 z_2)$ ist gegeben durch

$$d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}$$

mit den Richtungscosinussen

$$\cos\alpha = \frac{x_1 - x_2}{d}, \quad \cos\beta = \frac{y_1 - y_2}{d}, \quad \cos\gamma = \frac{z_1 - z_2}{d}.$$

2) Die Coordinaten desjenigen Punktes, welcher die Entfernung zwischen diesen Punkten im Verhältniss $m : n$ theilt, sind

$$x = \frac{m x_1 + n x_2}{m + n}, \quad y = \frac{m y_1 + n y_2}{m + n}, \quad z = \frac{m z_1 + n z_2}{m + n}.$$

3) Das sechsfache Volumen des durch die vier Punkte

$$(x_\varkappa\, y_\varkappa\, z_\varkappa), \quad \varkappa = 1, 2, 3, 4$$

gebildeten Tetraeders ist gegeben durch

$$6\,V = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix}.$$

Ist $V = 0$, so liegen die vier Punkte in einer Ebene.

4) Die drei Punkte

$$(x_\varkappa\, y_\varkappa\, z_\varkappa), \quad \varkappa = 1, 2, 3$$

liegen in einer Geraden, wenn zwei der folgenden Determinante erfüllt sind

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} x_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} y_1 & z_1 & 1 \\ y_2 & z_2 & 1 \\ y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

§. 165.

Analytische Geometrie der Geraden.

1) Der Winkel, den zwei durch die Winkel

$$\alpha \beta \gamma, \quad \alpha' \beta' \gamma'$$

gegebene Richtungen mit einander einschliessen, ist

$$\cos \omega = \cos \alpha \cos \alpha' + \cos \beta \cos \beta' + \cos \gamma \cos \gamma'$$

$$\sin \omega = \begin{vmatrix} \cos \beta & \cos \gamma \\ \cos \beta' & \cos \gamma' \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} \cos \gamma & \cos \alpha \\ \cos \gamma' & \cos \alpha' \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} \cos \alpha & \cos \gamma \\ \cos \gamma' & \cos \beta' \end{vmatrix}^2$$

Stehen die Richtungen auf einander senkrecht, so wird

$$\cos \alpha \cos \alpha' + \cos \beta \cos \beta' + \cos \gamma \cos \gamma' = 0.$$

Die Richtungscosinusse der Normalen sind

$$\cos \lambda = \frac{\cos \beta \cos \gamma' - \cos \beta \cos \gamma'}{\sin \omega}$$

$$\cos \mu = \frac{\cos \gamma \cos \alpha' - \cos \alpha \cos \gamma'}{\sin \omega}$$

$$\cos \nu = \frac{\cos \alpha \cos \beta' - \cos \beta \cos \alpha'}{\sin \omega}.$$

Geht die erstere Richtung durch den Punkt $(x_1 y_1 z_1)$, die zweite durch $(x_2 y_2 z_2)$, so ist der kürzeste Abstand

$$d = (x_1 - x_2) \cos \lambda + (y_1 - y_2) \cos \mu + (z_1 - z_2) \cos \nu.$$

2) Gleichung einer Geraden:

I. $x = mz + a, \quad y = nz + b$

II. $\dfrac{x - x_1}{\cos \alpha} = \dfrac{y - y_1}{\cos \beta} = \dfrac{z - z_1}{\cos \gamma}$

Diese geht durch den Punkt $(x_1 y_1 z_1)$ und bildet mit den Axen die Winkel α, β, γ.

III. $Ax + By + Cz + D = 0$

$A'x + B'y + C'z + D = 0.$

Sei

$$R^2 = \begin{vmatrix} B & B' \\ C & C' \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} C & A \\ C' & A' \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} A & A' \\ B & B' \end{vmatrix}^2 = \Delta_1^2 + \Delta_2^2 + \Delta_3^2,$$

so sind

$$\frac{\Delta_1}{R}, \quad \frac{\Delta_2}{R}, \quad \frac{\Delta_3}{R}$$

die Richtungscosinusse dieser Geraden.

3) Sei

$$x = mz + a, \quad y = nz + b$$

eine Gerade, ferner

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

eine Ebene. Sei ferner

$$L_1 = Aa + Bb + D$$
$$L_2 = Am + Bn + C.$$

Wird $L_2 = 0$, so ist die Gerade der Ebene parallel, wird auch noch $L_2 = 0$, so liegt sie ganz in der Ebene

$$Ax + By + Cz + D = 0.$$

4) Die Gerade

$$\frac{x-a}{l} = \frac{y-b}{m} = \frac{z-c}{n}$$

macht mit der Ebene

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

den Winkel θ und es ist

$$\sin\theta = \frac{Al + Bm + Cn}{\sqrt{l^2 + m^2 + n^2}\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

5) Zwei Gerade

$$x = mz + a, \quad y = nz + b$$
$$x = m'z + a, \quad y = n'z + b$$

schneiden sich, wenn

$$\begin{vmatrix} a - a', & m - m' \\ b - b', & n - n' \end{vmatrix} = 0$$

und es ist sodann

$$(n - n')\{x - mz - a\} = (m - m')(y - nz - b)$$

die Gleichung ihrer Schnittebene.

6) Gleichung einer Geraden durch zwei Punkte

$$(x_1 y_1 z_1) \quad (x_2 y_2 z_2)$$

$$\frac{\xi - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{\eta - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{\zeta - z_1}{z_2 - z_1}$$

oder

$$x = x_1 + \lambda(x_2 - x_1), \quad y = y_1 + \lambda(x_2 - x_1)$$
$$z = z_1 + \lambda(z_2 - z_1).$$

Dabei ist

$$\lambda = \frac{(x_1 y_1 z_1) \overset{\wedge}{\ } (x y z)}{(x_2 y_2 z_2) \underset{\vee}{\ } (x_1 y_1 z_1)},$$

wenn $(x_1 y_1 z_1) \overset{\wedge}{\ } (x y z)$ die Entfernung dieser beiden Punkte bezeichnet.

7) Gleichung einer Geraden, die durch den Punkt $(x_1 y_1 z_1)$ und parallel der Schnittlinie der beiden Ebenen

$$a x + b y + c z + d = 0$$
$$a' x + b' y + c' z + d' = 0$$

ist, lautet:

$$\frac{x - x_1}{b c' - c b'} = \frac{y - y_1}{c a' - a c'} = \frac{z - z_1}{a b' - b a'}.$$

§. 166.

Analytische Geometrie der Ebene.

Cartesische Coordinaten.

1) Die Gleichung einer Ebene ist

$$A x + B y + C z + D = 0.$$

Schneidet sie die Axen in den Entfernungen a, b, c vom Anfangspunkte, so ist ihre Gleichung

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1.$$

Ihre Normalform lautet

$$x \cos\alpha + y \cos\beta + z \cos\gamma - l = 0,$$

wobei

$$\cos\alpha = \frac{a}{\pm\sqrt{a^2+b^2+c^2}},\quad \cos\beta = \frac{b}{\pm\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

$$\cos\gamma = \frac{c}{\pm\sqrt{a^2+b^2+c^2}},\quad l = \frac{-d}{\pm\sqrt{a^2+b^2+c^2}}.$$

Der Abstand p eines Punktes $(x_1\, y_1\, z_1)$ ist

$$p = \pm\{x_1\cos\alpha + y_1\cos\beta + z_1\cos\gamma - l\},$$

p ist $\pm$, je nachdem der Anfangspunkt des Coordinatensystems und der Punkt $(x_1\, y_1\, z_1)$ sich auf verschiedenen oder gleichen Seiten der Ebene befinden.

2) Geht die Ebene durch den Punkt $(x_1\, y_1\, z_1)$, so ist ihre Gleichung:

$$A(x-x_1) + B(y-y_1) + C(z-z_1) = 0.$$

3) Geht die Ebene durch die Punkte

$$(x_\varkappa\, y_\varkappa\, z_\varkappa),\quad \varkappa = 1, 2, 3,$$

so ist ihre Gleichung

$$(x-x_1)\begin{vmatrix} y_1 & z_1 & 1 \\ y_2 & z_2 & 1 \\ y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} + (y-y_1)\begin{vmatrix} z_1 & x_1 & 1 \\ z_2 & x_2 & 1 \\ z_3 & x_3 & 1 \end{vmatrix} + (z-z_1)\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

oder

$$x\begin{vmatrix} y_1 & z_1 & 1 \\ y_2 & z_2 & 1 \\ y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} + y\begin{vmatrix} z_1 & x_1 & 1 \\ z_2 & x_2 & 1 \\ z_3 & x_3 & 1 \end{vmatrix} + z\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$$

Ist einer der Punkte Anfangspunkt des Coordinatensystems, so wird:

$$(x_3\, y_2 - y_3\, x_2)z + (z_3\, x_2 - z_2\, x_3)y + (y_3\, z_2 - z_3\, y_2)x = 0$$

die verlangte Gleichung sein.

Sei die Gerade

$$\left.\begin{aligned} a\,z + b\,y + c\,x + 1 &= 0 \\ a_1 z + b_1 y + c_1 x + 1 &= 0 \end{aligned}\right\}$$

und der Punkt x_1, y_1, z_1 gegeben, so ist die Gleichung derjenigen Ebene, welche diese beiden Gebilde enthält:

$$\frac{a\,z + b\,y + c\,x + 1}{a\,z_1 + b\,y_1 + c\,x_1 + 1} = \frac{a_1 z + b_1 y + c_1 x + 1}{a_1 z_1 + b_1 y_1 + c_1 x_1 + 1}.$$

4) Gehen zwei Richtungen $(\alpha\,\beta\,\gamma)$, $(\alpha_1\,\beta_1\,\gamma_1)$ durch den Punkt $(x_1\, y_1\, z_1)$, so liegen sie in der Ebene

$$(x-x_1)\begin{vmatrix} \cos\beta & \cos\beta_1 \\ \cos\gamma & \cos\gamma_1 \end{vmatrix} + (y-y_1)\begin{vmatrix} \cos\gamma & \cos\gamma_1 \\ \cos\alpha & \cos\alpha_1 \end{vmatrix} + (z-z_1)\begin{vmatrix} \cos\alpha & \cos\alpha_1 \\ \cos\beta & \cos\beta_1 \end{vmatrix} = 0$$

Zwei Gerade

$$\left.\begin{aligned} x &= \alpha z + a \\ y &= \beta z + b \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} x &= \alpha' z + a' \\ y &= \beta' z + b' \end{aligned}$$

liegen in einer Ebene, wenn

$$(\alpha' - \alpha)(b' - b) - (a' - a)(\beta' - \beta) = 0$$

ist.

5) Die Coordinaten des Schnittpunktes dreier Ebenen

$$E_\varkappa \equiv A_\varkappa x + B_\varkappa y + C_\varkappa z + D_\varkappa = 0, \quad \varkappa = 1, 2, 3$$

sind

$$x = -\frac{\sum \pm (D_1 B_2 C_3)}{\sum \pm (A_1 B_2 C_3)}, \quad y = -\frac{\sum \pm (A_1 D_2 C_3)}{\sum \pm (A_1 B_2 C_3)},$$

$$z = -\frac{\sum \pm (A_1 B_2 D_3)}{\sum \pm (A_1 B_2 C_3)}.$$

Ist $\sum \pm (A_1 B_2 C_3) = 0$, so schneiden sich die Ebenen in parallelen Geraden.

Ist $\sum \pm (A_1 B_2 C_3) = 0$, und sind ausserdem zwei Zählerdeterminanten gleich Null, so schneiden sich die Ebenen in derselben Geraden.

Es giebt sodann drei Zahlen λ, für welche

$$\lambda_1 E_1 + \lambda_2 E_2 + \lambda_3 E_3 = 0.$$

6) Der Flächeninhalt F der von den vier Ebenen

$$E_\varkappa = 0, \quad \varkappa = 1, 2, 3, 4$$

gebildeten Pyramide ist:

$$6F = \frac{\left[\sum \pm (A_1 B_2 C_3 D_4)\right]^3}{\sum \pm (A_1 B_2 C_3) . \sum \pm (A_1 B_2 C_3) . \sum \pm (A_3 B_4 C_1) . \sum \pm (A_4 B_1 C_2)}.$$

Demnach schneiden sich die vier Ebenen in einem Punkte, wenn

$$\sum \pm (A_1 B_2 C_3 D_4) = 0.$$

Dann giebt es immer vier numerische Factoren $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ für welche

$$\lambda_1 E_1 + \lambda_2 E_2 + \lambda_3 E_3 + \lambda_4 E_4 = 0$$

wird.

7) Die Ebenen $E_1 = 0$, $E_2 = 0$ schliessen einen Winkel θ mit einander ein, für diesen ist:

$$\cos\theta = \frac{A_1 A_2 + B_1 B_2 + C_1 C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}$$

$$\sin^2\theta = \frac{(B_1 C_2 - C_1 B_2)^2 + (C_1 A_2 - A_1 C_2)^2 + (A_1 B_2 - B_1 A_2)^2}{(A_1^2 + B_1^2 + C_1^2)(A_2^2 + B_2^2 + C_2^2)}.$$

Die Ebenen sind demnach zu einander $\perp$, wenn

$$A_1 A_2 + B_1 B_2 + C_1 C_2 = 0,$$

und unter einander $\|$, wenn

$$A_1 B_2 - B_1 A_2 = 0, \quad B_1 C_2 - C_1 B_2 = 0, \quad C_1 A_2 - C_2 A_1 = 0.$$

8) Seien

$$A \equiv x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p$$
$$A_1 \equiv x\cos\alpha_1 + y\cos\beta_1 + z\cos\gamma_1 - p_1$$

die Gleichungen zweier Ebenen in der Normalform, dann ist $A \pm A_1 = 0$ die Gleichung derjenigen Ebene, welche die Neigungswinkel der gegebenen halbirt. Die Gleichung

$$A \equiv A_1 - \lambda A_2 = 0$$

stellt eine beliebige Ebene, die durch die Schnittlinie von A_1 und A_2 geht, und es gilt die Beziehung:

$$\lambda = \frac{\sin(A A_1)}{\sin(A A_2)}.$$

Man vergl. §. 161, B., 10), 11); §. 162, A., 8) bis 10).

9) Die von dem Punkte $x_1 y_1 z_1$ auf die Ebene

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

gefällte Normale ist durch

$$\frac{x - x_1}{A} = \frac{y - y_1}{B} = \frac{z - z_1}{C}$$

gegeben.

10) Die durch die zwei (parallelen) Linien

$$\frac{x - x'}{\cos\alpha} = \frac{y - y'}{\cos\beta} = \frac{z - z'}{\cos\gamma}$$

$$\frac{x - x''}{\cos\alpha} = \frac{y - y''}{\cos\beta} = \frac{z - z''}{\cos\gamma}$$

bestimmte Ebene hat zur Gleichung

$$x\begin{vmatrix} y'-y'' & \cos\beta \\ z'-z'' & \cos\gamma \end{vmatrix} + y\begin{vmatrix} z'-z'' & \cos\gamma \\ x'-x'' & \cos\alpha \end{vmatrix} + z\begin{vmatrix} x'-x'' & \cos\alpha \\ y'-y'' & \cos\beta \end{vmatrix}$$

$$+\begin{vmatrix} y' & y'' \\ z' & z'' \end{vmatrix}\cos\alpha + \begin{vmatrix} z' & x' \\ z'' & x'' \end{vmatrix}\cos\beta + \begin{vmatrix} x' & y' \\ x'' & y'' \end{vmatrix}\cos\gamma.$$

11) Es sei

$$E_\varkappa \equiv A_\varkappa x + B_\varkappa y + C_\varkappa z + D_\varkappa = 0.$$

So ist die durch die Gerade $E_1 = 0$, $E_2 = 0$ gehende und zur Ebene $E_3 = 0$ normale Ebene

$$(A_2 A_3 + B_2 B_3 + C_2 C_3)(A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1)$$
$$= (A_1 A_3 + B_1 B_3 + C_1 C_3)(A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2).$$

Ist dagegen

$$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma = p$$
$$\frac{x-x'}{\cos\alpha'} = \frac{y-y'}{\cos\beta'} = \frac{z-z'}{\cos\gamma'}$$

gegeben, so wird

$$(x-x')\begin{vmatrix} \cos\beta & \cos\beta' \\ \cos\gamma & \cos\gamma' \end{vmatrix} + (y-y')\begin{vmatrix} \cos\gamma & \cos\gamma' \\ \cos\alpha & \cos\alpha' \end{vmatrix}$$
$$+ (z-z')\begin{vmatrix} \cos\alpha & \cos\alpha' \\ \cos\beta & \cos\beta' \end{vmatrix}.$$

12) Seien

$$ax + by + cz + d = 0$$
$$ax + by + cz + d' = 0$$

die Gleichungen zweier parallelen Ebenen, so ist ihre Entfernung gegeben durch

$$\varkappa = \pm\frac{d'-d}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}.$$

§. 167.

Transformation der Coordinaten.

I. Es gelten folgende allgemeine Transformationsformeln für die Transformation eines rechtwinkligen Systems in ein anderes mit demselben Mittelpunkt.

1)

	x	y	z
x'	m	n	p
y'	m_1	n_1	p_1
z'	m_2	n_2	p_2

2) $x = m x' + m_1 y' + m_2 z'$
$y = n x' + n_1 y' + n_2 z'$
$z = p x' + p_1 y' + p_2 z'$

3) $x' = m x + n y + p z$
$y' = m_1 x + n_1 y + p_1 z$
$z' = m_2 x + n_2 y + p_2 z$

4) $x^2 + y^2 + z^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2$

5) $m^2 + n^2 + p^2 = 1$
$m_1^2 + n_1^2 + p_1^2 = 1$
$m_2^2 + n_2^2 + p_2^2 = 1$

6) $m^2 + m_1^2 + m_2^2 = 1$
$n^2 + n_1^2 + n_2^2 = 1$
$p^2 + p_1^2 + p_2^2 = 1$

7) $m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2 = 0$
$m_2 m + n_2 n + p_2 p = 0$
$m m_1 + n n_1 + p p_1 = 0$

8) $n p + n_1 p_1 + n_2 p_2 = 0$
$m p + p_1 m_1 + p_2 m_2 = 0$
$m n + m_1 n_1 + m_2 n_2 = 0$

9) $(m_1^2 + n_1^2 + p_1^2)(m_2^2 + n_2^2 + p_2^2) - (m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2)^2$
$= (n_2 p_1 - n_1 p_2)^2 + (m_1 p_2 - p_1 m_2)^2 + (n_1 m_2 - m_1 n_2)^2$

10) $\pm m = p_1 n_2 - n_1 p_2$
$\pm n = m_1 p_2 - p_1 m_2$
$\pm p = n_1 m_2 - m_1 n_2$

11) $\pm m_1 = p_2 n - n p$
$\pm n_1 = m_2 p - p_2 m$
$\pm p_1 = n_2 m - m_2 n$

12) $\pm m_2 = p n_1 - n p_1$
$\pm n_2 = m p_1 - p m_1$
$\pm p_2 = n m_1 - m n_1.$

Die Grössen m, n, p sind Cosinusse, und zwar $m = \cos(x x')$, $n_1 = \cos(y y')$, $m_1 = \cos(x y')$ etc. Man merke noch

13) $$\begin{vmatrix} m_1 & n & p \\ m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 \end{vmatrix} = \pm 1 = \varkappa.$$

Die Coordinatensysteme sind congruent, wenn $\varkappa = +1$, symmetrisch, wenn $\varkappa = -1$.

II. Schiefwinklige Coordinaten. Seien m_1, n_1, p_1 die (xy)-Coordinaten der auf x' aufgetragenen Längeneinheit, analog m_2, n_2, p_2 für y', m_3, n_3, p_3 für z', so wird

$$1)\ \begin{aligned} x &= m_1 x' + m_2 y' + m_3 z' \\ y &= n_1 x' + n_2 y' + n_3 z' \\ z &= p_1 x' + p_2 y' + p_3 z' \end{aligned} \qquad 2)\ \begin{aligned} Q x' &= M_1 x + N_1 y + P_1 z \\ Q y' &= M_2 x + N_2 y + P_2 z \\ Q z' &= M_3 x + N_3 y + P_3 z, \end{aligned}$$

dabei ist

$$2)\ Q = \begin{vmatrix} m_1 & m_2 & m_3 \\ n_1 & n_2 & n_3 \\ p_1 & p_2 & p_3 \end{vmatrix} = M_1 m_1 + N_1 n_1 + P_1 p_1 = m_1 M_1 + m_2 M_2 + m_3 M_3 = \cdots$$

$$3)\ m_1^2 + n_1^2 + p_1^2 + 2 n_1 p_1 \cos(y z) + 2 m_1 p_1 \cos(x z) + 2 m_1 n_1 \cos(x y) = 1$$

$$m_2^2 + n_2^2 + p_2^2 + 2 n_2 p_2 \cos(y z) + 2 m_2 p_2 \cos(x z) + 2 m_2 n_2 \cos(x y) = 1$$

$$m_3^2 + n_3^2 + p_3^2 + 2 n_3 p_3 \cos(y z) + 2 m_3 p_3 \cos(x z) + 2 m_3 n_3 \cos(x y) = 1$$

$$4)\ x + y \cos(x y) + z \cos(x z) = x' \cos(x x') + y' \cos(x y') + z' \cos(x z')$$

$$y + x \cos(x y) + z \cos(y z) = x' \cos(y x') + y' \cos(y y') + z' \cos(y z')$$

$$z + x \cos(x z) + y \cos(y z) = x' \cos(z x') + y' \cos(z y') + z' \cos(z z').$$

5) Seien

n_x, n_y, n_z die Normalen auf die Ebenen $z y$, $x z$, $x y$,

n'_x, n'_y, n'_z jene auf $z' y'$, $x' z'$, $x' y'$,

so wird

$$\begin{aligned} x \cos(x n_x) &= x' \cos(x' n_x) + y' \cos(y' n_x) + z' \cos(z' n_x) \\ y \cos(y n_y) &= x' \cos(x' n_y) + y' \cos(y' n_y) + z' \cos(z' n_y) \\ z \cos(z n_z) &= x' \cos(x' n_z) + y' \cos(y' n_z) + z' \cos(z' n_z) \\ x' \cos(x' n'_x) &= x \cos(x n'_x) + y \cos(y n'_x) + z \cos(z n'_x) \\ y' \cos(y' n'_y) &= x \cos(x n'_y) + y \cos(y n'_y) + z \cos(z n'_y) \\ z' \cos(z' n'_z) &= x \cos(x n'_z) + y \cos(y n'_z) + z \cos(z n'_z). \end{aligned}$$

III. In der Praxis wird häufig folgendes Coordinatensystem angewandt. Seien $(x y z)$ und $(x' y' z')$ zwei rechtwinklige Coordinatensysteme mit gemeinsamem Coordinatenanfang. Die Schnittgerade der Ebene $(x y)$ mit $(x' y')$ bezeichnen wir mit g und setzen

$$\measuredangle (x y x') = \theta, \quad \measuredangle (y x) = \psi, \quad \measuredangle (y x') = \varphi$$

und bestimmen die + Axenrichtungen x, x', so dass alle drei Winkel spitz werden. Nehmen wir ferner die + z Richtungen so an, dass sie in Bezug auf die $(x y)$-Ebenen auf denselben Seiten liegen; die + y Seiten so, dass θ im + Theile der $(x y)$-Ebene sich befindet.

Alsdann wird

$$
\begin{aligned}
1)\quad x &= x'(\cos\theta \sin\psi \sin\varphi + \cos\psi \cos\varphi) \\
&\quad + y'(\cos\theta \sin\psi \cos\varphi - \cos\psi \sin\varphi) \\
&\quad - z'(\sin\theta \sin\psi) \\
y &= - x'(\cos\theta \cos\psi \sin\varphi - \sin\psi \cos\varphi) \\
&\quad - y'(\cos\theta \cos\psi \cos\varphi + \sin\psi \sin\varphi) \\
&\quad + z'(\sin\theta \cos\psi) \\
z &= x' \sin\theta \sin\psi + y' \cos\varphi \sin\theta + z' \cos\theta
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
2)\quad x' &= x(\cos\theta \sin\psi \sin\varphi + \cos\psi \cos\varphi) \\
&\quad - y(\cos\theta \cos\psi \sin\varphi - \sin\psi \cos\varphi) \\
&\quad + z(\sin\theta \sin\varphi) \\
y' &= x(\cos\theta \sin\psi \cos\varphi - \cos\psi \sin\varphi) \\
&\quad - y(\cos\theta \cos\psi \cos\varphi + \sin\psi \sin\varphi) \\
&\quad + z \sin\theta \cos\varphi \\
z' &= - x \sin\theta \sin\psi + y \sin\theta \cos\psi + z \cos\theta.
\end{aligned}
$$

Dies ist das System von Lagrange (Méc. anal., p. 369). Durch andere Wahl der + Richtungen ergeben sich die Systeme von Laplace (Méc. céleste, T. I, p. 59); Poisson (Traité de Méc., T. II, p. 97); Encke (Berliner astron. Jahrb. 1832). Diese Art der Transformation rührt von Euler her (Nov. Com. Petrop., T. XX, 1775). Ueber Coordinatensysteme vergleiche Günther, Die Anfänge und Entwickelungsstadien des Coordinatenprincips. Nürnberg 1877.

Ausführlicher handelt über Transformation der Coordinaten: Magnus, Sammlung von Aufgaben und Lehrsätzen aus der analytischen Geometrie des Raumes. Berlin 1837, S. 50.

§. 168.

Die Kugel.

1) Die allgemeine Kugelgleichung lautet:

$$(z-\zeta)^2+(y-\eta)^2+(x-\xi)^2+2(x-\xi)(y-\eta)\cos(xy)$$
$$+2(x-\xi)(z-\zeta)\cos(xz)+2(y-\eta)(z-\zeta)\cos(yz)=r^2.$$

oder in rechtwinkligen Coordinaten

$$(z-\zeta)^2+(y-\eta)^2+(x-\xi)^2=r^2.$$

Ist der Mittelpunkt zugleich der Anfangspunkt des Coordinatensystems, so wird:

$$x^2+y^2+z^2=r^2.$$

Geht die Kugelfläche durch den Anfangspunkt der Coordinaten, so wird, wenn a, b, c die Coordinaten des Mittelpunktes sind:

$$x^2+y^2+z^2-2ax-2by-2cz=0.$$

2) Ist

$$x^2+y^2+z^2+2az+2by+2cx+d=0$$

eine gegebene Kugelfläche, so sind:

$$z'=-a,\quad y'=-b,\quad x'=-c$$

die Coordinaten des Mittelpunktes und

$$r=\sqrt{a^2+b^2+c^2-d}$$

der Radius dieser Fläche.

3) Wird in dem Punkte (x', y', z') an die Kugelfläche

$$(z-\gamma)^2+(y-\beta)^2+(x-\alpha)^2=r^2$$

eine Tangentenebene gelegt, so ist ihre Gleichung:

$$(z'-\gamma)(v-\gamma)+(y'-\beta)(u-\beta)+(x'-\alpha)(t-\alpha)=r^2.$$

u, v, t sind die laufenden Coordinaten dieser Ebene.

§. 169.

Theorie der Curven doppelter Krümmung.

A. Allgemeine Formeln.

1) Gleichung einer Curve:

1) $F_1(x, y, z)=0,\quad F_2(x, y, z)=0$

2) $x=f_1(t),\quad y=f_2(t),\quad z=f_3(t).$

2) Die Richtungswinkel der Tangente im Punkte xyz erhält man aus

$$\cos\alpha = \frac{dx}{ds},\quad \cos\beta = \frac{dy}{ds},\quad \cos\gamma = \frac{dz}{ds},$$

wobei

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dr^2,$$

daraus folgt die Gleichung der Tangente

$$\frac{\xi - x}{dx} = \frac{\eta - y}{dy} = \frac{\zeta - z}{dz}.$$

3) Die Gleichung der Normalebene ist:

$$(\xi - x)dx + (\eta - y)dy + (\zeta - z)dz = 0.$$

4) Eine Ebene, die durch den Punkt xyz und die beiden benachbarten der Curve geht, wird Krümmungsebene genannt.

Sei

$$X = dy\,d^2z - dz\,d^2y,\quad Y = dz\,d^2x - dx\,d^2z$$

$$Z = dx\,d^2y - dy\,d^2x$$

$$U = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}$$

$$= ds\sqrt{(d^2x)^2 + (d^2y)^2 + (d^2z)^2 - (d^2s)^2}$$

$$= ds^2\sqrt{\left(d\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(d\frac{dy}{ds}\right)^2 + \left(d\frac{dz}{ds}\right)^2},$$

so wird

$$X(\xi - x) + Y(\eta - y) + Z(\zeta - z) = 0$$

die Gleichung der Krümmungsebene (Osculations-. oder Schmiegungsebene). Die Winkel, welche die Normale zur Krümmungsebene mit den Axen bildet, sind

$$\cos\lambda = \frac{X}{U},\quad \cos\mu = \frac{Y}{U},\quad \cos\nu = \frac{Z}{U}.$$

5) Sei $d\tau$ der Winkel zweier benachbarten Tangenten, so wird

$$d\tau = \frac{U}{ds^2} \quad (d\tau \text{ Schmiegungswinkel})$$

und der Krümmungsradius ϱ

$$\varrho = \frac{ds}{d\tau} = \frac{ds^3}{U}.$$

Die Coordinaten des Mittelpunktes ξ, η, ζ sind

$$\xi = x + \varrho^2\,\frac{d\frac{dx}{ds}}{ds},\quad \eta = y + \varrho^2\,\frac{d\frac{dy}{ds}}{ds}$$

$$\zeta = x + \varrho^2 \frac{d\,\frac{d\,x}{d\,s}}{d\,s}.$$

6) Zwei benachbarte Krümmungsebenen bilden mit einander den Contingenzwinkel $d\,\vartheta$, für welchen

$$d\,\vartheta = \sqrt{(d\cos\lambda)^2 + (d\cos\mu)^2 + (d\cos\nu)^2}$$
$$= \left(\frac{X}{U^2}\,d\,x^3 + \frac{Y}{U^2}\,d\,y^3 + \frac{Z}{U^2}\,d\,z^3\right) d\,s$$
$$= \sqrt{\left(d\,\frac{\varrho\,X}{d\,s^3}\right)^2 + \left(d\,\frac{\varrho\,Y}{d\,s}\right)^2 + \left(d\,\frac{\varrho\,Z}{d\,s}\right)^2}.$$

Der Quotient

$$r = \frac{d\,s}{d\,\vartheta}$$

wird der Torsionsradius der Curve genannt (zweiter Krümmungsradius). Ist

$$X\,d\,x^3 + Y\,d\,y^3 + Z\,d\,z^3 = \begin{vmatrix} d\,x & d\,y & d\,z \\ d^2x & d^2y & d^2z \\ d^3x & d^3y & d^3z \end{vmatrix} = 0$$

für alle Punkte, so ist die Curve eine ebene Curve.

7) Eine Kugel, die durch einen Punkt einer Curve doppelter Krümmung geht, sowie durch drei ihm benachbarte, wird die Schmiegungskugel dieses Punktes genannt. Sind ξ, η, ζ die Coordinaten des Mittelpunktes, R ihr Radius, so wird, wenn

$$\varDelta = \begin{vmatrix} d^2x & d^3x & d\,x \\ d^2y & d^3y & d\,y \\ d^2z & d^3z & d\,z \end{vmatrix}$$

gesetzt wird,

$$\xi - x = \frac{1}{\varDelta}\,(d\,z\,d^3y - d\,y\,d^3z)$$

$$\eta - y = \frac{1}{\varDelta}\,(d\,x\,d^3z - d\,z\,d^3x)$$

$$\zeta - z = \frac{1}{\varDelta}\,(d\,y\,d^3x - d\,x\,d^3y)$$

$$R = \frac{1}{\varDelta}\sqrt{(d^3x)^2 + (d^3y)^2 + (d^3z)^2 - \{(d^2x)^2 + (d^2y)^2 + (d^2z)^2\}^2}.$$

8) Diejenige Normale, die in der Schmiegungsebene liegt. wird die Hauptnormale genannt, ihre Gleichung ist:

$$\frac{\xi - x}{d\,\frac{dx}{ds}} = \frac{\eta - y}{d\,\frac{dy}{ds}} = \frac{\zeta - z}{d\,\frac{dz}{ds}}.$$

9) Die **Binormale** steht auf der Tangente und der Hauptnormale $\perp$, ihre Gleichung lautet:

$$\frac{\xi - x}{X} = \frac{\eta - y}{Y} = \frac{\zeta - z}{Z}.$$

10) Diejenige Ebene, welche die Tangente und Binormale enthält, also senkrecht zur Hauptnormale ist, wird die **rectificirende Ebene** genannt, ihre Gleichung ist:

$$(\xi - x)\,d\,\frac{dx}{ds} + (\eta - y)\,d\,\frac{dy}{ds} + (\zeta - z)\,d\,\frac{dz}{ds} = 0.$$

11) Unter **Rectificante** versteht man die Schnittgerade von zwei benachbarten rectificirenden Ebenen. Sei

$$X'_s = d\,\frac{dy}{ds}\cdot d^2\,\frac{dz}{ds} - d\,\frac{dz}{ds}\cdot d^2\,\frac{dy}{ds}$$

$$Y'_s = d\,\frac{dz}{ds}\cdot d^2\,\frac{dx}{ds} - d\,\frac{dx}{ds}\cdot d^2\,\frac{dz}{ds}$$

$$Z'_s = d\,\frac{dz}{ds}\cdot d^2\,\frac{dy}{ds} - d\,\frac{dy}{ds}\cdot d^2\,\frac{dx}{ds},$$

so ist ihre Gleichung:

$$\frac{\xi - x}{X'_s} = \frac{\eta - y}{Y'_s} = \frac{\zeta - z}{Z'_s}.$$

12) Sei H der Winkel zwischen der Rectificante und der Tangente, so ist

$$tgn\,H = \frac{r}{\varrho},\quad sin\,H = \frac{R}{\varrho},\quad cos\,H = \frac{R}{r}.$$

13) Man merke die Relationen:

$$R = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{\varrho^2} + \frac{1}{r^2}}} = \sqrt{\varrho^2 + \left(\frac{r\,d\varrho}{ds}\right)^2}$$

$$\frac{1}{R^2} = \frac{1}{\varrho^2} + \frac{1}{r^2}$$

$$\frac{ds^3}{\varrho^2 R} = \sqrt{X'^2_s + Y'^2_s + Z'^2_s}$$

$$\frac{ds^2}{\varrho R} = \sqrt{\left(d^2\,\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(d^2\,\frac{dy}{ds}\right)^2 + \left(d^2\,\frac{dz}{ds}\right)^2 - \left(d\,\frac{ds}{\varrho}\right)^2}.$$

14) Unter dem **Winkel der ganzen Krümmung** versteh man die Abweichung zweier benachbarter Hauptnormalen oder rectificirender Ebenen. Sei dk dieser Winkel, so wird

$$R = \frac{ds}{dk}$$

und wir haben die Relation:

$$dk^2 = d\tau^2 + d\vartheta^2 \quad \text{(Lancret'sche Satz).}$$

15) Seien α, β, γ die Richtungscosinusse der Tangente, λ, μ, ν jene der Hauptnormalen, l, m, n die der Binormalen, so wird:

$$\text{a)} \quad \begin{aligned} \cos\lambda &= \varrho \frac{d\cos\alpha}{ds} = -r\frac{d\cos l}{ds} \\ \cos\mu &= \varrho \frac{d\cos\beta}{ds} = -r\frac{d\cos m}{ds} \\ \cos\nu &= \varrho \frac{d\cos\gamma}{ds} = -r\frac{d\cos n}{ds} \end{aligned}$$

$$\text{b)} \quad \begin{aligned} \frac{d\cos\alpha}{d\tau} &= \cos\lambda \\ \frac{d\cos\beta}{d\tau} &= \cos\mu \\ \frac{d\cos\gamma}{d\tau} &= \cos\nu \end{aligned} \qquad \text{c)} \quad \begin{aligned} \frac{d\cos l}{d\vartheta} &= -\cos\lambda \\ \frac{d\cos m}{d\vartheta} &= -\cos\mu \\ \frac{d\cos n}{d\vartheta} &= -\cos\nu. \end{aligned}$$

$$\text{d)} \quad \cos\alpha = \begin{vmatrix} \cos\mu & \cos m \\ \cos\nu & \cos n \end{vmatrix}, \quad \cos\beta = \begin{vmatrix} \cos\nu & \cos n \\ \cos\lambda & \cos l \end{vmatrix}$$

$$\cos\gamma = \begin{vmatrix} \cos\lambda & \cos l \\ \cos\mu & \cos m \end{vmatrix}$$

$$\text{e)} \quad \cos\lambda = \begin{vmatrix} \cos\gamma & \cos n \\ \cos\beta & \cos m \end{vmatrix}, \quad \cos\mu = \begin{vmatrix} \cos\alpha & \cos l \\ \cos\gamma & \cos n \end{vmatrix}$$

$$\cos\nu = \begin{vmatrix} \cos\gamma & \cos\nu \\ \cos\alpha & \cos\lambda \end{vmatrix}$$

$$\text{f)} \quad \cos l = \begin{vmatrix} \cos\beta & \cos\mu \\ \cos\gamma & \cos\nu \end{vmatrix}, \quad \cos m = \begin{vmatrix} \cos\gamma & \cos\nu \\ \cos\alpha & \cos\lambda \end{vmatrix}$$

$$\cos n = \begin{vmatrix} \cos\alpha & \cos\nu \\ \cos\beta & \cos\mu \end{vmatrix}$$

Die Gleichungen der Normalebene, der Schmiegungsebene und der rectificirenden Ebene lauten

$$\text{g)}\quad \begin{aligned} (\xi - x)\cos\alpha + (\eta - y)\cos\beta + (\zeta - z)\cos\gamma &= 0 \\ (\xi - x)\cos l + (\eta - y)\cos m + (\zeta - z)\cos n &= 0 \\ (\xi - x)\cos\lambda + (\eta - y)\cos\mu + (\zeta - z)\cos\nu &= 0. \end{aligned}$$

Man hat ferner, wenn s die unabhängige Variable bezeichnet:

$$\text{h)}\quad \begin{aligned} \frac{1}{\varrho} &= \sqrt{(d\cos\alpha)^2 + (d\cos\beta)^2 + (d\cos\gamma)^2} \\ \frac{1}{r} &= \sqrt{(d\cos l)^2 + (d\cos m)^2 + (d\cos n)^2} \\ \frac{1}{R} &= \sqrt{(d\cos\lambda)^2 + (d\cos\mu)^2 + (d\cos\nu)^2} \end{aligned}$$

$$\text{i)}\quad \begin{aligned} \varrho &= \frac{\cos\lambda}{d\cos\alpha} = \frac{\cos\mu}{d\cos\beta} = \frac{\cos\nu}{d\cos\gamma} \\ &= \frac{\cos l}{\cos\beta\, d\cos\gamma - \cos\gamma\, d\cos\beta} = \frac{\cos m}{\cos\gamma\, d\cos\alpha - \cos\alpha\, d\cos\gamma} \\ &= \frac{\cos n}{\cos\alpha\, d\cos\beta - \cos\beta\, d\cos\gamma} \end{aligned}$$

$$\text{j)}\quad \begin{aligned} -r &= \frac{\cos\lambda}{d\cos l} = \frac{\cos\mu}{d\cos m} = \frac{\cos\nu}{d\cos n} \\ &= \frac{\cos\alpha}{\cos m\, d\cos n - \cos n\, d\cos m} \\ &= \frac{\cos\beta}{\cos n\, d\cos l - \cos l\, d\cos n} \\ &= \frac{\cos\gamma}{\cos l\, d\cos m - \cos m\, d\cos l} \end{aligned}$$

$$\text{k)}\quad \frac{d\cos l}{d\cos\alpha} = \frac{d\cos m}{d\cos\beta} = \frac{d\cos n}{d\cos\gamma} = -\frac{\varrho}{r}$$

$$\text{l)}\quad \frac{\cos\alpha}{\varrho} = \begin{vmatrix} d\cos\beta & \cos m \\ d\cos\gamma & \cos n \end{vmatrix}, \quad \frac{\cos\beta}{\varrho} = \begin{vmatrix} d\cos\gamma & \cos n \\ d\cos\alpha & \cos l \end{vmatrix}$$

$$\frac{\cos\gamma}{\varrho} = \begin{vmatrix} d\cos\alpha & \cos l \\ d\cos\beta & \cos m \end{vmatrix}$$

$$\text{m)}\quad \frac{\cos\alpha}{r} = \begin{vmatrix} \cos m & d\cos m \\ \cos n & d\cos n \end{vmatrix}, \quad \frac{\cos\beta}{r} = \begin{vmatrix} \cos n & d\cos n \\ \cos l & d\cos l \end{vmatrix}$$

$$\frac{\cos\gamma}{r} = \begin{vmatrix} \cos l & d\cos l \\ \cos m & d\cos m \end{vmatrix}$$

n) $$\frac{\cos l}{\varrho} = \begin{vmatrix} \cos\beta & d\cos\beta \\ \cos\gamma & d\cos\gamma \end{vmatrix}$$

$$\frac{\cos m}{\varrho} = \begin{vmatrix} \cos\gamma & d\cos\gamma \\ \cos\alpha & d\cos\alpha \end{vmatrix}$$

$$\frac{\cos n}{\varrho} = \begin{vmatrix} \cos\alpha & d\cos\alpha \\ \cos\beta & d\cos\beta \end{vmatrix}$$

o) $$-\frac{\cos l}{r} = \begin{vmatrix} \cos\beta & d\cos m \\ \cos\gamma & d\cos n \end{vmatrix}$$

$$-\frac{\cos m}{r} = \begin{vmatrix} \cos\gamma & d\cos n \\ \cos\alpha & d\cos l \end{vmatrix}$$

$$-\frac{\cos n}{r} = \begin{vmatrix} \cos\alpha & d\cos l \\ \cos\beta & d\cos m \end{vmatrix}$$

p) $$d\cos\lambda = \frac{\cos l}{r} - \frac{\cos\alpha}{\varrho}, \quad d\cos\mu = \frac{\cos m}{r} - \frac{\cos\beta}{\varrho}$$

$$d\cos\nu = \frac{\cos n}{r} - \frac{\cos\gamma}{\varrho}$$

q) $$\begin{vmatrix} d\cos\beta & d^2\cos\beta \\ d\cos\gamma & d^2\cos\gamma \end{vmatrix} = \frac{1}{\varrho^2}\left\{\frac{\cos\alpha}{r} + \frac{\cos l}{\varrho}\right\}$$

$$\begin{vmatrix} d\cos\gamma & d^2\cos\gamma \\ d\cos\alpha & d^2\cos\alpha \end{vmatrix} = \frac{1}{\varrho^2}\left\{\frac{\cos\beta}{r} + \frac{\cos m}{\varrho}\right\}$$

$$\begin{vmatrix} d\cos\alpha & d^2\cos\alpha \\ d\cos\beta & d^2\cos\gamma \end{vmatrix} = \frac{1}{\varrho^2}\left\{\frac{\cos\lambda}{r} + \frac{\cos n}{\varrho}\right\}$$

r) $$\begin{vmatrix} d\cos m & d^2\cos m \\ d\cos n & d^2\cos n \end{vmatrix} = \frac{1}{r^2}\left\{\frac{\cos\alpha}{r} + \frac{\cos l}{\varrho}\right\}$$

$$\begin{vmatrix} d\cos n & d^2\cos n \\ d\cos l & d^2\cos l \end{vmatrix} = \frac{1}{r^2}\left\{\frac{\cos\beta}{r} + \frac{\cos m}{\varrho}\right\}$$

$$\begin{vmatrix} d\cos l & d^2\cos l \\ d\cos m & d^2\cos m \end{vmatrix} = \frac{1}{r^2}\left\{\frac{\cos\gamma}{r} + \frac{\cos n}{\varrho}\right\}$$

s) $$\begin{vmatrix} \cos\mu & d\cos\mu \\ \cos\nu & d\cos\nu \end{vmatrix} = \frac{\cos\alpha}{r} + \frac{\cos l}{\varrho}$$

$$\begin{vmatrix} \cos\nu & d\cos\nu \\ \cos\lambda & d\cos\lambda \end{vmatrix} = \frac{\cos\beta}{r} + \frac{\cos m}{\varrho}$$

$$\begin{vmatrix} \cos\lambda & d\cos\lambda \\ \cos\mu & d\cos\mu \end{vmatrix} = \frac{\cos\gamma}{r} + \frac{\cos n}{\varrho}.$$

Seien p, q, r die Richtungswinkel der Rectificante, so wird

$$\text{t)}\quad \frac{\cos p}{R} = \frac{\cos\alpha}{r} + \frac{\cos l}{\varrho},\quad \frac{\cos q}{R} = \frac{\cos\beta}{r} + \frac{\cos m}{\varrho}$$

$$\frac{\cos r}{R} = \frac{\cos\gamma}{r} + \frac{\cos n}{\varrho}.$$

Diese Formeln sind entnommen der lesenswerthen Abhandlung von E. Catalan: „Theorie analytique des lignes a double courboure", Mém. de la sociét. royale des scienc. de Liége, II. Ser., Tom. VI, (1877). Daselbst finden sich noch viele andere Relationen.

Ueber Curventheorie handeln: Joachimsthal, Anwendung der Diff.- und Integralrechnung etc., Leipzig 1881. Salmon-Fiedler, Analytische Geometrie des Raumes, Leipzig 1880. Monge, Applicat. de l'Analyse á la Géométrie, 5. éd. annot. p. Liouville, Paris 1850. Viele Theoreme sind auch in der analytischen Mechanik von Somoff d. v. Ziewet, Leipzig 1879, zu finden.

B. Beurtheilung der Raumcurven.

Aendert ein bewegter Punkt in einem Punkte der Curve den Sinn seiner Bewegung, so heisst dieser Curvenpunkt ein Rückkehrpunkt. Aendert eine Tangente den Sinn ihrer Drehung in der Schmiegungsebene, so heisst sie eine Rückkehrtangente; ändert die Schmiegungsebene den Sinn ihrer Drehung um die Tangente, so heisst sie eine Rückkehrebene dieser Curve.

Hinsichtlich dieser Elemente sind acht Combinationen möglich. Bezeichne r, dass ein Element ein Rückkehrelement, 0, dass dasselbe kein Rückkehrelement ist, sei ferner $P =$ Punkt, $T =$ Tangente, $S =$ Schmiegungsebene, so giebt folgende Tafel das Verhalten der Curve:

	P	T	S	ds	$d\tau$	$d\vartheta$	dk	ϱ	r	R
1	0	0	0	$\gtrless 0$	$\gtrless 0$	$\gtrless 0$	$\gtrless 0$	$= \frac{ds}{d\tau}$	$= \frac{ds}{d\vartheta}$	$= \frac{ds}{dk}$
2	0	0	r	$\gtrless 0$	$\gtrless 0$	$= 0$	$= d\tau$	$= \frac{ds}{d\tau}$	$= \infty$	$= \varrho$
3	0	r	0	$\gtrless 0$	$= 0$	$\gtrless 0$	$= d\vartheta$	$= \infty$	$= \frac{ds}{d\vartheta}$	$= r$
4	0	r	r	$\gtrless 0$	$= 0$	$= 0$	$= 0$	$= \infty$	$= \infty$	$= \infty$
5	r	0	0	$= 0$	$\gtrless 0$	$\gtrless 0$	$\gtrless 0$	$= 0$	$= 0$	$= 0$
6	r	0	r	$= 0$	$\gtrless 0$	$= 0$	$\gtrless 0$	$= 0$	$= \frac{0}{0}$	$= 0$
7	r	r	0	$= 0$	$= 0$	$\gtrless 0$	$= d\vartheta$	$= \frac{0}{0}$	$= 0$	$= 0$
8	r	r	r	$= 0$	$= 0$	$= 0$	$= 0$	$= \frac{0}{0}$	$= \frac{0}{0}$	$= \frac{0}{0}$

Anmerkung:

1) Gewöhnlicher Punkt ohne Eigenthümlichkeiten.
2) Die Tangentenfläche hat einen Wendestrahl; der Curvenpunkt ist ein Wendepunkt.
3) Die Tangentenfläche hat eine Schärfe.
4) Ebenso, die Tangente ist zugleich ein Wendestrahl.
5) und 6) Die Curve bildet eine Spitze, bleibt auf derselben Seite der Schmiegungsebene bei 5) und geht auf die andere über bei 6).
7) und 8) Analog wie bei 5) und 6).

Für den Fall, dass ein Punkt der Curve ins Unendliche rückt, wobei jedoch die Tangente und Schmiegungsebene im

9. Transformationsformeln zu den Curven doppelter Krümmung.

Sei

1) $$d x^2 + d y^2 + d z^2 = d s^2$$

2) $$d y\, d^2 z - d z\, d^2 y = X$$
$$d z\, d^2 x - d x\, d^2 z = Y$$
$$d x\, d^2 y - d y\, d^2 z = Z$$

3) $$\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2} = \frac{d s^3}{\varrho}$$

4) $$\frac{X d^3 x + Y d^3 y + Z d^3 z}{X^2 + Y^2 + Z^2} = \frac{1}{r}$$

5) $$d^2 y\, d^3 z - d^2 z\, d^3 y = X'$$
$$d^2 z\, d^3 x - d^2 x\, d^3 z = Y'$$
$$d^2 x\, d^3 y - d^2 y\, d^3 z = Z'$$

6) $$d \frac{d y}{d s}\, d^2 \frac{d z}{d s} - d \frac{d z}{d s}\, d^2 \frac{d y}{d s} = X'_s$$
$$d \frac{d z}{d s}\, d^2 \frac{d x}{d s} - d \frac{d x}{d s}\, d^2 \frac{d z}{d s} = Y'_s$$
$$d \frac{d x}{d s}\, d^2 \frac{d y}{d s} - d \frac{d y}{d s}\, d^2 \frac{d z}{d s} = Z'_s.$$

So ergeben sich folgende Transformations- und Reductionsformeln:

7) $$\left(\frac{d x}{d s}\right)^2 + \left(\frac{d y}{d s}\right)^2 + \left(\frac{d z}{d s}\right)^2 = 1$$

8) $$\frac{d x}{d s}\, d \frac{d x}{d s} + \frac{d y}{d s}\, d \frac{d y}{d s} + \frac{d z}{d s}\, d \frac{d z}{d s} = 0$$

9) $$d x\, d^2 x + d y\, d^2 y + d z\, d^2 z = d s\, d^2 s$$

10) $$d \frac{d x}{d s} = \frac{d s\, d^2 x - d x\, d^2 s}{d s^2}, \quad d \frac{d y}{d s} = \frac{d s\, d^2 y - d y\, d^2 s}{d s^2}$$
$$d \frac{d z}{d s} = \frac{d s\, d^2 z - d z\, d^2 s}{d s^2}.$$

11) $$\frac{d y}{d s}\, d \frac{d z}{d s} - \frac{d z}{d s}\, d \frac{d y}{d s} = \frac{X}{d s^2}, \quad \frac{d z}{d s}\, d \frac{d x}{d s} - \frac{d x}{d s}\, d \frac{d z}{d s} = \frac{Y}{d s^2}$$
$$\frac{d x}{d s}\, d \frac{d y}{d s} - \frac{d y}{d s}\, d \frac{d x}{d s} = \frac{Z}{d s^2}$$

$$12)\ \frac{dy}{ds}\,d^2\frac{dz}{ds} - \frac{dz}{ds}\,d^2\frac{dy}{ds} = d\,\frac{X}{ds^2},\ \frac{dz}{ds}\,d^2\frac{dx}{ds} - \frac{dx}{ds}\,d^2\frac{dz}{ds}$$
$$= d\,\frac{Y}{ds^2},\ \frac{dx}{ds}\,d^2\frac{dy}{ds} - \frac{dy}{ds}\,d^2\frac{dx}{ds} = d\,\frac{Z}{ds^2}$$

$$13)\ d^2\frac{dx}{ds} = \frac{ds\,d^3x - dx\,d^3s}{ds^2} - \frac{2\,d^2s}{ds}\,d\,\frac{dx}{ds}$$
$$d^2\frac{dy}{ds} = \frac{ds\,d^3y - dy\,d^3s}{ds^2} - 2\,\frac{d^2s}{ds}\,d\,\frac{dy}{ds}$$
$$d^2\frac{dz}{ds} = \frac{ds\,d^3z - dz\,d^3s}{ds^2} - 2\,\frac{d^2s}{ds}\,d\,\frac{dz}{ds}$$

$$14)\ X^2 + Y^2 + Z^2 = \frac{ds^6}{\varrho^2}$$

$$15)\ d^2x^2 + d^2y^2 + d^2z^2 - d^2s^2 = \frac{ds^4}{\varrho^2}$$

$$16)\ \left(d\,\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(d\,\frac{dy}{ds}\right)^2 + \left(d\,\frac{dz}{ds}\right)^2 = \frac{ds^2}{\varrho^2}$$

$$17)\ dX = dy\,d^3z - dz\,d^3y,\ dY = dz\,d^3x - dx\,d^3z,$$
$$dZ = dx\,d^3y - dy\,d^3x$$

$$18)\ X\,dx + Y\,dy + Z\,dz = 0$$

$$19)\ X\,d^2x + Y\,d^2y + Z\,d^2z = 0$$

$$20)\ X\,d\,\frac{dx}{ds} + Y\,d\,\frac{dy}{ds} + Z\,d\,\frac{dz}{ds} = 0$$

$$21)\ X'\,d^2x + Y'\,d^2y + Z'\,d^2z = 0$$
$$X'\,d^3x + Y'\,d^3y + Z'\,d^3z = 0$$

$$22)\ dX\,dx + dY\,dy + dZ\,dz = 0$$
$$dX\,d^3x + dY\,d^3y + dZ\,d^3z = 0$$

$$23)\ X'_s\,d\,\frac{dx}{ds} + Y'_s\,d\,\frac{dy}{ds} + Z'_s\,d\,\frac{dz}{ds} = 0$$
$$X'_s\,d^2\frac{dx}{ds} + Y'_s\,d^2\frac{dy}{ds} + Z'_s\,d^2\frac{dz}{ds} = 0$$

$$24)\ dx\,d^3x + dy\,d^3y + dz\,d^3z = ds\,d^3s - \frac{ds^4}{\varrho^4}$$

$$25)\ d^2x\,d^3x + d^2y\,d^3y + d^2z\,d^3z = d^2s\,d^3s + \frac{ds^2}{\varrho}\,d\,\frac{ds^2}{\varrho}$$

$$26)\ \frac{dx}{ds}\,d^2\frac{dx}{ds} + \frac{dy}{ds}\,d^2\frac{dy}{ds} + \frac{dz}{ds}\,d^3\frac{dz}{ds} = -\frac{ds^2}{\varrho^2}$$

27) $d^2x\,d\frac{dx}{ds}+d^2y\,d\frac{dy}{ds}+d^2z\,d\frac{dz}{ds}=\frac{ds^3}{\varrho^2}$

28) $d^2x\,d^2\frac{dx}{ds}+d^2y\,d^2\frac{dy}{ds}+d^2z\,d^2\frac{dz}{ds}=\frac{ds^3}{\varrho}\,d\frac{1}{\varrho}$

29) $d\frac{dx}{ds}\,d^2\frac{dx}{ds}+d\frac{dy}{ds}\,d^2\frac{dy}{ds}+d\frac{dz}{ds}\,d^2\frac{dz}{ds}=\frac{ds}{\varrho}\,d\frac{ds}{\varrho}$

30) $Ydz-Zdy=ds^3d\frac{dx}{ds},\quad Zdx-Xdz=ds^3d\frac{dy}{dz}.$

$$Xdy-Ydx=ds^3d\frac{dz}{ds}$$

31) $Yd^2z-Zd^2y=ds^2d^2s\,d\frac{dx}{ds}-\frac{ds^4}{\varrho^2}dx$

$Zd^2x-Xd^2z=ds^2d^2s\,d\frac{dy}{ds}-\frac{ds^4}{\varrho^2}dy$

$Xd^2y-Yd^2x=ds\,d^2s\,d\frac{dz}{ds}-\frac{ds^4}{\varrho^2}dz$

32) $Yd\frac{dz}{ds}-Zd\frac{dy}{ds}=-\frac{ds^3}{\varrho^2}dx,\quad Zd\frac{dx}{ds}-Xd\frac{dz}{ds}$

$$=-\frac{ds^3}{\varrho^2}dy,\quad Xd\frac{dy}{ds}-Yd\frac{dz}{ds}=-\frac{ds^3}{\varrho^2}dz$$

33) $Yd^2\frac{dz}{ds}-Zd^2\frac{dy}{ds}=-\frac{ds^3}{\varrho}\,d\frac{dx}{\varrho}$

$Zd^2\frac{dx}{ds}-Xd^2\frac{dz}{ds}=-\frac{ds^3}{\varrho}\,d\frac{dy}{\varrho}$

$Xd^2\frac{dy}{ds}-Yd^2\frac{dx}{ds}=-\frac{ds^3}{\varrho}\,d\frac{dz}{\varrho}$

34) $dYdz-dZdy=ds\,d\left\{ds^2d\frac{dx}{ds}\right\}+\frac{dx\,ds^4}{\varrho^2}$

$$=\varrho d\frac{ds^3}{\varrho}\,d\frac{dx}{ds}+\frac{Xds^2}{r}=ds\{ds\,d^3x-dx\,d^3s\}+\frac{dx\,ds^4}{\varrho^2}$$

$$dZdx-dXdz=ds\,d\left\{ds^2d\frac{dy}{ds}\right\}+\frac{dy\,ds^4}{\varrho^2}$$

$$=\varrho d\frac{ds^3}{\varrho}\,d\frac{dy}{ds}+\frac{Yds^2}{r}=ds\{ds\,d^3y-dy\,d^3s\}+\frac{dy\,ds^4}{\varrho^2}$$

$$dXdy-dYdx=ds\,d\left\{ds^2d\frac{dz}{ds}\right\}+\frac{dz\,ds^4}{\varrho^2}$$

$$=\varrho d\frac{ds^3}{\varrho}\,d\frac{dz}{ds}+\frac{Zds^2}{r}=ds\{ds\,d^3z-dz\,d^3s\}+\frac{dz\,ds^4}{\varrho^2}$$

$$35)\quad d\frac{Y}{ds^2}\cdot\frac{dz}{ds} - d\frac{Z}{ds^2}\cdot\frac{dy}{ds} = d^2\frac{dx}{ds} + \frac{dx}{ds}\cdot\frac{ds^2}{\varrho^2}$$

$$d\frac{Z}{ds^2}\cdot\frac{dx}{ds} - d\frac{X}{ds^2}\cdot\frac{dz}{ds} = d^2\frac{dy}{ds} + \frac{dy}{ds}\cdot\frac{ds^2}{\varrho^2}$$

$$d\frac{X}{ds^2}\cdot\frac{dy}{ds} - d\frac{Y}{ds^2}\cdot\frac{dx}{ds} = d^2\frac{dz}{ds} + \frac{dz}{ds}\cdot\frac{ds^2}{\varrho^2}$$

$$36)\quad Xd^3x + Yd^3y + Zd^3z = \frac{ds^6}{r\varrho^3}$$

$$37)\quad YdZ - ZdY = dx\frac{ds^6}{r\varrho^2},\quad ZdX - XdZ = dy\frac{ds^6}{r\varrho^2},$$

$$XdY - YdX = dz\frac{ds^6}{r\varrho^2}$$

$$38)\quad YZ' - ZY' = d^2x\frac{ds^6}{r\varrho^2},\quad ZX' - XZ' = d^2y\frac{ds^6}{r\varrho^2},$$

$$XY' - YX' = d^2z\frac{dx^6}{r\varrho^2}$$

$$39)\quad Xdx^3 + Ydy^3 + Zdz^3 = X'dx + Y'dy + Z'dz$$
$$= -(dXd^2x + dYd^2y + dZd^2z) = d^2Xdx + d^2Ydy + d^2Zdz$$
$$= Xd^3x - dXd^2x + X'dx$$
$$= Yd^3y - dYd^2y + Y'dy$$
$$= Zd^3z - dZd^2z + Z'dz = \frac{ds^6}{r\varrho^2}$$

$$40)\quad Xd^3y - dXd^2y + X'dy = 0,\quad Xd^3z - dXd^2z + X'dz = 0$$

und die analogen für Y und Z.

$$41)\quad Xd^3s - dXd^2s + X'ds = \frac{ds^3}{\varrho^2}\left\{X + \frac{dx\,ds^2}{r}\right\}$$

$$Yd^3s - dYd^2s + Y'ds = \frac{ds^3}{\varrho^2}\left\{Y + \frac{dy\,ds^2}{r}\right\}$$

$$Zd^3s - dZd^2s + Z'ds = \frac{ds^3}{\varrho^2}\left\{Z + \frac{dz\,ds^2}{r}\right\}$$

$$42)\quad X_s' = \frac{1}{\varrho^2}\left\{X + \frac{dx\,ds^2}{r}\right\},\quad Y_s' = \frac{1}{\varrho^2}\left\{Y + \frac{dy\,ds^2}{r}\right\}$$

$$Z_s' = \frac{1}{\varrho^2}\left\{Z + \frac{dz\,ds^2}{r}\right\}$$

$$43)\quad X_s'^2 + Y_s'^2 + Z_s'^2 = \frac{ds^6}{\varrho^4}\left\{\frac{1}{\varrho^2} + \frac{1}{r^2}\right\} = \frac{ds^6}{\varrho^6 r^2}(\varrho^2 + r^2)$$

$$44)\quad X'_s \frac{dx}{ds} + Y'_s \frac{dy}{ds} + Z'_s \frac{dz}{ds} = \frac{ds^3}{\varrho^3 r}$$

$$45)\quad XX'_s + YY'_s + ZZ'_s = \frac{ds^6}{\varrho^4}$$

$$46)\quad Y'_s \frac{dz}{ds} - Z'_s \frac{dy}{ds} = \frac{ds^2}{\varrho^2}\, d\frac{dx}{ds},\ Z'_s \frac{dx}{ds} - X'_s \frac{dz}{ds} = \frac{ds^2}{\varrho^2}\, d\frac{dy}{ds},$$

$$X'_s \frac{dy}{ds} - Y'_s \frac{dx}{ds} = \frac{ds^2}{\varrho^2}\, d\frac{dz}{ds}$$

$$47)\quad YZ'_s - ZY'_s = \frac{ds^5}{r\varrho^2}\, d\frac{dx}{ds},\quad Zx'_s - XZ'_s = \frac{ds^5}{r\varrho^2}\, d\frac{dy}{ds},$$

$$XY' - YX'_s = \frac{ds^5}{r\varrho^2}\, d\frac{dz}{ds}$$

$$48)\quad Y'_s d\frac{dz}{ds} - Z'_s d\frac{dy}{ds} = \frac{ds^3}{\varrho^3}\, d\cdot\frac{\varrho d\frac{dx}{ds}}{ds}$$

$$Z'_s d\frac{dx}{ds} - X'_s d\frac{dz}{ds} = \frac{ds^3}{\varrho^3}\, d\cdot\frac{\varrho d\frac{dy}{ds}}{ds}$$

$$X'_s d\frac{dy}{ds} - Y'_s d\frac{dx}{ds} = \frac{ds^3}{\varrho^3}\, d\cdot\frac{\varrho d\frac{dy}{ds}}{ds}$$

$$49)\quad d\frac{\varrho X}{ds^3} = d\frac{X}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = -\frac{\varrho}{r}\, d\frac{dx}{ds},$$

$$d\frac{\varrho Y}{ds^3} = -\frac{\varrho}{r}\, d\frac{dy}{ds},\quad d\frac{\varrho Z}{ds^3} = -\frac{\varrho}{r}\, d\frac{dz}{ds}$$

$$50)\quad \frac{\varrho d\frac{dy}{ds}}{ds}\, d\cdot\frac{\varrho d\frac{dz}{ds}}{ds} - \frac{\varrho d\frac{dz}{ds}}{ds}\, d\cdot\frac{\varrho d\frac{dy}{ds}}{ds} = \frac{\varrho^2}{ds^2} X'_s$$

und die beiden analogen Formeln für Y'_s, Z'_s.

$$51)\quad d\cdot\frac{\varrho d\frac{dx}{ds}}{ds} = \frac{\varrho}{r}\frac{X}{ds^2} - \frac{dx}{\varrho},\quad d\frac{\varrho d\frac{dy}{ds}}{ds} = \frac{\varrho}{r}\frac{Y}{ds^2} - \frac{dy}{\varrho},$$

$$d\cdot\frac{\varrho d\frac{dz}{ds}}{ds} = \frac{\varrho}{r}\frac{Z}{ds^2} - \frac{dz}{\varrho}$$

$$52)\quad d^2\frac{dx}{ds}=\frac{ds}{\varrho}\left\{\frac{\varrho X}{r\,ds^2}-\frac{dx}{\varrho}\right\}+\frac{\varrho}{ds}\,d\frac{ds}{\varrho}\cdot d\frac{dx}{ds}$$

$$d^2\frac{dy}{ds}=\frac{ds}{\varrho}\left\{\frac{\varrho Y}{r\,ds^2}-\frac{dy}{\varrho}\right\}+\frac{\varrho}{ds}\,d\frac{ds}{\varrho}\cdot d\frac{dy}{ds}$$

$$d^2\frac{dz}{ds}=\frac{ds}{\varrho}\left\{\frac{\varrho Z}{r\,ds^2}-\frac{dz}{\varrho}\right\}+\frac{\varrho}{ds}\,d\frac{ds}{\varrho}\cdot d\frac{dz}{ds}$$

$$53)\quad \left(d^2\frac{dx}{ds}\right)^2+\left(d^2\frac{dy}{ds}\right)^2+\left(d^2\frac{dz}{ds}\right)^2-\left(d\frac{ds}{\varrho}\right)^2=\frac{ds^4}{\varrho^2}\left\{\frac{1}{\varrho^2}+\frac{1}{r^2}\right\}$$

$$54)\quad \left(d\,\frac{\varrho\, d\frac{dx}{ds}}{ds}\right)^2+\left(d\,\frac{\varrho\, d\frac{dy}{ds}}{ds}\right)^2+\left(d\,\frac{\varrho\, d\frac{dz}{ds}}{ds}\right)^2=ds^2\left\{\frac{1}{\varrho^2}+\frac{1}{r^2}\right\}$$

$$55)\quad dX.d\frac{dx}{ds}+dY.d\frac{dy}{ds}+dZ.d\frac{dz}{ds}=-\frac{ds^5}{\varrho^2 r}$$

$$56)\quad \frac{dx}{ds}d^3\frac{dx}{ds}+\frac{dy}{ds}d^3\frac{dy}{ds}+\frac{dz}{ds}d^3\frac{dz}{ds}$$

$$=-3\frac{ds}{\varrho}\,d\frac{ds}{\varrho}=-\frac{\varrho}{ds}\,d\frac{ds^3}{\varrho^3}$$

$$57)\quad \frac{X}{ds^2}d^2\frac{dx}{ds}+\frac{Y}{ds^2}d^2\frac{dy}{ds}+\frac{Z}{ds^2}d^2\frac{dz}{ds}=\frac{ds^3}{\varrho^2 r}$$

$$58)\quad dX\,d^2\frac{dx}{ds}+dY\,d^2\frac{dy}{ds}+dZ\,d^2\frac{dz}{ds}=2\,d^2s\,\frac{ds^4}{\varrho^2 r}$$

$$59)\quad d\,\frac{X}{ds^2}\cdot d^2\frac{dx}{ds}+d\,\frac{Y}{ds^2}\cdot d^2\frac{dy}{ds}+d\,\frac{Z}{ds^2}\cdot d^2\frac{dz}{ds}=0$$

$$60)\quad X d^3\frac{dx}{ds}+Y d^3\frac{dy}{ds}+Z d^3\frac{dz}{ds}=ds^2.\,d\,\frac{ds^3}{r\varrho^2}$$

$$61)\quad X_s' d^3\frac{dx}{ds}+Y_s' d^3\frac{dy}{ds}+Z_s' d^3\frac{dz}{ds}=\frac{ds^5}{\varrho^5}\,d\,\frac{\varrho}{r}=-\frac{ds^5}{\varrho^3 r^2}\,d\,\frac{r}{\varrho}$$

$$62)\quad dX=\frac{\varrho X}{ds^3}\,d\frac{ds^3}{\varrho}-\frac{ds^3}{r}\,d\frac{dx}{ds},\quad dY=\frac{\varrho Y}{ds^3}\,d\frac{ds^3}{\varrho}-\frac{ds^3}{r}\,d\frac{dy}{ds}$$

$$dZ=\frac{\varrho Z}{ds^3}\,d\frac{ds^3}{\varrho}-\frac{ds^3}{r}\,d\frac{dz}{ds}$$

$$63)\quad dX_s'=\frac{dx}{ds}\,d\frac{ds^3}{r\varrho^2}+\frac{\varrho X}{ds^3}\,d\frac{ds^3}{\varrho^3}=\frac{\varrho^3 X_s'}{ds^3}\,d\frac{ds^3}{\varrho^3}+\frac{dx\,ds^2}{\varrho^3}\,d\,\frac{\varrho}{r}$$

$$dY_s'=\frac{dy}{ds}\,d\frac{ds^3}{r\varrho^2}+\frac{\varrho Y}{ds^3}\,d\frac{ds^3}{\varrho^3}=\frac{\varrho^3 Y_s'}{ds^3}\,d\frac{ds^3}{\varrho^3}+\frac{dy\,ds^2}{\varrho^3}\,d\,\frac{\varrho}{r}$$

$$dZ_s'=\frac{dz}{ds}\,d\frac{ds^3}{r\varrho^2}+\frac{\varrho Z}{ds^3}\,d\frac{ds^3}{\varrho^3}=\frac{\varrho^3 Z_s'}{ds^3}\,d\frac{ds^3}{\varrho^3}+\frac{dz\,ds^2}{\varrho^3}\,d\,\frac{\varrho}{r}$$

$$64)\quad Y'_s\,dZ'_s - Z'_s\,dY'_s = \frac{ds^5}{\varrho^5}\,d\frac{\varrho}{r}\cdot d\frac{dx}{ds}$$

$$Z'_s\,dX'_s - X'_s\,dZ'_s = \frac{ds^5}{\varrho^5}\,d\frac{\varrho}{r}\cdot d\frac{dy}{ds}$$

$$X'_s\,dY'_s - Y'_s\,dZ'_s = \frac{ds^5}{\varrho^5}\,d\frac{\varrho}{r}\cdot d\frac{dz}{ds}$$

Sei

$$\frac{1}{R^2} = \frac{1}{\varrho^2} + \frac{1}{r^2}$$

$$X_s'^2 + Y_s'^2 + Z_s'^2 = U^2,$$

so wird

$$65)\quad d\cdot\frac{X'_s}{U} = d\,\frac{\varrho^2 R X'_s}{ds^3},\quad d\cdot\frac{Y'_s}{U} = d\,\frac{\varrho^2 R Y'_s}{ds^3},\quad d\,\frac{Z'_s}{U} = d\,\frac{\varrho^2 R Z'_s}{ds^3}$$

$$66)\quad \left(d\cdot\frac{X'_s}{U}\right)^2 + \left(d.\frac{Y'_s}{U}\right)^2 + \left(d\,\frac{Z'_s}{U}\right)^2 = \left(\frac{r^2 d\,\frac{\varrho}{r}}{\varrho^2+r^2}\right)^2 = \left(\frac{\varrho^2 d\,\frac{r}{\varrho}}{\varrho^2+r^2}\right)^2$$

$$67)\quad dx - d\,\frac{\varrho^3 X'_s}{ds^2 d\,\frac{\varrho}{r}} = -\frac{\varrho^3 X'_s}{ds^3}\,d\,\frac{ds}{d\,\frac{\varrho}{r}}$$

$$dy - d\,\frac{\varrho^3 Y'_s}{ds^2 d\,\frac{\varrho}{r}} = -\frac{\varrho^3 Y'_s}{ds^3}\,d\,\frac{ds}{d\,\frac{\varrho}{r}}$$

$$dz - d\,\frac{\varrho^3 Z'_s}{ds^2 d\,\frac{\varrho}{r}} = -\frac{\varrho^3 Z'_s}{ds^3}\,d\,\frac{ds}{d\,\frac{\varrho}{r}}$$

$$68)\quad X\,dX + Y\,dY + Z\,dZ = \frac{ds^3}{\varrho}\cdot d\,\frac{ds^3}{\varrho}$$

$$69)\quad \frac{ds^2}{r^2} = \frac{\varrho^2}{ds^6}\{dX^2 + dY^2 + dZ^2\}$$

$$- \frac{\varrho^4}{ds^{12}}\{X\,dX + Y\,dY + Z\,dZ\}^2$$

$$70)\quad dX^2 + dY^2 + dZ^2 = \frac{ds^3}{r^2\varrho^2} + \left(d\,\frac{ds^3}{\varrho}\right)^2$$

$$71)\quad dX_s'^2 + dY_s'^2 + dZ_s'^2 = \left(d\,\frac{ds^3}{r\varrho^2}\right)^2 + \left(d\,\frac{ds^3}{\varrho^3}\right)^2$$

$$72)\quad d\,\frac{X}{d s^2} = \frac{\varrho X}{d s^3}\, d\,\frac{d s}{\varrho} - \frac{d s}{r}\, d\,\frac{d x}{d s}$$

$$d\,\frac{Y}{d s^2} = \frac{\varrho Y}{d s^3}\, d\,\frac{d s}{\varrho} - \frac{d s}{r}\, d\,\frac{d y}{d s}$$

$$d\,\frac{Z}{d s^2} = \frac{\varrho Z}{d s^3}\, d\,\frac{d s}{\varrho} - \frac{d s}{r}\, d\,\frac{d z}{d s}$$

$$73)\quad d\,\frac{X}{d s^3} = -\,\frac{X}{d s^3}\,\frac{d \varrho}{\varrho} - \frac{1}{r}\, d\,\frac{d x}{d s}$$

$$d\,\frac{Y}{d s^3} = -\,\frac{Y}{d s^3}\,\frac{d \varrho}{\varrho} - \frac{1}{r}\, d\,\frac{d y}{d s}$$

$$d\,\frac{Z}{d s^3} = -\,\frac{Z}{d s^3}\,\frac{d \varrho}{\varrho} - \frac{1}{r}\, d\,\frac{d z}{d s}$$

$$74)\quad \left(d\,\frac{X}{d s^3}\right)^2 + \left(d\,\frac{Y}{d s^3}\right)^2 + \left(d\,\frac{Z}{d s^3}\right)^2 = \frac{1}{\varrho^2}\left\{\frac{d s^2}{r^2} + \frac{d \varrho^2}{\varrho^2}\right\}$$

$$75)\quad \frac{Y}{d s^3}\, d\,\frac{Z}{d s^3} - \frac{Z}{d s^3}\, d\,\frac{Y}{d s^3} = \frac{d x}{r \varrho^2},$$

$$\frac{Z}{d s^3}\, d\,\frac{X}{d s^3} - \frac{X}{d s^3}\, d\,\frac{Z}{d s^3} = \frac{d y}{r \varrho^2},\quad \frac{X}{d s^3}\, d\,\frac{Y}{d s^3} - \frac{Y}{d s^3}\, d\,\frac{X}{d s^3} = \frac{d z}{r \varrho^2}$$

$$76)\quad \frac{1}{\varrho^2} = \frac{\left(\frac{X}{d s^2}\right)^2 + \left(d\,\frac{d x}{d s}\right)^2}{d s^2 - d x^2} = \frac{\left(\frac{Y}{d s^2}\right)^2 + \left(d\,\frac{d y}{d s}\right)^2}{d s^2 - d y^2}$$

$$= \frac{\left(\frac{Z}{d s^2}\right)^2 + \left(d\,\frac{d z}{d s}\right)^2}{d s^2 - d z^2}$$

$$77)\quad -\,\frac{1}{\varrho^2} = \frac{\frac{Y}{d s^2}\,\frac{Z}{d s^2} + d\,\frac{d y}{d s}\cdot d\,\frac{d z}{d s}}{d y\, d z} = \frac{\frac{Z}{d s^2}\,\frac{X}{d s^2} + d\,\frac{d z}{d s}\cdot d\,\frac{d x}{d s}}{d z\, d x}$$

$$= \frac{\frac{X}{d s^2}\cdot\frac{Y}{d s^2} + d\,\frac{d x}{d s}\cdot d\,\frac{d y}{d s}}{d x\, d y}.$$

Diese Formeln sind entnommen dem Tom. 18, Cah. 30 des Journ. de l'école royale polytechnique. (Snt-Venant Mém. sur les lignes courbes non planes.)

D. Rectification der Raumcurven.

1) Das Bogenelement einer Raumcurve ist gegeben durch

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2,$$

oder wenn

$$x = u \cos\omega, \quad y = u \sin\omega$$

gesetzt wird, durch

$$ds^2 = dz^2 + du^2 + u^2 d\omega^2,$$

oder wenn

$$u = r\cos\vartheta, \quad z = r\sin\vartheta,$$

also

$$x = r\cos\vartheta\cos\omega, \quad y = r\cos\vartheta\sin\omega$$

gesetzt wird:

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\vartheta^2 + r^2\cos^2\vartheta\, d\omega^2.$$

2) Sei

$$y = \varphi(x), \quad z = \psi(x)$$

die Gleichung der Raumcurve, so wird

$$s = \int_{x_1}^{x_2} dx \sqrt{1 + \varphi'(x)^2 + \psi'(x)^2}.$$

Wird

$$u = \varphi(z), \quad \omega = \psi(z)$$

als Gleichung der Curve gegeben, so ist

$$s = \int_{z_1}^{z_2} dz \sqrt{1 + \varphi'(z)^2 + \{\varphi(z)\psi'(z)\}^2}$$

Ist endlich $r = \varphi(\vartheta)$, $\omega = \psi(\vartheta)$, so folgt:

$$s = \int_{\vartheta_1}^{\vartheta_2} d\vartheta \sqrt{\varphi(\vartheta)^2 + \varphi'(\vartheta)^2 + \{\varphi(\vartheta)\psi'(\vartheta)\cos\vartheta\}^2}.$$

§. 170.

Theorie der Flächen.

I.

1) Gleichung einer Fläche:

$$\text{I.} \quad F(x, y, z) = 0$$

$$\text{II.} \quad z = f(x, y).$$

$$\text{III.} \quad x = f(u, v), \quad y = \varphi(u, v), \quad z = \psi(u, v).$$

2) Bezeichnungen:

$$p = \frac{\partial z}{\partial x}, \quad q = \frac{\partial z}{\partial y}$$

$$r = \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \quad t = \frac{\partial q}{\partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$$

$$s = \frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial q}{\partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$$

3)
$$F_1 = \frac{\partial F}{\partial x}, \quad F_2 = \frac{\partial F}{\partial y}, \quad F_3 = \frac{\partial F}{\partial z}$$

$$F_{11} = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}, \quad F_{12} = F_{21} = \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}$$

etc.

4) Gleichung der Tangentialebene:

$$(\xi - x) F_1 + (\eta - y) F_2 + (\zeta - z) F_3 = 0$$

$$\zeta - z = p(\xi - x) + q(\eta - y).$$

5) Gleichung der Normale:

$$\frac{\xi - x}{F_1} = \frac{\eta - y}{F_2} = \frac{\zeta - z}{F_3}.$$

Seien λ, μ, ν diejenigen Winkel, welche die Normale mit den Axen einschliesst, so wird:

$$\cos\lambda = UF_1, \quad \cos\mu = UF_2, \quad \cos\nu = UF_3,$$

wobei

$$\frac{1}{U^2} = F_1^2 + F_2^2 + F_3^2.$$

Oder in zweiter Form

$$\zeta - z = -\frac{1}{p}(\xi - x) = -\frac{1}{q}(\eta - y).$$

Mit den Winkeln

$$\cos\lambda = \frac{p}{\varkappa}, \quad \cos\mu = \frac{q}{\varkappa}, \quad \cos\nu = \frac{1}{\varkappa},$$

wobei

$$\varkappa = \sqrt{1 + p^2 + q^2}.$$

6) Die Fläche $z = f(x, y)$ wird von der Tangentialebene berührt oder geschnitten, je nachdem

$$rt - s^2 \begin{Bmatrix} \geqq \\ < \end{Bmatrix} 0.$$

Ist die Fläche unter der Form $F(x, y, z) = 0$ gegeben, so setze man

$$\varDelta = \begin{vmatrix} F_{11} & F_{12} & F_{13} \\ F_{12} & F_{22} & F_{23} \\ F_{13} & F_{32} & F_{33} \end{vmatrix}$$

dann

$$= F_1^2 \frac{\partial \varDelta}{\partial F_{11}} + F_2^2 \frac{\partial \varDelta}{\partial F_{22}} + F_3^2 \frac{\partial \varDelta}{\partial F_{33}} + F_2 F_3 \frac{\partial \varDelta}{\partial F_{23}}$$
$$+ F_1 F_3 \frac{\partial \varDelta}{\partial F_{13}} + F_1 F_2 \frac{\partial \varDelta}{\partial F_{12}}.$$

Es berührt sodann die Tangentialebene die Fläche, wenn $R \geqq 0$, schneidet dagegen, wenn $R < 0$.

7) Der Meusnier'sche Satz. Legt man durch eine Tangente einer Fläche zwei Ebenen, von denen die eine normal zur Tangentialebene steht, die andere mit ihr einen Winkel φ bildet, so sind die beiden Krümmungsradien ϱ und ϱ_1 durch die Gleichung

$$\varrho_1 = \varrho \sin \varphi$$

verbunden.

8) Der Euler'sche Satz. Legt man in einem Punkte der Fläche sämmtliche Normalebenen, und bezeichnet den grössten Krümmungsradius dieser Schnitte mit R_1, den kleinsten mit R_2, so ist der Radius R eines dritten Schnittes, dessen Tangente mit der x-Axe einen Winkel φ bildet, gegeben durch

$$\frac{1}{R} = \frac{\cos^2 \varphi}{R_2} + \frac{\sin^2 \varphi}{R_1}. \quad \text{(Vergl. 11.)}$$

9) Denkt man sich auf der Normale eines Punktes einen zweiten Punkt angenommen, welcher von dem gegebenen einen unendlich kleinen Abstand δ besitzt, und legt durch diesen eine Ebene $\perp$ zur Normale, so wird diese die Fläche in einer Curve schneiden, welche nach Dupin den Namen indicatorische Linie führt.

Sei $z = f(xy)$ die Gleichung der Fläche, seien ferner

$$x + \alpha, \quad y + \beta, \quad z + \gamma$$

die Coordinaten des Punktes, in welchem der Normalschnitt und die indicatorische Linie einander treffen, so wird

$$\gamma = \frac{\partial z}{\partial x} \alpha + \frac{\partial z}{\partial y} \beta + \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \alpha^2 + 2 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \alpha \beta + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \beta^2 \right\}$$

oder

$$\gamma = p\alpha + q\beta + \frac{1}{2} \{ r\alpha^2 + 2s\alpha\beta + t\beta^2 \}.$$

Diese Gleichung stellt im Allgemeinen eine Fläche zweit Grades dar, die sogenannte osculatorische Fläche zweit Ordnung.

Es können nun drei Fälle eintreten:

I. $rt - s^2 > 0$. Indicatorische Linie ist eine Ellipse, d osculatorische Fläche ein elliptisches Paraboloid.

II. $rt - s^2 < 0$. Indicatorische Linie eine Hyperbel, d osculatorische Fläche ein hyperbolisches Paraboloid.

III. $rt - s^2 = 0$. Indicatorische Linie degenerirt in zw Gerade, die || sind, die osculatorische Fläche wird ei Cylinderfläche. (Vergl. 9.)

Wird die indicatorische Linie ein Kreis, so entsteht ein s genannter Nabelpunkt, es muss sodann die Doppelgleichung b stehen:

$$\frac{1+p^2}{r} = \frac{pq}{s} = \frac{1+q^2}{t}.$$

In solchen Punkten haben alle Normalschnitte dieselbe Krün mung.

9) Seien nun P und P_1 zwei benachbarte Punkte, so ist d Gleichung der durch die Tangente PP_1 gehenden Normalebene

$$(\xi - x)\begin{vmatrix} F_2 & dy \\ F_3 & dz \end{vmatrix} + (\eta - y)\begin{vmatrix} F_3 & dz \\ F_1 & dx \end{vmatrix} + (\zeta - z)\begin{vmatrix} F_1 & dx \\ F_2 & dy \end{vmatrix} =$$

oder

$$(q\,dz + dy)(\xi - x) + (p\,dy - q\,dx)(\zeta - z) = (dx + p\,dz)(\eta -$$

10) Conjugirte Durchmesser der indicatorischen Linie bilde conjugirte Tangenten. Die Gleichung der zu PP_1 conjugirte Tangente ist:

$$\frac{\xi - x}{F_2\,dF_3 - F_3\,dF_2} = \frac{\eta - y}{F_3\,dF_1 - F_1\,dF_3} = \frac{\xi - z}{F_1\,dF_2 - F_2\,dF_1}$$

oder

$$\frac{\xi - x}{dq} = -\frac{\eta - y}{dp} = \frac{\xi - z}{p\,dq - q\,dp}.$$

11) Unter Hauptnormalschnitten versteht man Normal schnitte zweier conjugirter Tangenten, welche zu einander ⊥ stehen, also Axen der indicatorischen Linie sind. Seien R_1 un R_2 die Krümmungsradien der beiden Hauptnormalschnitte, un sei ferner:

$$K^2 = F_1^2 + F_2^2 + F_3^2$$

$$L = -F_1^2\{F_{22} + F_{33}\} - F_2^2\{F_{11} + F_{33}\} - F_3^2\{F_{11} + F_{22}\} + 2F_2F_3F_{23} + 2F_1F_2F_{12} + 2F_1F_3F_{13}$$

$$N = \begin{vmatrix} F_{11} & F_{12} & F_{13} & F_1 \\ F_{21} & F_{22} & F_{23} & F_2 \\ F_{31} & F_{32} & F_{33} & F_3 \\ F_1 & F_2 & F_3 & 0 \end{vmatrix}$$

nd seien λ_1 und λ_2 die beiden reellen Wurzeln von:

$$\lambda^2 L + \lambda M + N = 0,$$

o findet man:

$$R_1 = \frac{K}{\lambda_1}, \quad R_2 = \frac{K}{\lambda_2}$$

$$\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = -\frac{M}{K^3}, \quad \frac{1}{R_1} \cdot \frac{1}{R_2} = \frac{N}{K^4}.$$

Für $rt - s^2 > 0$ sind R_1 und R_2 gleichgerichtet, N ist > 0. $rt - s^2 < 0$ haben R_1 und R_2 entgegengesetzte Vorzeichen.

Wird $N = 0$, so ist eine der Radien ∞ gross, dann hat ie Tangente des einen Hauptnormalschnittes mit der Fläche inen Contact zweiter Ordnung. Wird in jedem Punkte $N = 0$, o ist die Fläche eine abwickelbare.

Ist $M = 0$, so sind R_1 und R_2 gleich, aber entgegengesetzt ;erichtet.

Die Grösse $\frac{1}{R_1 R_2}$ nennt man das Maass der Krümmung.

Wird

$$X = \frac{p}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}, \quad Y = \frac{q}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}},$$

o wird

$$\frac{1}{R_1 R_2} = \frac{dX}{dx}\frac{dY}{dy} - \frac{dX}{dy} \cdot \frac{dY}{dx} = \frac{(rt - s^2)}{(1 + p^2 + q^2)^2}.$$

Man hat ferner

$$\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \frac{(1 + q^2)r - 2pqs + (1 + p^2)t}{(1 + p^2 + q^2)^{3/2}}.$$

Den Krümmungsradius für einen Normalschnitt, dessen Ebene nit der Ebene von R_1 den Winkel φ bildet, giebt der Euler'che Satz (Nr. 8).

Die Ebenen, die den grössten und kleinsten Krümmung[s]radius enthalten, stehen auf einander normal.

12) Eine Curve auf einer Fläche, deren Normalen zur Fläch[e] für je zwei benachbarte Punkte der Curve sich schneiden, wir[d] die **Krümmungslinie** genannt. Ihre Differentialgleichung laute[t]

$$\begin{vmatrix} F_1 & F_2 & F_3 \\ dx & dy & dz \\ dF_1 & dF_2 & dF_3 \end{vmatrix} = 0$$

oder

$$\{(1+p^2)s - pqr\}dx^2 + \{(1+p^2)t - (1+q^2)r\}dx\,dy$$
$$- \{(1+q^2)s - pqt\}dy^2 = 0.$$

Für die Krümmungslinien gelten folgende Sätze:

α) Durch jeden Punkt der Fläche gehen zwei Krümmungs[-]linien, welche sich in demselben rechtwinklig schneiden.

β) Schneiden sich zwei Flächen längs einer Krümmungslini[e] der einen Fläche unter einem rechten Winkel, so ist der Schnit[t] auch eine Krümmungslinie der anderen Fläche.

γ) Wenn drei Flächen sich in einem Punkte rechtwinkli[g] durchschneiden, und wenn jedes Paar derselben sich auch in den nächstfolgenden gemeinschaftlichen Punkte rechtwinklig schneidet, so sind die Richtungen der Durchschnitte die Richtungen der Krümmungslinien in jeder derselben. (**Satz von Dupin.**)

δ) Ist eine Krümmungslinie eine ebene Curve, so bildet die Ebene derselben und die Tangentenebene der Fläche in jedem ihrer Punkte einen constanten Winkel (**Satz von Joachimsthal**).

ε) Längs einer jeden Krümmungslinie ist die Variation in dem Winkel zwischen der Tangentenebene der Fläche und der osculirenden Ebene der Curve gleich dem Winkel zwischen den beiden osculirenden Ebenen.

η) Ist eine Krümmungslinie zugleich eine geodätische, so muss sie eben sein.

13) Die **kürzeste (geodätische) Linie** auf einer Fläche hat die Eigenschaft, dass ihre Schmiegungsebene durch die Normale der Fläche geht in jedem Punkte der Linie, d. h. der Krümmungsradius ist zugleich die Normale der Fläche. Ihre Differentialgleichung ist:

$$\begin{vmatrix} F_1 & F_2 & F_3 \\ dx & dy & dz \\ d^2x & d^2y & d^2z \end{vmatrix} = 0.$$

Berühren zwei Flächen einander, während die Berührungscurve der einen eine geodätische Linie ist, so ist sie auch eine geodätische Linie der anderen.

Wenn die Normalen einer Fläche längs einer geodätischen Linie einer festen Ebene parallel sind, so bilden die Tangenten der Curve mit einer festen Geraden gleiche Winkel.

Wenn durch einen beliebigen Punkt einer Fläche zwei unendlich nahe und gleich lange geodätische Linien gelegt sind, so ist die Verbindungslinie ihrer Endpunkte rechtwinklig zu beiden.

II.

1) Bisher haben wir die Gleichung der Fläche unter den Formen I. und II. vorausgesetzt, nun wollen wir die wichtigsten Formeln der Form III. zusammenstellen.

Es sei also die Gleichung einer Fläche gegeben durch:

$$x = f(u, v), \quad y = \varphi(u, v), \quad z = \psi(u, v).$$

Beispielsweise für's dreiaxige Ellipsoid:

$$x = a \sin u \sqrt{1 - \varkappa^2 \sin^2 v}$$
$$y = b \cos u \cos v$$
$$z = c \sin v \sqrt{1 - (1 - \varkappa^2) \sin v.}$$

$\varkappa$ ist dabei beliebig, wird $a = b = c$, so erhält man die analogen Gleichungen für die Kugel.

Für die Schraubenfläche wird:

$$z = \alpha u, \quad x = v \cos u, \quad y = v \sin u.$$

2) Wir wenden folgende Abkürzungen an:

$$\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v} - \frac{\partial y}{\partial v}\frac{\partial z}{\partial u} = A$$
$$\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} - \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial u} = B$$
$$\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u} = C$$

$$A\frac{\partial^2 x}{\partial u^2}+B\frac{\partial^2 y}{\partial u^2}+C\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}=D_1$$

$$A\frac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v}+B\frac{\partial^2 y}{\partial u\,\partial v}+C\frac{\partial^2 z}{\partial u\,\partial v}=D_2$$

$$A\frac{\partial^2 x}{\partial v^2}+B\frac{\partial^2 y}{\partial v^2}+C\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}=D_3$$

$$\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2=E$$

$$\frac{\partial x}{\partial u}\,\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial y}{\partial u}\cdot\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial z}{\partial v}=F$$

$$\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2=G,$$

so dass

$$ds^2=dx^2+dy^2+dz^2=E\,du^2+2F\,du\,dv+G\,dv^2$$

wird.

3) Wird $v=$ Constante, so erhält man eine U-Curve, wird $u=$ Constante, so ergiebt sich eine V-Curve.

Der Winkel, unter welchem sich diese Curven schneiden, sei W, so wird

$$\cos W=\frac{F}{\sqrt{E.G}}.$$

Wird $F=0$, so durchschneiden sie sich rechtwinklig.

Sind α, β, γ die Richtungswinkel einer U-Curve, α', β', γ' jene einer V-Curve, so wird

$$\cos\alpha=\frac{\frac{\partial x}{\partial u}}{\sqrt{E}},\quad \cos\beta=\frac{\frac{\partial y}{\partial u}}{\sqrt{E}},\quad \cos\gamma=\frac{\frac{\partial z}{\partial u}}{\sqrt{E}}$$

$$\cos\alpha'=\frac{\frac{\partial x}{\partial v}}{\sqrt{G}},\quad \cos\beta'=\frac{\frac{\partial y}{\partial v}}{\sqrt{G}},\quad \cos\gamma'=\frac{\frac{\partial z}{\partial v}}{\sqrt{G}}.$$

4) Ein Oberflächenelement ist gegeben durch:

$$du\,dv\sqrt{EG-F^2}=du\,dv\sqrt{A^2+B^2+C^2}.$$

5) Der Winkel, den eine beliebige Curve C mit den Curven U und V einschliesst, ist gegeben durch

$$\cos(C, U) = \frac{E\frac{du}{dv} + F}{\sqrt{E}\cdot\frac{ds}{dv}}$$

$$\cos(C, V) = \frac{E\frac{du}{dv} + G}{\sqrt{G}\cdot\frac{ds}{dv}}$$

Die Gleichung der Normale ist

$$\frac{\xi - x}{A} = \frac{\eta - y}{B} = \frac{\zeta - z}{C},$$

ihre Richtungscosinusse

$$\frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}, \quad \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}, \quad \frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Die Gleichung der Tangentialebene

$$(\xi - x)A + (\eta - y)B + (\zeta - z)C = 0.$$

Allgemeine Eigenschaften der Oberflächen zweiter Ordnung.

1) Eine Oberfläche zweiter Ordnung ist im Allgemeinen durch neun Punkte im Raume eindeutig bestimmt.

2) Jede Ebene schneidet eine Oberfläche zweiter Ordnung in einem Kegelschnitt.

3) Schneiden sich zwei Oberflächen zweiter Ordnung in einer ebenen Curve, so schneiden sie sich noch in einer zweiten ebenen Curve.

4) Eine Oberfläche zweiter Ordnung wird von einer Geraden in zwei Punkten geschnitten.

5) Zwei Oberflächen zweiter Ordnung und eine Ebene schneiden sich in vier Punkten.

6) Drei Oberflächen zweiter Ordnung schneiden sich in acht Punkten.

7) Alle Oberflächen zweiter Ordnung, welche durch sieben gegebene Raumpunkte gehen, gehen zugleich durch einen, durch diese sieben Punkte bestimmten Punkt hindurch.

8) Alle Oberflächen zweiter Ordnung, welche durch acht beliebig gewählte Punkte des Raumes hindurchgehen, gehen im

Allgemeinen durch eine durch die acht Punkte bestimmte Raumcurve, in welcher sich je zwei von den genannten Oberflächen schneiden, hindurch.

Hesse, Vorlesungen über analytische Geometrie des Raumes, 9. Vorles.

Pole und Polarebenen.

1) Wird in die Gleichung

$$f(x, y, z, p) = 0$$

$$x = x_0 + \lambda x_1$$

$$y = y_0 + \lambda y_1$$

$$z = z_0 + \lambda z_1$$

$$p = p_0 + \lambda p_1$$

eingeführt, so folgt:

$$f_{00} + 2\lambda f_{01} + \lambda^2 f_{11} = 0,$$

wobei

$$2f_{00} = 2f(x_0 y_0 z_0 p_0)$$

$$2f_{11} = 2f(x_1 y_1 z_1 p_1)$$

$$2f_{01} = x_1 f'(x_0) + y_1 f'(y_0) + z_1 f'(z_0) + p_1 f'(p_0).$$

Man nennt zwei Punkte harmonische Pole der Oberflächen zweiter Ordnung, wenn ihre Verbindungslinie die Oberfläche in zwei Punkten schneidet, die harmonisch sind zu den beiden Punkten.

Die Polarebene oder Polare des Poles $x_0 y_0 z_0 p_0$ ist

$$x f'(x_0) + y f'(y_0) + z f'(z_0) + p f'(p_0) = 0.$$

Es gelten nun folgende Sätze:

Wenn ein Punkt eine Ebene durchläuft, so dreht sich seine Polarebene um den Pol dieser Ebene.

Wenn ein Punkt eine Gerade durchläuft, so dreht sich seine Polarebene um eine in ihr enthaltene gerade Linie.

Diese Sätze lassen sich umkehren.

Eine Tangentenebene ist die Polarebene des Berührungspunktes. Der Pol und die Schnittlinie seiner Polarebene mit der Fläche zweiter Ordnung bestimmen den Tangentenkegel der Oberfläche. Dieser ist der geometrische Ort aller Tangenten, die von einem Punkte an eine Fläche zweiter Ordnung gezogen werden können.

Hesse, Vorlesungen über analytische Geometrie des Raumes, 10. Vorles.

2) Die Reciprokalsätze, die durch Vertauschung von Punkt- in Liniencoordinaten entstehen, giebt Hesse l. c. in der 11. und 12. Vorlesung. Sie sind etwa folgende:

Durch 9 beliebig gewählte Tangentenebenen ist eine Oberfläche zweiter Ordnung im Allgemeinen bestimmt, diese dürfen jedoch nicht zugleich zwei Oberflächen zweiter Ordnung berühren.

Wenn zwei Oberflächen zweiter Ordnung von demselben Tangentenkegel ringsum berührt werden, so werden sie gleichzeitig von einem zweiten Kegel berührt.

Alle Oberflächen zweiter Ordnung, welche sieben gegebene Ebenen berühren, berühren überdies eine, durch diese sieben Ebenen bestimmte, achte Ebene.

Durch einen gegebenen Punkt des Raumes lassen sich vier Ebenen legen, welche zwei gegebene Oberflächen zweiter Ordnung zugleich berühren.

Die Oberflächen zweiter Ordnung haben acht gemeinsame Tangentenebenen.

3) Die Mittelpunkte der Oberflächen zweiter Ordnung, welche acht feste Ebenen berühren, liegen auf einer Geraden.

Die Mittelpunkte der Oberflächen zweiter Ordnung, welche sieben feste Ebenen berühren, liegen auf einer Ebene.

Classification der Flächen zweiter Ordnung.

1) Sei

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz$$
$$+ 2a_1x + 2a_2y + 2a_3z + a = 0$$

und

$$\Delta_0 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}$$

so wird

$$\text{I.} \quad \Delta_0 \gtrless 0$$
$$\text{II.} \quad \Delta_0 = 0.$$

$$\text{I.} \quad \Delta_0 \gtrless 0.$$

Es existirt ein Mittelpunkt. Seien $\xi\eta\vartheta$ seine Coordinaten, so wird

$$a_{11}\xi + a_{12}\eta + a_{13}\zeta + a_1 = 0$$
$$a_{21}\xi + a_{22}\eta + a_{23}\zeta + a_2 = 0$$
$$a_{31}\xi + a_{32}\eta + a_{33}\zeta + a_3 = 0.$$

Sei noch

$$\begin{vmatrix} a & a_1 & a_2 & a_3 \\ a_1 & a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_2 & a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_3 & a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} = \Delta,$$

$$\begin{vmatrix} a_{22} & a_{32} \\ a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} = \Delta_{11}, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{31} \\ a_{13} & a_{33} \end{vmatrix} = \Delta_{22}.$$

So hat man: $\{a_{11} > 0$ vorausgesetzt$\}$

1) $\Delta_0 > 0$, $\Delta_{11} > 0$, $\Delta < 0$ Ellipsoid

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$$

2) $\Delta_0 < 0$, oder $\Delta_0 > 0$, $\Delta_{11} < 0$, und

I. $\Delta < 0$: Elliptisches Hyperboloid oder das Hyperboloid mit einer Mantelfläche

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0.$$

II. $\Delta = 0$: Kegel

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \pm \frac{z^2}{c^2} = 0.$$

III. $\Delta > 0$: Hyperboloid mit zwei Mantelflächen

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0.$$

II. $\Delta_0 = 0$.

Es existirt kein Mittelpunkt.

1) $\Delta_{11} < 0$ oder $\Delta_{22} < 0$ Hyperbolisches Paraboloid

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} - ax = 0$$

2) $\Delta_{11} > 0$ oder $\Delta_{22} > 0$ Elliptisches Paraboloid

$$\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - ax = 0.$$

Dazu kommen noch die Cylinderflächen.

1) Der parabolische Cylinder

$$z^2 + \alpha x + \beta y = 0$$

2) Der elliptische Cylinder

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$$

3) Der hyperbolische Cylinder

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0.$$

Anmerkung: Jede Gleichung von der Form

$$a x^2 + b y^2 + c z^2 + d x y + c x z + f y z = 0$$

stellt einen Kegel dar.

Es kann endlich der Fall eintreten, dass sich die Gleichung in zwei reelle Factoren zerlegen lässt, darum stellt sie zwei Ebenen dar. Sodann müssen folgende Bedingungsgleichungen bestehen.

$$a_{33}\{a_{11}a_{22} - a_{12}^2\} - a_{23}\{a_{11}a_{23} - a_{12}a_{13}\} + a_{13}\{a_{12}a_{23} - a_{22}a_{13}\} = 0$$
$$a\{a_{11}a_{22} - a_{12}^2\} - a_2\{a_{11}a_2 - a_{12}a_1\} + a_1\{a_{12}a_2 - a_{22}a_1\} = 0$$
$$a\{a_{22}a_{33} - a_{23}^2\} - a_3\{a_{22}a_3 - a_{23}a_2\} + a_2\{a_{13}a_3 - a_{33}a_2\} = 0$$
$$a\{a_{11}a_{33} - a_{13}^2\} - a_1\{a_{33}a_1 - a_{13}a_3\} + a_3\{a_{13}a_1 - a_{11}a_3\} = 0$$

Muss man eine Gleichung erst mit -1 multipliciren, ehe man eine der dargestellten Formen erhält, so nennt man das Gebilde ein imaginäres, z. B.

$$-\left\{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1\right\} = 0$$

stellt ein imaginäres Ellipsoid dar.

Vergleiche: Hattendorf, Einleitung in die analytische Geometrie.

Eine andere allgemeine Tabelle zur Beurtheilung einer Fläche zweiten Grades ist folgende:

Sei

$$a z^2 + b y^2 + c x^2 + 2 a_1 x y + 2 b_1 x z + 2 c_1 y z + 2 a_2 z + 2 b_2 y + 2 c_2 z + d = 0,$$

ferner

$$a_1^2 - bc = A', \quad b_1^2 - ac = B', \quad c_1^2 - ab = C'$$
$$a_2(a_1^2 - bc) + b_2(c c_1 - a_1 b_1) + c_2(b b_1 - a_1 c_1) = A$$

$$b_2(b_1^2 - ac) + c_2(aa_1 - bc_1) + a_2(cc_1 - a_1b_1) = B$$
$$c_2(c_1^2 - ab) + a_2(bb_1 - a_1c_1) + b_2(aa_1 - b_1c_1) = C$$
$$abc - aa_1^2 - bb_1^2 - cc_1^2 + 2a_1b_1c_1 = D$$
$$a_2^2A' + b_2^2B' + c_2^2C' + 2a_2b_2(cc_1 - a_1b_1) + 2a_2c_2(bb_1 - a_1c_1) + 2b_2c_2(aa_1 - b_1c_1) + dD = \varDelta$$
$$dC' + ab_2^2 - 2c_1a_2b_2 + ba_2^2 = L,$$

so wird:

I.

$$\left.\begin{array}{c} D < 0 \\ \text{oder} \\ C' > 0 \text{ und } D > 0 \end{array}\right\} \text{ und } \begin{cases} \varDelta > 0 & \text{hyp. Hyperboloid} \\ \varDelta = 0 & \text{Kegel} \\ \varDelta < 0 & \text{ellipt. Hyperboloid.} \end{cases}$$

II.

$$C' < 0 \text{ und } D > 0 \text{ und } \begin{cases} \varDelta < 0 & \text{Ellipsoid} \\ \varDelta = 0 & \text{Ein Punkt} \\ \varDelta > 0 & \text{Keine geom. Bedeutung.} \end{cases}$$

III.

$$D = 0 \text{ und } \begin{cases} C' > 0 \text{ oder } B' > 0 & \text{hyp. Paraboloid} \\ C' < 0 \quad \text{"} \quad B' < 0 & \text{ellipt. Paraboloid.} \end{cases}$$

IV.

$C = 0$ und $D = 0$,

ferner:

$C' > 0$ und	$B' > 0$ und	$L \gtrless 0$	hyperb. Cylinder
$C' < 0$ "	$B' < 0$ "	$L \gtrless 0$	ellipt. Cylinder
$C' = 0$ "	$B' = 0$		parab. Cylinder
$C' > 0$ "	$B' > 0$ "	$L = 0$	zwei Ebenen
$C' > 0$ "	$B' < 0$ "	$L = 0$	eine Gerade
$C' < 0$ "	$B' < 0$ "	$L < 0$	keine geom. Bedeutung.

V.

$C = 0$ und $D = 0$, ferner $C' = 0$ und $B' = 0$ und

$$\begin{vmatrix} c_1 & b_2 \\ a & a_2 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} b_1 & c_2 \\ a & a_2 \end{vmatrix} = 0$$

$$a_2^2 - a\,d \begin{cases} > 0 & \text{zwei parallele Ebenen} \\ = 0 & \text{eine Ebene} \\ < 0 & \text{keine geom. Bedeutung.} \end{cases}$$

Diese Discussion gilt nur für $z \lessgtr 0$ und a wesentlich $+$. Um auch dann sie benutzen zu können, wenn $z = 0$, haben wir z mit x oder y zu verwechseln, wodurch wir eine neue Gleichung erhalten, in welcher $z \gtrless 0$.

Die obige Tafel verliert ihre Gültigkeit. wenn

$$a = b = c = 0$$

wird. Es wird sodann:

$$2a_1 xy + 2b_1 xz + 2c_1 yz + 2a_2 z + 2b_2 y + 2c_2 x + d = 0.$$

Diese Gleichung drückt sodann immer eine reelle Fläche aus, und zwar im Allgemeinen ein Hyperboloid, oder, wenn $\varDelta = 0$, einen Kegel aus.

Das Hyperboloid wird ein

hyperbolisches, wenn $\varDelta > 0$,
elliptisches, " $\varDelta < 0$.

Werden a_1 oder b_1 oder c_1, oder auch zwei von diesen Grössen gleich Null, so haben wir ein hyperbolisches Paraboloid vor uns.

Sei

$$c_1 = 0 \text{ und } b_1 b_2 - a_1 a_2 = 0,$$

so entsteht ein hyperbolischer Cylinder.

Ist $c_1 = 0$ und $b_1 b_2 - a_1 a_2 = 0$, und $b_1 d - 2 a_2 c_2 = 0$, so haben wir zwei Ebenen, die parallel werden, wenn $a_1 = 0$ ist.

Magnus: Sammlung von Aufgaben und Lehrsätzen aus der analytischen Geometrie des Raumes, Berlin 1837.

I. Cylinderflächen.

Differentialgleichung: $ap + bq = 1$.

Allgemeine Gleichung: $\Phi(x - az, y - bz) = 0$.

Specielle Fälle:

1) Die Cylinderfläche soll durch die Curve

$$\varphi(x, y, z) = 0, \quad \psi(x, y, z) = 0$$

gehen. Man setze

$$x - az = u, \quad y - bz = v.$$

Eliminire z aus

$$\varphi\{u + az,\ v + bz,\ z\} = 0$$
$$\psi\{u + az,\ v + bz,\ z\} = 0,$$

wodurch sich

$$\Psi(u, v) = 0$$

oder

$$\Psi(x - az,\ y - bz) = 0$$

als die verlangte Gleichung ergiebt.

2) Der Cylinder soll der Fläche

$$\varphi(x, y, z) = 0$$

umschrieben sein. Um diesen Fall auf den früheren zurückzuführen, haben wir die Berührungscurve zu suchen. Diese ist bestimmt durch die Flächengleichung und durch

$$\psi \equiv a\frac{\partial\varphi}{\partial x} + b\frac{\partial\varphi}{\partial y} + \frac{\partial\varphi}{\partial z} = 0.$$

II. Kegelflächen.

Differentialgleichung: $p(x - x_0) + q(y - y_0) = z - z_0$. dabei ist $x_0\, y_0\, z_0$ die Spitze des Kegels.

Allgemeine Gleichung:

$$\Phi\left\{\frac{x - x_0}{z - z_0},\ \frac{y - y_0}{z - z_0}\right\} = 0.$$

Die Spitze des Kegels wird auch sein Mittelpunkt, die Erzeugende kurz Erzeugende genannt. Die Kegelflächen sind abwickelbar. Von beliebigen Ebenen wird die Kegelfläche in collinearen und collinear liegenden Curven geschnitten.

Die speciellen Fälle werden wie oben durch die Substitutionen

$$\frac{x - x_0}{z - z_0} = u,\quad \frac{y - y_0}{z - z_0} = v,$$

oder

$$x = uz - (uz_0 - x_0)$$
$$y = vz - (vz_0 - y_0)$$

behandelt.

III. Rotationsflächen.

Differentialgleichung, wenn angenommen wird, dass das Coordinatensystem ein rechtwinkliges und die z-Axe die Rotationsaxe ist:

$$py - qx = 0.$$

Das allgemeine Integral:

$$x^2 + y^2 = \varphi(z)$$

oder

$$az + b = \psi(x^2 + y^2)$$

oder die allgemeinste Form

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + z^2 = \varphi\{Ax + By + z\}.$$

Soll die Umdrehungsfläche durch die Rotation der Curve

$$f_1(xyz) = 0, \quad f_2(xyz) = 0,$$

so hat man vier Gleichungen:

$$f_1(xyz) = 0, \quad f_2(xyz) = 0$$
$$Ax + By + z = \alpha$$
$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + z^2 = \varphi(\alpha).$$

Aus diesen ist x, y, z zu eliminiren, wodurch sich eine Relation zwischen α und $\varphi(\alpha)$ ergiebt

$$F\{\alpha, \varphi(\alpha)\} = 0.$$

Die Gleichung der Fläche wird sodann:

$$F\{Ax + By + z, \varphi[(x - a)^2 + (y - b)^2 + z^2]\} = 0.$$

Die willkürliche Function kann auch dadurch bestimmt werden, dass die Rotationsfläche eine gegebene Fläche

$$\chi(x, y, z) = 0$$

einhüllen soll. Diese Aufgabe lässt sich auf die frühere zurückführen, wenn man die Berührungscurve bestimmt. Man bildet aus $\chi = 0$ die Werthe $\frac{dz}{dx}, \frac{\partial z}{\partial y}$ und substituirt sie in

$$(y - b - Bz)\frac{dz}{\partial x} - (x - a - Az)\frac{\partial z}{\partial y} = B(x-a) - A(y-b),$$

dadurch ergiebt sich eine zweite Gleichung:

$$\psi(x, y, z) = 0,$$

wodurch die Lösung auf den früher behandelten Fall zurückgeführt ist.

Die allgemeine Gleichung der Flächen zweiten Grades

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{23}yz + 2a_{13}xz + 2a_{12}xy + \cdots = 0$$

wird eine Umdrehungsfläche bezeichnen, wenn

$$a_{11} - \frac{a_{13}a_{12}}{a_{23}} = a_{22} - \frac{a_{12}a_{23}}{a_{13}} = a_{33} - \frac{a_{23}a_{13}}{a_{12}}.$$

Hat daher eine von den drei Grössen a_{23}, a_{13}, a_{12} den Werth Null, so muss noch eine zweite verschwinden, wenn die Fläche eine Rotationsfläche sein soll.

IV. Conoidflächen.

Dieselben werden durch die Bewegung einer geraden Linie erzeugt, die eine feste Axe stets schneidet und zu einer Ebene immer parallel bleibt.

Sei die gerade Linie die z-Axe, und die gegebene Ebene die xy-Ebene, so wird die Differentialgleichung der Conoidflächen

$$px + qy = 0,$$

und ihr Integral

$$z = \varphi\left(\frac{y}{x}\right).$$

Die allgemeinere Gleichung lautet

$$\frac{\partial z}{\partial x}(az - x) + \frac{\partial z}{\partial y}(bz - y) = 0$$

und ihr Integral

$$z = \varphi\left\{\frac{y - bz}{x - az}\right\},$$

Cono-cuneus (Wallis opera, Tom. II., p. 683 — 699) $a^1 y^2 + x^2 z^2 - r^2 x^2 = 0$, auch Conoid genannt. Weitere Conoide: Schraubenfläche $z = arctagn \frac{y}{x}$.

$$x^2 y^2 - a^2 y^2 - r^2 z^2 = 0 \quad \text{Keilconoid,}$$

$$\frac{z}{c} = log \frac{\sqrt{x^2 + y^2} + \sqrt{x^2 + y^2 - c^2}}{c} \quad \text{Kettenconoid.}$$

V. Fusspunktflächen.

Fällt man von einem festen Punkte auf alle Berührungsebenen einer gegebenen Fläche Perpendikel, so bilden die Fusspunkte eine Fläche, die sogenannte Fusspunktfläche.

Seien y, h, k die Coordinaten des Punktes,
x, y, z die Coordinaten der Fläche.
u, v, w jene des Fusspunktes,

so hat man xyz zu eliminiren aus

$$\frac{\partial z}{\partial x}(u - x) + \frac{\partial z}{\partial y}(v - y) - (w - z) = 0$$

$$u - g = -\frac{\partial z}{\partial x}(w - k)$$

$$v - h = -\frac{\partial z}{\partial y}(w - k)$$

$$\varphi(x, y, z) = 0$$

wobei $\varphi(x, y, z) = 0$ die Gleichung der gegebenen Fläche ist.

Vergl. Schlömilch, Uebungsbuch, I, S. 157.

VI. Einhüllende Flächen.

Sei die Gleichung einer Fläche

$$\varphi\{x, y, z, p\} = 0,$$

wobei p ein willkürlicher Parameter ist, so findet man die Gleichung der einhüllenden Fläche durch Elimination von p aus:

$$\varphi(x, y, z, p) = 0 \quad \frac{\partial \varphi(x, y, z, p)}{\partial p} = 0.$$

Aehnlich wenn zwei Parameter vorkommen. Die Curve

$$\varphi = 0, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial p} = 0$$

wird nach Monge die Charakteristik genannt.

Eliminirt man p aus

$$\varphi = 0, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial p} = 0,$$

so ergiebt sich

$$f(x, y, z) = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 1)$$

Eliminirt man dieselbe Grösse aus

$$\frac{\partial \varphi}{\partial p} = 0, \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial p^2} = 0,$$

so ergiebt sich

$$F(x, y, z) = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 2)$$

Sodann stellen die Gleichungen 1) und 2) eine Raumcurve dar, die den geometrischen Ort der Schnittpunkte zweier auf einander folgender Charakteristiken darstellt und Rückkehrkante (arête de rebroussement) genannt wird.

Vergl. Monge: Application de l'analyse à la géometrie, V. Ed., p. 29 — 34. Allgemeines wie bei den einhüllenden Curven.

VII. Kegelflächen.

Sei α ein veränderlicher Parameter, so wird:

$$x = f(\alpha) z + \varphi(\alpha)$$
$$y = \psi(\alpha) z + \chi(\alpha)$$

die allgemeine Gleichung der Kegelflächen. Eliminirt man α so folgt

$$F(x, y, z) = 0.$$

Es können zwei Fälle eintreten, entweder schneiden sich zwei auf einander folgende Gerade in einem Punkte, oder sie schneiden sich nicht.

Im ersteren Falle nennt man die Flächen abwickelbar, im letzteren windschief.

Soll die Fläche abwickelbar sein, so muss

$$f'(\alpha)\chi'(\alpha) - \varphi'(\alpha)\psi'(\alpha) = 0$$

sein. Für diese Flächen wird

$$rt - s^2 = 0,$$

und folglich ist jeder Punkt dieser Fläche ein parabolischer Punkt.

§. 171.

Transformationsgleichungen.

Sei

$$x = r \sin\theta \cos\psi$$
$$y = r \sin\theta \sin\psi$$
$$z = r \cos\theta,$$

so wird:

1) $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad \cos\theta = \frac{z}{r}, \quad tgn\,\psi = \frac{y}{x}$

2) $dr = \frac{x}{r} dx + \frac{y}{r} dy + \frac{z}{r} dz$

$$d\theta = \frac{\cos\theta \cos\psi}{r} dx + \frac{\cos\theta \sin\psi}{r} dy - \frac{\sin\theta}{r} dz$$

$$d\psi = \frac{\cos^2\psi}{x^2}(x\,dy - y\,dx) = -\frac{1}{r}\frac{\sin\psi}{\sin\theta} dx + \frac{1}{r}\frac{\cos\psi}{\sin\theta} dy$$

$$3)\quad \begin{aligned} dx &= \sin\theta\cos\psi\,dr + r\cos\theta\cos\psi\,d\theta - r\sin\theta\sin\psi\,d\psi \\ dy &= \sin\theta\sin\psi\,dr + r\cos\theta\sin\psi\,d\theta + r\sin\theta\cos\psi\,d\psi \\ dz &= \cos\theta\,dr - r\sin\theta\,d\theta \end{aligned}$$

$$4)\quad dx^2 + dy^2 + dz^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta\, d\psi^2$$

Sei

$$\theta + \vartheta = \frac{\pi}{2},$$

so wird

$$5)\quad \begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} = &\frac{d^2r}{dt^2}\cos\vartheta\cos\psi - 2\frac{dr}{dt}\cdot\frac{d\psi}{dt}\cos\vartheta\sin\psi \\ &- 2\frac{dr}{dt}\cdot\frac{d\vartheta}{dt}\sin\vartheta\cos\psi + 2\frac{d\psi}{dt}\cdot\frac{d\vartheta}{dt}r\sin\vartheta\sin\psi \\ &- \frac{d^2\psi}{dt^2}r\cos\vartheta\sin\psi - r\cos\vartheta\cos\psi\left\{\left(\frac{d\psi}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2\right\} \\ &- \frac{d^2\vartheta}{dt^2}r\sin\vartheta\cos\psi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2y}{dt^2} = &\frac{d^2r}{dt^2}\cos\vartheta\sin\psi + 2\frac{dr}{dt}\cdot\frac{d\psi}{dt}\cos\vartheta\cos\psi \\ &- 2\frac{dr}{dt}\frac{d\vartheta}{dt}\sin\vartheta\sin\psi - 2\frac{d\psi}{dt}\cdot\frac{d\vartheta}{dt}r\sin\vartheta\cos\psi \\ &+ \frac{d^2\psi}{dt^2}r\cos\vartheta\cos\psi - r\cos\vartheta\sin\psi\left\{\left(\frac{d\psi}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2\right\} \\ &- \frac{d^2\vartheta}{dt^2}r\sin\vartheta\sin\psi \end{aligned}$$

$$\frac{d^2z}{dt^2} = \frac{d^2r}{dt^2}\cos\vartheta + 2\frac{dr}{dt}\cdot\frac{d\vartheta}{dt}\cos\vartheta - \left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2 r\sin\vartheta + \frac{d^2\vartheta}{dt^2}r\cos\vartheta$$

$$6)\quad \begin{aligned} &\frac{d^2r}{dt^2} - r\cos^2\vartheta\left(\frac{d\psi}{dt}\right)^2 - r\left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2 = \frac{d^2x}{dt^2}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{d^2y}{dt^2}\frac{\partial y}{\partial r} + \frac{d^2z}{dt^2}\frac{\partial z}{\partial r} \\ &\frac{d}{dt}\left\{r^2\cos^2\vartheta\frac{d\psi}{dt}\right\} = \frac{d^2x}{dt^2}\frac{\partial x}{\partial\psi} + \frac{d^2y}{dt^2}\frac{\partial y}{\partial\psi} + \frac{d^2z}{dt^2}\frac{\partial z}{\partial\psi} \\ &\frac{d}{dt}\left\{r^2\frac{d\vartheta}{dt}\right\} + r^2\cos\vartheta\sin\vartheta\left(\frac{d\psi}{dt}\right)^2 = \frac{d^2x}{dt^2}\frac{\partial x}{\partial\vartheta} + \frac{d^2y}{dt^2}\frac{\partial y}{\partial\vartheta} \\ &\qquad + \frac{d^2z}{dt^2}\frac{\partial z}{\partial\vartheta}. \end{aligned}$$

Sei u eine Function von r, θ und ψ. Sodann wird:

$$7)\quad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial r}\sin\theta\cos\psi + \frac{\partial u}{\partial r}\frac{\cos\theta\cos\psi}{r} - \frac{\partial u}{\partial\psi}\frac{\sin\psi}{r\sin\theta}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial r} \sin\theta \sin\psi + \frac{\partial u}{\partial r} \frac{\cos\theta \sin\psi}{r} + \frac{\partial u}{\partial \psi} \frac{\cos\psi}{r \sin\theta}$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial u}{\partial r} \cos\theta - \frac{\partial u}{\partial \theta} \frac{\sin\theta}{r}$$

$$8)\quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} \sin^2\theta \cos^2\psi + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial r \partial \theta} \frac{\sin\theta \cos\theta \cos^2\psi}{r}$$
$$- 2 \frac{\partial^2 u}{\partial r \partial \psi} \frac{\sin\psi \cos\psi}{r} + \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} \frac{\cos^2\theta \cos^2\psi}{r^2}$$
$$- 2 \frac{\partial^2 u}{\partial \theta \partial \psi} \frac{\cos\theta \sin\psi \cos\psi}{r^2 \sin\theta} + \frac{\partial^2 u}{\partial \psi^2} \frac{\sin^2\psi}{r^2 \sin^2\theta}$$
$$+ \frac{\partial u}{\partial r} \frac{\cos^2\theta \cos^2\psi + \sin^2\psi}{r}$$
$$+ \frac{\partial u}{\partial \theta} \frac{(\sin^2\psi - 2 \sin^2\theta \cos^2\psi) \cos\theta}{r^2 \sin\theta} + 2 \frac{\partial u}{\partial \psi} \frac{\sin\psi \cos\psi}{r^2 \sin^2\theta}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} \sin^2\theta \sin\psi \cos\psi + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial r \partial \theta} \frac{\sin\theta \cos\theta \sin\psi \cos\psi}{r}$$
$$+ \frac{\partial^2 u}{\partial r \partial \psi} \frac{\cos^2\psi - \sin^2\psi}{r} + \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} \frac{\cos^2\theta \sin\psi \cos\psi}{r^2}$$
$$+ \frac{\partial^2 u}{\partial \theta \partial \psi} \frac{(\cos^2\psi - \sin^2\psi) \cos\theta}{r^2 \sin\theta} - \frac{\partial^2 u}{\partial \psi^2} \frac{\sin\psi \cos\psi}{r^2 \sin^2\theta}$$
$$- \frac{\partial u}{\partial r} \frac{\sin^2\theta \sin\psi \cos\psi}{r}$$
$$- \frac{\partial u}{\partial \theta} \frac{(1 + 2 \sin^2\theta) \cos\theta \sin\psi \cos\psi}{r^2 \sin\theta} - \frac{\partial u}{\partial \psi} \frac{\cos^2\psi - \sin^2\psi}{r^2 \sin^2\theta}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} \sin\theta \cos\theta \cos\psi + \frac{\partial^2 u}{\partial r \partial \theta} \frac{(\cos^2\theta - \sin^2\theta) \cos\psi}{r}$$
$$- \frac{\partial^2 u}{\partial r \partial \psi} \frac{\cos\theta \sin\psi}{r \sin\theta} - \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} \frac{\sin\theta \cos\theta \cos\psi}{r^2}$$
$$+ \frac{\partial^2 u}{\partial \theta \partial \psi} \frac{\sin\psi}{r^2} - \frac{\partial u}{\partial r} \frac{\sin\theta \cos\theta \cos\psi}{r}$$
$$- \frac{\partial u}{\partial \theta} \frac{(\cos^2\theta - \sin^2\theta) \cos\psi}{r^2}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} \sin^2\theta \sin^2\psi + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial r \partial \theta} \frac{\sin\theta \cos\theta \sin^2\psi}{r}$$
$$+ 2 \frac{\partial^2 u}{\partial r \partial \psi} \frac{\sin\psi \cos\psi}{r} + \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} \frac{\cos^2\theta \sin^2\psi}{r^2}$$

$$+ 2\frac{\partial^2 u}{\partial\theta\partial\psi}\frac{\cos\theta\sin\psi\cos\psi}{r^2\sin\theta} + \frac{\partial^2 u}{\partial\psi^2}\frac{\cos^2\psi}{r^2\sin^2\theta}$$

$$+ \frac{\partial u}{\partial r}\frac{\cos^2\theta\sin^2\psi + \cos^2\psi}{r}$$

$$+ \frac{\partial u}{\partial\theta}\frac{(\cos^2\psi - 2\sin^2\theta\sin^2\psi)\cos\theta}{r^2\sin\theta} - 2\frac{\partial u}{\partial\psi}\frac{\sin\psi\cos\psi}{r^2\sin^2\theta}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial z} = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2}\sin\theta\cos\theta\sin\psi + \frac{\partial^2 u}{\partial r\,\partial\theta}\frac{(\cos^2\theta - \sin^2\theta)\sin\psi}{r}$$

$$+ \frac{\partial^2 u}{\partial r\partial\psi}\frac{\cos\theta\cos\psi}{r\sin\theta} - \frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2}\frac{\sin\theta\cos\theta\sin\psi}{r^2}$$

$$- \frac{\partial^2 u}{\partial\theta\partial\psi}\frac{\cos\psi}{r^2} - \frac{\partial u}{\partial r}\frac{\sin\theta\cos\theta\sin\psi}{r}$$

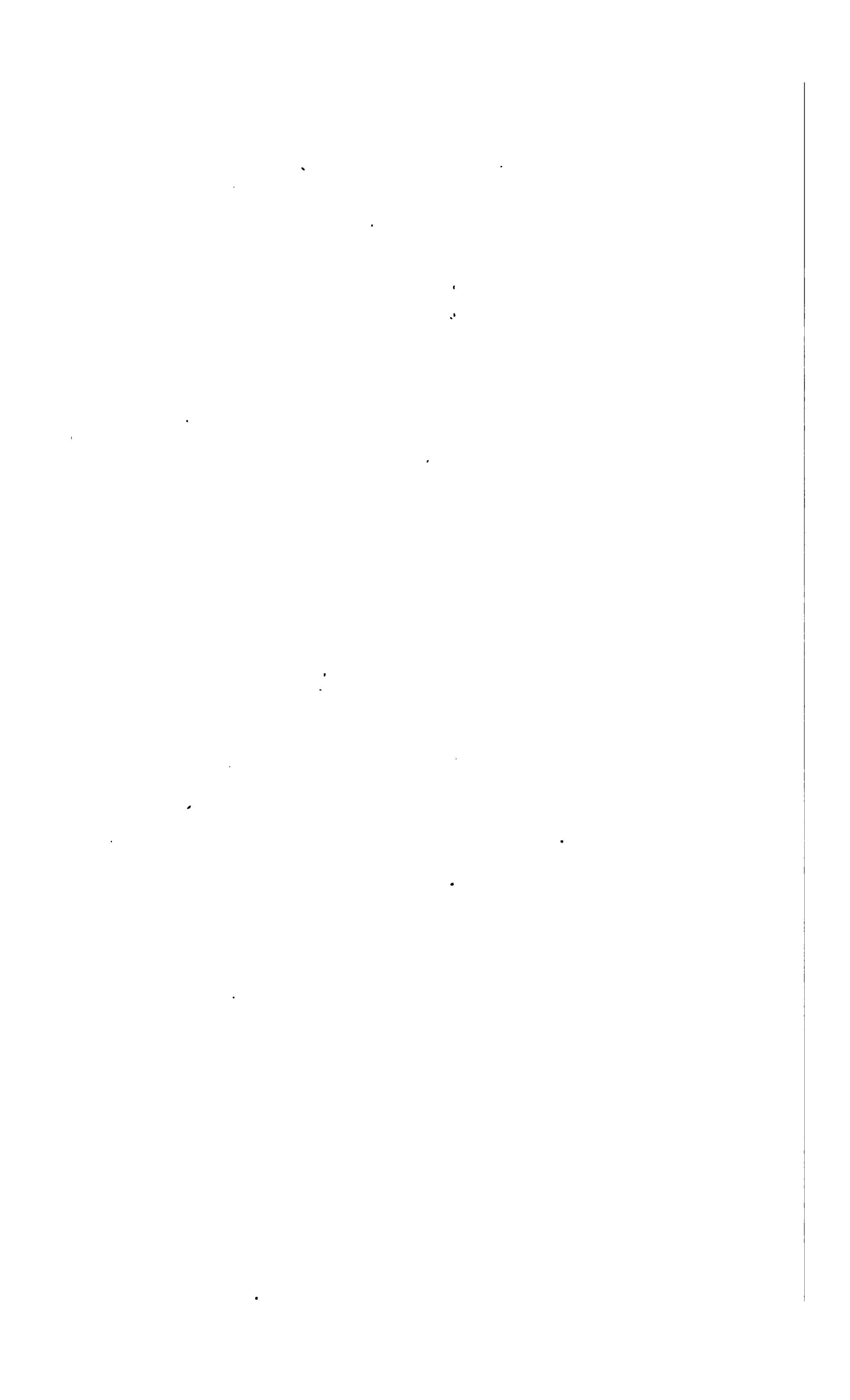
$$- \frac{\partial u}{\partial\theta}\frac{(\cos^2\theta - \sin^2\theta)\sin\psi}{r^2}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2}\cos^2\theta - 2\frac{\partial^2 u}{\partial r\partial\theta}\frac{\sin\theta\cos\theta}{r} + \frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2}\frac{\sin^2\theta}{r^2}$$

$$+ \frac{\partial u}{\partial r}\frac{\sin^2\theta}{r} + 2\frac{\partial u}{\partial\theta}\frac{\sin\theta\cos\theta}{r^2}$$

9) $$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\sin\theta\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right)$$

$$+ \frac{\partial}{\partial\psi}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial u}{\partial\psi}\right).$$



Angewandte Mathematik.

§. 172.

Die Maasssysteme.

A. Allgemeines.

Die physikalischen Messungen beziehen sich entweder auf eine Länge (L) oder eine Masse (M) oder endlich auf die Zeit (T).

Das Resultat der Messung hängt nicht nur von den gewählten Maasseinheiten, sondern auch von vielen anderen Umständen ab, insbesondere aber von der Veränderlichkeit der Instrumente. Unveränderliche Instrumente giebt es nicht. Gauss führte das sogenannte absolute Maass ein, indem er sich durch passende Combination der Beobachtungen von der Veränderlichkeit der Instrumente frei machte.

In der Natur giebt es mehrere absolute Einheiten. Die wichtigsten sind:

I. Die Wellenlänge einer bestimmten Stelle im Sonnenspectrum {ist jedoch nicht auf 0,000025 mm sicher}. Vergl. Everett, phys. Einheiten, S. 48.

II. Die Gauss'sche Constante der Gravitation.

III. Das Weber'sche c in der Elektricitätslehre. [Diese beiden Grössen sind jedoch nur den Sachverständigen bekannt.]

IV. Die Länge des Secundenpendels für einen bestimmten Ort {ist von der Veränderlichkeit der Schwerkraft abhängig}.

Maxwell stellt die drei Grössen L, M, T mit Exponenten versehen in eine Klammer und nennt den Ausdruck

$$[L^x M^y T^z]$$

eine Dimension. Man kann oft mit Hilfe dieser Dimension physikalische Formeln ableiten. Beispiele:

1) Angenommen, wir wissen, dass die Schwingungsdauer eines Pendels τ {deren Dimension $[T]$ ist} abhänge nur von der Länge l {mit der Dimension $[L]$} und der Beschleunigung g {von der Dimension $[L T^{-2}]$}, so wird, die Masse $= 1$ genommen,

$$(\tau) = (l^x g^y).$$

Nun ist

$$(\tau) = [T] = (l^x g^y) = [L^x L^y T^{-2y}],$$

also

$$[T] = [L^{x+y} T^{-2y}],$$

woraus

$$-2y = 1$$
$$x + y = 0,$$

also

$$x = \frac{1}{2},\ y = -\frac{1}{2}$$

folgt, wir haben daher:

$$(\tau) = \left(c^{\frac{1}{2}} g^{-\frac{1}{2}}\right)$$

oder

$$\tau = \sqrt{\frac{l}{g}}$$

die gewöhnliche Formel.

2) Würde die Schwingungsdauer einer Saite τ von der Länge a, der Masse m, und der Spannung t abhängen, so hätte man

$$(\tau) = (a^z m^y t^x)$$

und zur Bestimmung von x, y, z die Werthe

$$[T] = [M^{x+y} L^{x+z} T^{-2x}],$$

woraus sich

$$x = -\frac{1}{2},\ y = +\frac{1}{2},\ z = +\frac{1}{2}$$

ergiebt, man hat also

$$\tau = \sqrt{\frac{am}{t}}.$$

In allen Fällen können noch numerische Constanten hinzutreten, deren Dimension jene einer Zahl, d. h. Null ist.

Bei derartigen Bestimmungen ist es aber wichtig, alle Grössen aufzuzählen, von denen die eine abhängt.

Es ist die Dimension

des Weges gleich $[L]$
der Fläche „ $[L^2]$
des Raumes „ $[L^3]$.

Der Winkel als Kreisbogen getheilt durch den Halbmesser hat die Dimension Null, d. h. er ist unabhängig von den gewählten Grundeinheiten. Dasselbe gilt von jeder Constante.

B. Mechanische Maasse.

Geschwindigkeit = Weg: Zeit, $[L T^{-1}]$
Beschleunigung = Geschwindigkeit: Zeit, $[L T^{-2}]$
Kraft = Masse × Beschleunigung, $[M L T^{-2}]$
Arbeit = Kraft × Weg, $[M L^2 T^{-2}]$
Bewegungsgrösse = Masse × Geschwindigkeit, $[M L T^{-1}]$
Antrieb = Kraft × Zeit, $[M L T^{-1}]$
Lebendige Kraft oder Energie = Masse × $\frac{1}{2}$ (Geschwindigkeit)², $[M L^2 T^{-2}]$
Drehungsmoment = Kraft × Länge, $[M L^2 T^{-2}]$
Trägheitsmoment = Masse × [Länge]², $[M L^2]$
Statisches Moment = Kraft × Länge, $[M L^2 T^{-2}]$
Elasticitätsmodul = (Gewicht × Länge): (Querschnitt × Verlängerung), $[M L^{-1} T^{-2}]$
Torsionscoefficient = (Länge × Radius × Kraft): (Winkel × [Halbmesser]⁴), $[M L^{-1} T^{-2}]$
Druck = Kraft, $[M L T^{-2}]$.

C. Magnetische und elektrische Maasse.

In der Elektricität haben wir zwei Systeme von Einheiten.

I. Das elektrostatische Maasssystem, gegründet auf die Kraft, welche zwischen zwei Elektricitätsmengen wirkt.

II. Das elektromagnetische Maasssystem, gegründet auf die Kraft, welche zwischen zwei Magnetpolen thätig ist.

Der Quotient der elektrostatischen Einheit in die elektromagnetische ist immer eine Potenz einer Geschwindigkeit, deren Werth nach Weber

$$= 310740 \frac{\text{Kilom.}}{\text{Sec.}},$$

also nahezu gleich der Lichtgeschwindigkeit im leeren Raume. Diese Grösse ist das früher genannte Weber'sche c.

I. Statisches Maass.

Elektricitätsmenge, $\left[L^{\frac{3}{2}} M^{\frac{1}{2}} T^{-1}\right]$.

Die elektrostatische Einheit der Elektricität ist jene Elektricitätsmenge, welche eine gleichnamige Menge in der Einheit der Entfernung mit der Einheit der Kraft abstösst.

Elektrische Dichtigkeit { Elektricitätsmenge: Raum, $\left[L^{-\frac{3}{2}} M^{\frac{1}{2}} T^{-1}\right]$
" Fläche, $\left[L^{-\frac{1}{2}} M^{\frac{1}{2}} T^{-1}\right]$.

Das Potential und die Potentialdifferenz,

$\left[L^{\frac{1}{2}} M^{\frac{1}{2}} T^{-1}\right]$ = Arbeit : Elektricitätsmenge

Elektrische Kraft, $\left[L^{-\frac{1}{2}} M^{\frac{1}{2}} T^{-1}\right]$.

Es ist dies die von gewissen elektrischen Massen ausgehende auf die Einheit der positiven Elektricität wirkende Kraft.

Elektrische Verschiebung, $\left[L^{-\frac{1}{2}} M^{\frac{1}{2}} T^{-1}\right]$.

Ist jene Menge der positiven Elektricität, welche beim Uebergang aus dem indifferenten in den elektrischen Zustand, durch die Einheit der Fläche von der einen Seite der Fläche auf die andere übergeht in der Richtung der wirkenden Kraft. Diese Kraft erzeugt in den Leitern einen Strom, in dielektrischen Medien nur eine Verschiebung.

Elektrische Spannung (Polarisation), $[L^{-1} M T^{-2}]$

Inductionscoefficient (Capacität), $[L]$ = Elektricitätsmenge : Potential

Dielektricitätsconstante = Capacität : Capacität, $[0]$

Stromstärke = Elektricitätsmenge : Zeit, $\left[L^{\frac{3}{2}} M^{\frac{1}{2}} T^{-2}\right]$

Widerstand = Potentialdifferenz : Stromstärke, $\left[L^{-1} T\right]$.

II. Elektromagnetisches Maass.

Menge des Magnetismus, $[L^{\frac{3}{2}} M^{\frac{1}{2}} T^{-1}]$.

Einheit ist diejenige Menge des freien Magnetismus, welche auf gleiche Menge in dem Abstande Eins die Kraft Eins ausübt.

Magnetisches Moment, $[L^{\frac{5}{2}} M^{\frac{1}{2}} T^{-1}]$ = freier Magnetismus $\times$ Länge

Magnetisches Potential, $[L^{\frac{1}{2}} M^{\frac{1}{2}} T^{-1}]$ = Arbeit : Menge des freien Magnetismus

Magnetische Intensität (Stärke des magnetischen Feldes) $[L^{-\frac{1}{2}} M^{\frac{1}{2}} T^{-1}]$.

Einheit der magnetischen Intensität ist dort, wo auf einen zur Kraftrichtung senkrecht stehenden Magnet vom Moment Eins die Einheit des Drehungsmoments ausgeübt wird.

Elektricitätsmenge = Stromstärke $\times$ Zeit, $[L^{\frac{1}{2}} M^{\frac{1}{2}}]$

Stromstärke = Magnetisches Moment : Fläche, $[L^{\frac{1}{2}} M^{\frac{1}{2}} T^{-1}]$.

Die elektromagnetische Einheit der Stromstärke hat jener Strom, welcher die Fläche Eins umfliessend in die Ferne so wirkt, wie ein durch die Mitte der Fläche gehender, zur Stromebene senkrechter Magnet von der Einheit des magnetischen Moments.

Elektrisches Potential (Potentialdifferenz, elektromotorische Kraft) = Arbeit : Elektricitätsmenge, $[L^{\frac{3}{2}} M^{\frac{1}{2}} T^{-2}]$.

Widerstand = Potentialdifferenz : Stromstärke, $[L\, T^{-1}]$

Capacität = Elektricitätsmenge : Potential, $[L^{-1} T^{2}]$

Specifischer Widerstand $[L^{2} T^{-1}]$.

Derjenige Leiter hat die Einheit des specifischen Widerstandes, welcher als Säule von der Länge und dem Querschnitte Eins den Widerstand Eins ergeben würde.

Bemerkung. Die elektrodynamische Einheit (von Ampère eingeführt) ist $\sqrt{2}$ mal grösser als die elektromagnetische, in Bezug auf die Dimensionen sind daher beide Maasssysteme gleichwerthig.

D. Das praktische Maasssystem.

I. Das praktische Maasssystem (Elektrikercongress 1881) basirt auf dem elektromagnetischen. Es beruht auf den Einheiten

Erdquadrant, Masse von 10^{-11} Gramm und Secunde.

II. Gauss und Weber, welche das dynamische System eingeführt haben, wählten als Grundeinheiten

Milligramm, Millimeter und die Secunde.

III. Die Britisch Association wählte auf den Vorschlag von William Thomson

das Gramm, das Centimeter und die Secunde.

Die folgende Tafel giebt das Verhältniss dieser Systeme.

Grössen	Zeichen	Dimension	I.	II.	III.
Länge	L	$[L]$	Erdquadrant	$10^{-10}[L]$ (mm)	10^{-9} [L
Zeit	T	$[T]$	Secunde	$[T]$	$[T]$
Masse	M	$[M]$	10^{-11} g	$10^{8}[M]$ (mg)	[10^{11} M
Capacität	C	$[L^{-1}\ T^{2}]$	Farad	$10^{-10}\ C$	10^{-9} C
Elektricität . . .	E	$\left[L^{\frac{1}{2}} M^{\frac{1}{2}}\right]$	Coulomb	$10\ E$	10^{-1} E
Strom	J	$\left[L^{\frac{1}{2}} M^{\frac{1}{2}} T^{-1}\right]$	Ampère	$10\ J$	10^{-1} J
Widerstand . . .	W	$[L\ T^{-1}]$	Ohm	$10^{10}\ W$	10^{9} W
Elektromotorische Kraft	K	$\left[L^{\frac{3}{2}} M^{\frac{1}{2}} T^{-1}\right]$	Volt	$10^{4}\ K$	10^{8} K
Arbeit	A	$[L^{2}\ M\ T^{-2}]$	Watt	$10^{5}\ A$	10^{7} A

Man merke insbesondere:

1) Ein Coulomb ist jene Elektricitätsmenge, welche durch einen Querschnitt des Leiters in der Secunde fliessend ein Ampère erzeugt.

2) Ist in einem geschlossenen galvanischen Element die elektromotorische Kraft gleich 1 Volt und der Widerstand gleich 1 Ohm, so ist die Stromstärke gleich 1 Ampère, oder

$$1 \text{ Ampère} = \frac{1 \text{ Volt}}{1 \text{ Ohm}} \quad \text{(Ohm's Gesetz).}$$

3) Ein Condensator, der die Capacität von 1 Farad hat, wird durch die Ladung von 1 Coulomb auf das Potential von 1 Volt gehoben.

4) Ein Watt = Ein Ampère × Ein Volt (Joule'sches Gesetz).

Für die Verwandlung beachte man folgende Tafel, die durch die angeführten Beispiele sofort verständlich wird.

Bei der Verwandlung		auf					
		I.		II.		III.	
von	I.	10^0	10^0	10^{-10}	10^{-8}	10^9	10^{-11}
	II.	10^{10}	10^8	10^0	10^0	10^1	10^{-8}
	III.	10^{-9}	10^{11}	10^{-1}	10^3	10^0	10^0
ist zu multipliciren		L	M	L	M	L	M

Beispiel. Bei der Verwandlung von II. auf III. hat man die Länge (L) zu multipliciren mit 10^1, und die Masse (M) mit 10^{-8}, so dass z. B.

$$[L^x M^y] \text{ im System II. gleich wird:}$$

$$10^{x-8y} [L^x M^y] \text{ im System III.}$$

Die Zeiteinheit ist in allen Systemen dieselbe.

Fernere Beispiele. Nehmen wir an, wir hätten in III. für die Kraft (mit der Dimension: $[L M T^{-2}]$) die Zahl 1 erhalten, so erhalten wir in I.

$$10^{-9} \times 10^{11} = 100.$$

Umgekehrt hätten wir in I. für die Arbeit (mit der Dimension $[L^2 M T^{-2}]$) die Zahl 10^{-7} erhalten, so erhalten wir in III.

$$10^{-7} \times 10^{9 \cdot 2} \times 10^{-11} = 10^{-7+18-11} = 1.$$

Unter einer Siemens-Einheit versteht man den Widerstand einer Quecksilbersäule von 1 m Länge und 1 qmm Querschnitt.

Jacobi's Einheit entspricht der Stärke des Stromes, welcher beim Durchgang durch das Wasser in einer Minute 1 ccm Knallgas liefert.

Die Stromstärke 1 Ampère = 0,1 [cm, g] = 10 [mm, mg] zersetzt in einer Secunde 0,0933 mg Wasser.

Die Literatur findet man ziemlich vollständig in: Everett's Physikalischen Einheiten und Constanten. Leipzig 1888.

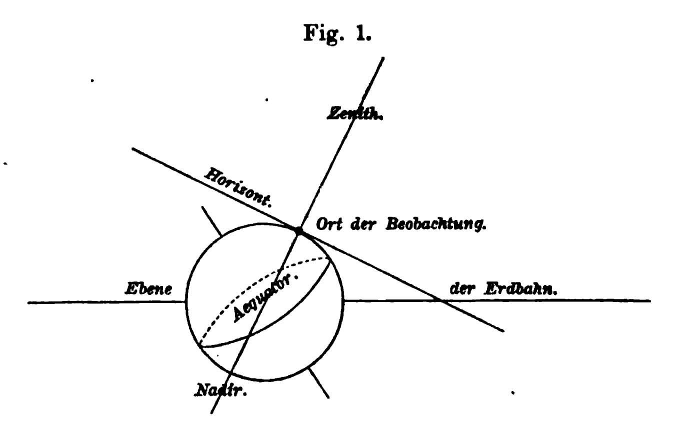
§. 173.

Sphärische Astronomie.

Die Erde bewegt sich um die Sonne in einer Ellipse und dreht sich um eine Axe, die gegen die Ebene dieser Ellipse (Ekliptik) geneigt ist. Demzufolge erhalten wir zur Fixirung der Objecte ein dreifaches Coordinatensystem.

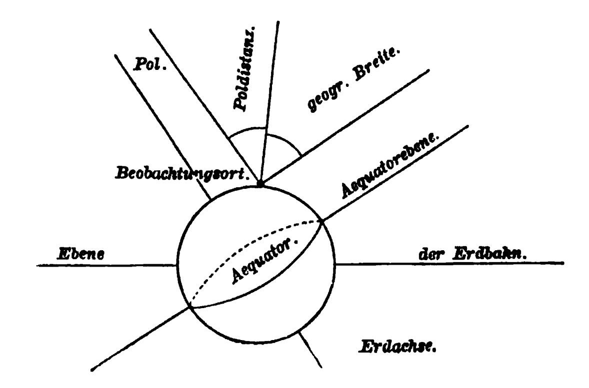
Die Fundamentalebene des ersten ist der Horizont des Beobachtungsortes, sein Culminationspunkt das Zenith. (Fig. 1.)

Fig. 1.



Die Fundamentalebene des zweiten ist die Ebene des Aequators und sein Culminationspunkt der Pol, d. h. der Schnitt-

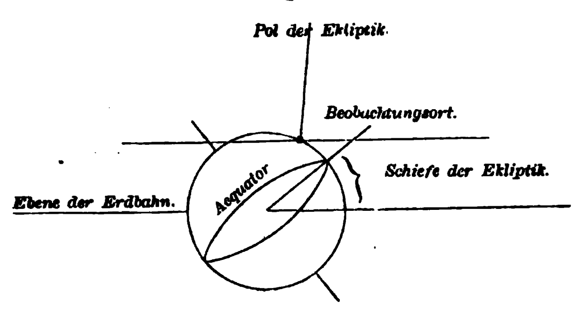
Fig. 2.



punkt der scheinbaren Himmelskugel mit der Verlängerung der Rotationsaxe der Erde. (Fig. 2.)

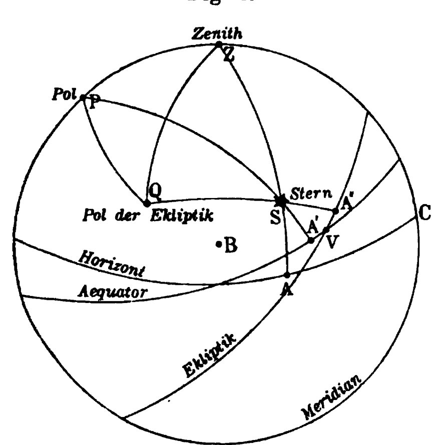
Das dritte Coordinatensystem hat zur Fundamentalebene die Ebene der Ekliptik, und zum Culminationspunkt den Pol der Ekliptik. (Fig. 3.)

Fig. 3.



Um den Zusammenhang der einzelnen Coordinatensysteme zu übersehen, haben wir sie auf der Fig. 4 vom Beobachtungsorte *B* aus auf die scheinbare Himmelskugel projicirt. Die Ortsbestimmung eines Himmelsobjectes geschieht durch eine horizontale und eine verticale Componente.

Fig. 4.



Die horizontale Componente des Systems I. wird das Azimuth (a) genannt und vom Südpunkte des Horizontes aus über den Westpunkt gerechnet. Versteht man unter Meridian jenen grössten Kreis, der durch den Pol und das Zenith geht, so kann man sagen, das Azimuth wird vom Südpunkte des Meridians aus über West gerechnet. In der Figur ist $a = A\,C$. Die verticale Componente wird die Höhe (h) genannt und vom Horizont aus gegen das Zenith gerechnet. In der Figur ist $h = A\,S$. Statt der Höhe wird manchmal die Zenithdistanz (z)

gebraucht, es ist dies der Bogen zwischen dem Stern und den Zenith. Wir haben also die Beziehung:

$$z + h = 90^0.$$

Bevor wir zu den übrigen Systemen übergehen, müssen wir noch einige Begriffe erläutern. Wie aus der Figur ersichtlich ist, durchschneidet die Ebene der Ekliptik den Aequator in zwei Punkten. Diese werden die Aequinoctialpunkte genannt. In dem einen befindet sich die Sonne am 21. März, dieser wird der Frühlingspunkt (V) genannt und mit dem Zeichen des Sternbildes Widder ♈ bezeichnet, in dem anderen befindet sie sich am 23 September.

Dieses vorausgesetzt, wollen wir die Coordinaten des zweiten Systems einführen. Sie sind die Rectascension oder gerade Aufsteigung (α) als Horizontalcomponente, und die Declination (δ) als Verticalcomponente. Die Rectascension wird vom Frühlingspunkt, und zwar von W. nach O. gerechnet. In der Figur ist $\alpha = 360^0 - VA'$, $\delta = A'S$.

Die Coordinaten des III. Systems sind endlich die Länge (λ) mit gleicher Zählung wie Rectascension und die Breite (β). In der Figur ist $\lambda = VA''$, $\beta = A''S$.

Die Coordinaten des Systems I. ändern sich in Folge der Erdbewegung beständig, ihre Messung ist aber die bequemste. Sie sind in demselben Augenblicke für verschiedene Orte der Erde verschieden.

Die Coordinaten des Systems II. sind für jeden Stern fast constant, weil der Pol und die Ebene des Aequators nahezu unveränderlich sind.

Zu den Coordinatensystemen fügen wir noch folgende Bemerkungen bei. (Fig. 5.)

Den Bogen zwischen dem Declinationskreise des Sterns und dem Meridian nennt man den Stundenwinkel (t). Er wird gezählt im Sinne der täglichen Bewegung, d. h. von O. nach W. vom Meridian angefangen. Der Stundenwinkel ist veränderlich. Den Stundenwinkel des Frühlingspunktes nennen wir die Sternzeit (θ). Wir haben also die Beziehung:

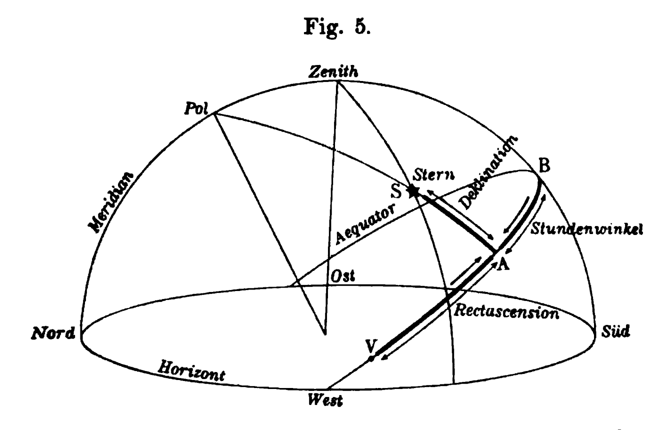
$$\theta = \alpha + t.$$

Wird $t = 0$, so wird

$$\alpha = \theta.$$

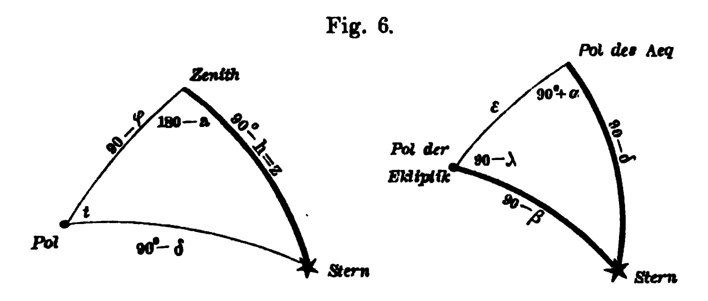
Das Gestirn befindet sich im Meridian, wir sagen es culminirt. Kennt man also α eines bestimmten Sterns, welcher im Augenblicke im Meridian ist, so hat man auch die Sternzeit des Augenblickes.

Fig. 5.



Um die gegebenen Coordinaten in andere zu verwandeln, hat man folgende zwei Fundamentaldreiecke zu betrachten.

Fig. 6.



Dabei ist ε Schiefe der Ekliptik und φ die geographische Breite des Ortes. Die Verwandlung selbst ist eine Aufgabe der sphärischen Trigonometrie. Die Entstehung der beiden Dreiecke mögen die Figuren 7 und 8 (a. f. S.) versinnlichen.

Durch die Anwendung der Fundamentalformeln der sphärischen Trigonometrie ergiebt sich:

$$\text{I.}\quad \sin\beta = \sin\delta\cos\varepsilon - \cos\delta\sin\varepsilon\sin\alpha$$
$$\cos\beta\sin\lambda = \sin\delta\sin\varepsilon + \cos\delta\cos\varepsilon\sin\alpha$$
$$\cos\beta\cos\lambda = \cos\delta\cos\alpha.$$

$$\text{II.}\quad \sin\delta = \sin\beta\cos\varepsilon + \cos\beta\sin\varepsilon\sin\lambda$$
$$\cos\delta\sin\alpha = \cos\beta\sin\varepsilon\sin\lambda - \sin\beta\sin\varepsilon$$
$$\cos\delta\cos\alpha = \cos\beta\cos\lambda.$$

Fig. 7.

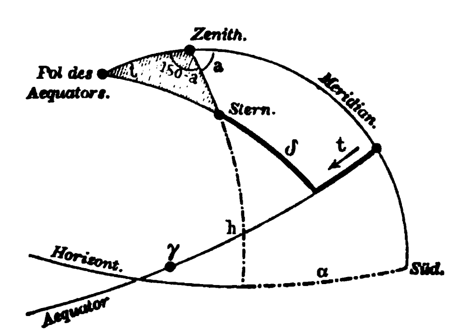
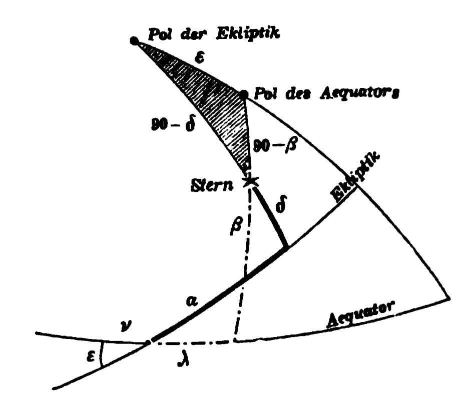


Fig. 8.



Um diese Formeln für trigonometrische Berechnung bequemer zu gestalten, setzen wir das eine Mal

$$x\sin\varphi = \cos\delta\sin\alpha,\quad x\cos\varphi = \sin\delta,$$

also

$$tg\,\varphi = cotg\,\delta\sin\alpha,$$

das zweite Mal

$$x\cos\varphi = \sin\beta,\quad x\sin\varphi = \cos\beta\sin\lambda,$$

demnach

$$tg\,\varphi = cotg\,\beta\sin\lambda,$$

so ergiebt sich:

$$tg\,\lambda = \frac{sin\,(\varphi + \varepsilon)}{sin\,\varphi}\,tg\,\alpha \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 1)$$

$$tg\,\beta = cotg\,(\varphi + \varepsilon)\,sin\,\lambda \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 2)$$

$$tg\,\alpha = \frac{sin\,(\varphi - \varepsilon)}{sin\,\varphi}\,tg\,\lambda \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 3)$$

$$tg\,\delta = cotg\,(\varphi - \varepsilon)\,sin\,\alpha \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 4)$$

Diese Formeln drücken $(\alpha\,\delta)$ durch $(\beta\,\lambda)$ und umgekehrt aus.

Die Betrachtung des zweiten Fundamentaldreieckes liefert die Formeln:

$$\text{III.} \quad sin\,\delta = sin\,\varphi\,sin\,h - cos\,\varphi\,cos\,h\,cos\,a$$
$$cos\,\delta\,sin\,t = cos\,h\,sin\,a$$
$$cos\,\delta\,cos\,t = sin\,h\,cos\,\varphi + cos\,h\,sin\,\varphi\,cos\,a$$

und

$$\text{IV.} \quad sin\,h = sin\,\varphi\,sin\,\delta + cos\,\varphi\,cos\,\delta\,cos\,t$$
$$cos\,h\,sin\,a = cos\,\delta\,sin\,t$$
$$cos\,h\,cos\,a = -\,cos\,\varphi\,sin\,\delta + sin\,\varphi\,cos\,\delta\,cos\,t.$$

Wir setzen analog wie früher

$$\varkappa\,cos\,\psi = sin\,h, \quad \varkappa\,sin\,\psi = cos\,h\,cos\,a,$$

also

$$tg\,\psi = cotg\,h\,cos\,a$$

und

$$\varkappa\,cos\,\psi = cos\,\delta\,cos\,t, \quad \varkappa\,sin\,\psi = sin\,\delta$$
$$tg\,\psi = tgn\,\delta\,cos\,t$$

und erhalten:

$$tg\,t = \frac{sin\,a\,cos\,h}{\varkappa\,cos\,(\varphi - \psi)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 5)$$

$$sin\,\delta = \varkappa\,cos\,(\varphi - \psi) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 6)$$

$$tg\,a = \frac{cos\,\psi\,tg\,t}{sin\,(\varphi - \psi)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 7)$$

$$tg\,h = \frac{cos\,a}{tgn\,(\varphi - \psi)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 8)$$

Mit Hülfe dieser Gleichungen sind wir im Stande, mehrere Aufgaben zu lösen.

I. Es soll der Auf- und Untergang eines bestimmten Sterns für einen Ort, dessen geographische Breite φ ist, bestimmt werden.

Für diesen Fall ist offenbar $h = 0$, also in IV.

$$\sin h = 0 = \sin \varphi \sin \delta + \cos \varphi \cos \delta \cos t_0,$$

und daraus

$$\cos t_0 = - tg\,\varphi \,.\, tg\,\delta \quad \ldots \ldots \quad 9)$$

t_0 ist der Stundenwinkel des Auf- und Unterganges des Gestirnes oder der halbe Tagesbogen. Kennt man die Rectascension α des Sternes, d. h. die Sternzeit, zu welcher der Stern durch den Meridian geht, so kann man die Sternzeit des Auf- oder Unterganges ausdrücken durch

$$\alpha \pm t_0.$$

Aus der obigen Gleichung folgt:

$$1 - \cos t_0 = 1 + tg\,\varphi \,.\, tg\,\delta$$
$$1 + \cos t_0 = 1 - tg\,\varphi \,.\, tg\,\delta,$$

daraus folgt:

$$tg^2 \frac{t_0}{2} = \frac{\cos(\varphi - \delta)}{\cos(\varphi + \delta)} \quad \ldots \ldots \quad 10)$$

Die Gleichungen 9) und 10) erklären alle Erscheinungen des Auf- und Unterganges.

Die Gleichung 9) ist nur möglich, wenn

$$tg\,\varphi\; tg\,\delta \leqq 1,$$

d. h.

$$\varphi + \delta \leqq 90^0$$

ist, also

$$\delta > 90^0 - \varphi,$$

so geht das Gestirn nie unter, für

$$\delta = 90^0 - \varphi$$

berührt es den Horizont.

Um den Ort zu finden, wo ein Stern auf- oder untergeht, braucht man bloss in der Gleichung

$$\sin \delta = \sin \varphi \sin h - \cos \varphi \cos h \cos a$$

$h = 0$ zu setzen, so wird

$$\cos a_0 = - \sin \delta \sec \varphi.$$

Der negative Werth von a_0 ist das Azimuth des Aufganges, der positive jenes des Unterganges.

Lehrbücher der sphärischen Astronomie sind: Brünnow, Lehrbuch der sphärischen Astronomie, Berlin (4. Aufl. 1881). Herr, Lehrbuch der sphärischen Astronomie, Wien (1887); ferner: Sawitsch, Abriss der praktischen Astronomie, übersetzt

von Peters (1879). Souchon, Traité d'astronomie pratique, Paris 1883. Von den älteren bleibt noch recht brauchbar: Littrow, Theoretische und praktische Astronomie, Wien 1821, 3 Bde.

In Bezug auf die Coordinatensysteme sind jedoch folgende Bemerkungen zu machen:

I. Die Fundamentalebenen, auf die wir unsere Coordinaten gegründet haben, ändern sich ebenfalls mit der Zeit. Die grösste diesbezügliche Veränderung führt den Namen der Präcession. Diese wird durch die folgende Rechnung berücksichtigt.

Sei α_0 und δ_0 die Rectascension beziehungsweise die Declination eines Sternes im Jahre 1750,

$$\alpha = \alpha_0 + \frac{d\alpha}{dt}, \quad \delta = \delta_0 + \frac{d\delta}{dt}$$

jene zur Zeit $1750 + t$, so wird

$$\frac{d\alpha}{dt} = m + n\, tg\, \delta\, sin\, \alpha$$

$$\frac{d\delta}{dt} = n\, cos\, \alpha,$$

wobei

$$m = 46''02824 + 0''0003086450\, t$$
$$n = 20''06442 - 0''0000970204\, t.$$

Diese Formeln gelten jedoch nur so lange, so lange der Stern nicht in der Nähe des Poles sich befindet. Ist dieses der Fall, so rechne man:

$$tg\, \frac{1}{2}(z' + z) = cos\, \frac{1}{2}(\varepsilon_0' + \varepsilon_0)\, tg\, \frac{1}{2}(l_1' - l_1)$$

$$\frac{1}{2}(z' - z) = \frac{1}{2}(\varepsilon_0' - \varepsilon_0)\, \frac{cotg\, \frac{1}{2}(l_1' - l_1)}{sin\, \frac{1}{2}(\varepsilon_0' + \varepsilon_0)}$$

$$tg\, \frac{1}{2}\theta = tg\, \frac{1}{2}(\varepsilon_0' + \varepsilon_0)\, sin\, \frac{1}{2}(z' + z)$$

$$A = \alpha + a + z$$
$$A' = \alpha' + a' - z'$$

$$p = sin\, \theta \left[tg\, \delta + tg\, \frac{1}{2}\theta\, cos\, A\right],$$

wodurch man

$$tg\,(A' - A) = \frac{p \sin A}{1 - p \cos A}$$

$$tg\,\frac{1}{2}(\delta' - \delta) = tg\,\frac{1}{2}\,\theta \cdot \frac{\cos\frac{1}{2}(A' + A)}{\cos\frac{1}{2}(A' - A)}$$

findet. Dabei wird α und δ als für $1750 + t$ gegeben betrachtet. α' und δ' sind die Werthe für $1750 + t'$.

Ferner ist für $1750 + t$

$$\varepsilon_0 = 23^0\,28'\,18''0 + t^2\,0'',0000098423$$
$$l_1 = 50''37572\,t - 0''0001217945\,t^2$$
$$a = 0''17926 - 0''0002660393\,t^2.$$

Dieselben Grössen für $1750 + t'$ sind ε_0', l_1', a'.

Ausser dieser nichtperiodischen Aenderung giebt es eine aber ungleich kleinere periodische, die man **Nutation** nennt. Die hierzu gehörigen Formeln sind aber zu complicirt, als dass sie hier mitgetheilt werden könnten. Man findet sie in dem oben citirten Werke von **Oppolzer**.

II. Die astronomischen Tafeln beziehen die Oerter der Gestirne auf den Erdmittelpunkt. Die Beobachtungen geschehen aber auf der Oberfläche. Man versteht nun unter der **Parallaxe** denjenigen Winkel am Gestirne, welcher durch die beiden Gesichtslinien vom Mittelpunkte der Erde und dem Orte auf der Oberfläche nach demselben gebildet wird. Dieser ist für die Fixsterne fast Null. Bei den Angehörigen unseres Sonnensystems muss aber auf die Parallaxe Rücksicht genommen werden. Dies geschieht durch folgende Daten:

Sei a die halbe grosse und b die halbe kleine Axe der Erde (welche als ein Umdrehungsellipsoid betrachtet wird) und

$$a = 6377398\,\text{m}, \quad \log a = 6{,}8046436$$
$$b = 6356080\,\text{m}, \quad \log b = 6{,}8031894 \qquad \text{(Bessel)},$$

ferner ϱ der Erdradius für die Polhöhe φ, so dass, wenn

$$\frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} = m, \quad \frac{a - b}{a + b} = n$$

gesetzt wird,

$$\varrho = \frac{a^2 + b^2}{a + b} \cdot \frac{\sqrt{1 + 2m \cos 2\varphi + m^2}}{\sqrt{1 + 2n \cos 2\varphi + n^2}}$$

oder

$$\log \varrho = 9{,}9992747 + 0{,}0007271 \cos 2\varphi - 0{,}0000018 \cos 4\varphi$$

die verbesserte Polhöhe

$$\varphi' = \varphi - \frac{2n}{1+n^2} \sin 2\varphi + \frac{1}{2}\left(\frac{2n}{1+n^2}\right)^2 \sin 4\varphi - \cdots$$

Dabei ist die Polhöhe φ der Winkel zwischen dem Horizont und der Weltaxe am Beobachtungsort oder der zwischen dem Aequator und der Normale des Beobachtungsortes, φ' dagegen jener zwischen ϱ und dem Aequator. Man findet

$$\varphi' = \varphi - 11' 30'' 65 \sin 2\varphi + 1'' 16 \sin 4\varphi - \cdots$$

Sei die Lage des Beobachtungsortes, bezogen auf den Erdmittelpunkt, gegeben durch

$$x = \varrho \cos\varphi' \cos\theta$$
$$y = \varrho \cos\varphi' \sin\theta$$
$$z = \varrho \sin\varphi',$$

so sind die anzuwendenden genäherten Formeln:

$$\alpha' - \alpha = - \frac{\pi \varrho \cos\varphi'}{\varDelta} \cdot \frac{\sin(\theta - \alpha)}{\cos\delta}$$

$$tg\,\gamma = \frac{tg\,\varphi'}{\cos(\theta - \alpha)}$$

$$\delta' - \delta = - \frac{\pi \varrho \sin\varphi'}{\varDelta} \cdot \frac{\sin(\gamma - \delta)}{\sin\gamma}.$$

π ist die sogenannte Aequatorial-Horizontalparallaxe der Sonne, d. h. der Winkel $8'' 84$; $\varDelta$ ist die Entfernung des Gestirns von der Erde (Halbmesser des Aequators $= 1$ gesetzt). Für den Mond müssen die strengeren Formeln angewendet werden. Man hat

$$tg(\alpha' - \alpha) = \frac{\frac{\varrho \cos\varphi'}{\varDelta \cos\delta} \sin(\alpha - \theta)}{1 - \frac{\varrho \cos\varphi'}{\varDelta \cos\delta} \cos(\alpha - \theta)}$$

$$tg(\delta' - \delta) = - \frac{\frac{\beta \varrho}{\varDelta} \sin(\gamma - \delta)}{1 - \frac{\varrho \beta}{\varDelta} \cos(\gamma - \delta)},$$

wobei

$$\beta \sin\gamma = \sin\varphi'$$

$$\beta \cos\gamma = \cos\varphi' \cdot \frac{\cos\left[\theta - \frac{1}{2}(\alpha' + \alpha)\right]}{\cos\frac{1}{2}(\alpha' - \alpha)}.$$

III. Da die Lichtstrahlen durch den Durchgang durch die Atmosphäre modificirt werden, so muss an die Beobachtungen eine Correction wegen Refraction angebracht werden. Man hat sie empirisch bestimmt. Eine Tafel der mittleren Refraction findet man im Anhange.

IV. Das angebbare Verhältniss der Lichtgeschwindigkeit zur Geschwindigkeit der Erde bedingt ferner eine Correction wegen Aberration.

Man findet für die jährliche Aberration der Fixsterne die Formeln:

$$\alpha' - \alpha = -20''4451 \{\cos \odot \cos \varepsilon \cos \alpha + \sin \odot \sin \alpha\} \sec \delta$$
$$\delta' - \delta = +20''4451 \cos \odot \{\sin \alpha \sin \delta \cos \varepsilon - \cos \delta \sin \varepsilon\}$$
$$- 20''4451 \sin \odot \cos \alpha \sin \delta.$$

Dabei ist $\odot$ die Länge der Sonne von der Erde aus gesehen. und für die tägliche Aberration, wenn φ die Polhöhe bezeichnet:

$$\alpha' - \alpha = 0''3113 \cos \varphi \cos (\theta - \alpha) \sec \delta$$
$$\delta' - \delta = 0''3113 \cos \varphi \sin (\theta - \alpha) \sin \delta.$$

§. 174.

Astromechanik.

Seien x, y, z die Coordinaten des Planeten von der Masse m, und es werde als Anfangspunkt der Schwerpunkt der Sonne, deren Masse $= 1$ angenommen wird, genommen. Bezeichnet man weiter mit r die Entfernung des gestörten, mit r_1 die des störenden Planeten vom Sonnenschwerpunkt, mit H deren heliocentrische Winkelentfernung, und setzt

$$\Omega = \frac{m_1}{1 + m} \left(\frac{1}{\varDelta} - \frac{r}{r_1^2} \cos H \right)$$
$$\varDelta^2 = r^2 + r_1^2 - 2 r r_1 \cos H,$$

so lauten die Differentialgleichungen des Problems

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2 x}{d t^2} + \varkappa^2 (1 + m) \frac{x}{r^3} &= \varkappa^2 (1 + m) \frac{\partial \Omega}{\partial x} = X \\ \frac{d^2 y}{d t^2} + \varkappa^2 (1 + m) \frac{y}{r^3} &= \varkappa^2 (1 + m) \frac{\partial \Omega}{\partial y} = Y \\ \frac{d^2 z}{d t^2} + \varkappa^2 (1 + m) \frac{z}{r^3} &= \varkappa^2 (1 + m) \frac{\partial \Omega}{\partial z} = Z \end{aligned}\right\} \quad . \quad . \quad 1)$$

Setzt man

$$x = r\cos b\cos l$$
$$y = r\cos b\sin l$$
$$z = r\sin b,$$

so folgt

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{d^2 r}{dt^2} - r\cos^2 b\left(\frac{dl}{dt}\right)^2 - r\left(\frac{db}{dt}\right)^2 + \frac{\varkappa^2(1+m)}{r^2} = X\frac{\partial x}{\partial r} + Y\frac{\partial y}{\partial r} + Z\frac{\partial z}{\partial r} \\
&\frac{d}{dt}\left\{r^2\cos^2 b\,\frac{dl}{dt}\right\} = X\frac{\partial x}{\partial l} + Y\frac{\partial y}{\partial l} + Z\frac{\partial z}{\partial l} = xY - yX \\
&\frac{d}{dt}\left\{r^2\frac{db}{dt}\right\} + r^2\cos b\sin b\left(\frac{dl}{dt}\right)^2 = X\frac{\partial x}{\partial b} + Y\frac{\partial y}{\partial b} + Z\frac{\partial z}{\partial b}
\end{aligned}\right\} \quad \text{II)}$$

Dieses ist die Form der Bewegungsgleichungen in Polarcoordinaten. Setzen wir endlich

$$\sin b = \sin i\sin(v - w)$$
$$\cos b\cos(l - \Omega) = \cos(v - w)$$
$$\cos b\sin(l - \Omega) = \cos i\sin(v - w),$$

so wird

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{d^2 r}{dt^2} - r\left(\frac{dv}{dt}\right)^2 + \frac{\varkappa^2(1+m)}{r^2} = X\frac{\partial x}{\partial r} + Y\frac{\partial y}{\partial r} + Z\frac{\partial z}{\partial r} = \varkappa^2(1+m)\frac{\partial \Omega}{\partial r} \\
&\frac{d}{dt}\left\{r^2\frac{dv}{dt}\right\} = X\frac{\partial x}{\partial v} + Y\frac{\partial y}{\partial v} + Z\frac{\partial z}{\partial v} = \varkappa^2(1+m)\frac{\partial \Omega}{\partial v} \\
&r^2\sin i\,\frac{dv}{dt}\cdot\frac{di}{dt} = -r\cos i\left\{X\frac{\partial x}{\partial w} + Y\frac{\partial y}{\partial w} + Z\frac{\partial z}{\partial w}\right\}
\end{aligned}\right\} \quad \text{III a)}$$

Man hat auch

$$\left.\begin{aligned}
&r^2\sin i\,\frac{dv}{dt}\cdot\frac{di}{dt} = -r\left\{X\frac{\partial x}{\partial \Omega} + Y\frac{\partial y}{\partial \Omega} + Z\frac{\partial z}{\partial \Omega}\right\} \\
&\text{oder} \\
&r^2\sin i\,\frac{dv}{dt}\,\frac{d\Omega}{dt} = r\left\{X\frac{\partial x}{\partial i} + Y\frac{\partial y}{\partial i} + Z\frac{\partial z}{\partial i}\right\}
\end{aligned}\right\} \quad \text{III b)}$$

Die erste der Gleichungen II) kann auch geschrieben werden

$$\frac{d^2}{dt^2}\{r\cos b\} - r\cos b\left\{\frac{dl}{dt}\right\}^2 = \frac{\partial Q}{\partial r}\cos b - \frac{1}{r}\frac{\partial Q}{\partial b}\sin b \,. \quad \text{II b)}$$

Dabei ist

$$-\frac{\varkappa^2(1+m)}{r^2} + X\frac{\partial x}{\partial r} + Y\frac{\partial y}{\partial r} + Z\frac{\partial z}{\partial r} = \frac{\partial Q}{\partial r}$$
$$X\frac{\partial x}{\partial b} + Y\frac{\partial y}{\partial b} + Z\frac{\partial z}{\partial b} = \frac{\partial Q}{\partial b}$$
$$X\frac{\partial x}{\partial l} + Y\frac{\partial y}{\partial l} + Z\frac{\partial z}{\partial l} = \frac{\partial Q}{\partial l}.$$

Setzt man nun

$$s = tg\, b, \quad u = \frac{1}{r \cos b},$$

so wird

$$\frac{\partial Q}{\partial r} = - u^2 \cos b \frac{\partial Q}{\partial u}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial b} = u^2 r \sin b \frac{\partial Q}{\partial u} + \frac{1}{\cos^2 b} \frac{\partial Q}{\partial s}.$$

Und man findet, indem man die zweite Gleichung des Systems II) mit $r^2 \cos^2 b\, d l$ multiplicirt und integrirt

$$d t = \frac{d l}{u^2 \sqrt{h^2 + 2 \int \frac{\partial Q}{\partial l} \frac{d l}{u^2}}} \quad . \; . \; . \; . \quad \text{II c)}$$

Die Gleichung II b) liefert

$$\frac{d^2 \frac{1}{u}}{d t^2} - \frac{1}{u} \left(\frac{d l}{d t}\right)^2 = - u^2 \frac{\partial Q}{\partial u} - u s \frac{\partial Q}{\partial s}$$

oder

$$\frac{d}{d t} \left\{u^2 \frac{d u}{d t} \frac{d l}{d t}\right\} + \frac{1}{u} \left(\frac{d l}{d t}\right)^2 = u^2 \left\{\frac{\partial Q}{\partial u} + \frac{s}{u} \frac{\partial Q}{\partial s}\right\}.$$

Ersetzt man $d t$ aus II c) und führt $d l$ an die Stelle von $d t$ ein, so folgt nach einiger Umformung

$$\frac{d^2 u}{d l^2} + u + \frac{\frac{\partial Q}{\partial l} \cdot \frac{1}{u^2} \frac{d u}{d l} - \frac{\partial Q}{\partial u} - \frac{s}{u} \frac{\partial Q}{\partial s}}{h^2 + 2 \int \frac{\partial Q}{\partial l} \cdot \frac{d l}{u^2}} = 0 \quad . \; . \; . \quad \text{II d)}$$

und bei ähnlicher Behandlung der letzten der Gleichungen II)

$$\frac{d^2 s}{d l^2} + s + \frac{\frac{\partial Q}{\partial l} \cdot \frac{d s}{d l} - (1 + s^2) \frac{\partial Q}{\partial s} - u s \frac{\partial Q}{\partial u}}{u^2 \left\{h^2 + 2 \int \frac{\partial Q}{\partial l} \cdot \frac{d l}{u^2}\right\}} = 0 \quad . \quad \text{II e)}$$

wodurch man eine der elegantesten Transformationen unseres Problems gewinnt.

Vergl. Resal: Traité élément de méc. célest. II. Ed., p. 27. Laplace: Mécanique céleste, Tom. I, p. 174 (Ausgabe von 1843).

Hansen hat ein bewegliches Coordinatensystem eingeführt (Auseinandersetzung einer zweckmässigen Methode zur Berechnung der absoluten Störungen der kleinen Planeten I.).

Sei

$$\begin{aligned} x &= \alpha\, \xi + \beta\, \eta + \gamma \zeta \\ y &= \alpha_1 \xi + \beta_1 \eta + \gamma_1 \zeta \\ z &= \alpha_2 \xi + \beta_2 \eta + \gamma_2 \zeta, \end{aligned}$$

wo α, β, γ Functionen der Zeit sind, für welche zunächst die Gleichungen

$$\begin{aligned} \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 &= 1 \quad & \alpha\, \alpha_1 + \beta\, \beta_1 + \gamma\, \gamma_1 &= 0 \\ \alpha_1^2 + \beta_1^2 + \gamma_1^2 &= 1 \quad & \alpha\, \alpha_2 + \beta\, \beta_2 + \gamma\, \gamma_2 &= 0 \\ \alpha_3^2 + \beta_2^2 + \gamma_2^2 &= 1 \quad & \alpha_1 \alpha_2 + \beta_1\, \beta_2 + \gamma_1 \gamma_2 &= 0 \end{aligned}$$

gelten, die bekanntlich die Orthogonalität der Substitution kennzeichnen, sodann noch die Gleichungen

$$\begin{aligned} \xi \frac{d\alpha}{dt} + \eta \frac{d\beta}{dt} + \zeta \frac{d\gamma}{dt} &= 0 \\ \xi \frac{d\alpha_1}{dt} + \eta \frac{d\beta_1}{dt} + \zeta \frac{d\gamma_1}{dt} &= 0 \\ \xi \frac{d\alpha_2}{dt} + \eta \frac{d\beta_2}{dt} + \zeta \frac{d\gamma_2}{dt} &= 0 \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \beta \frac{d\alpha}{dt} + \beta_1 \frac{d\alpha_1}{dt} + \beta_2 \frac{d\alpha_2}{dt} &= 0 \\ \alpha \frac{d\beta}{dt} + \alpha_1 \frac{d\beta_1}{dt} + \alpha_2 \frac{d\beta_2}{dt} &= 0, \end{aligned}$$

welche die drei noch übrig gebliebenen, von einander unabhängigen Bedingungsgleichungen abgeben.

In Folge dieser Gleichungen wird zu jeder Zeit die Coordinate z gleich Null, und da

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Omega}{\partial \xi} &= \alpha \frac{\partial \Omega}{\partial x} + \beta \frac{\partial \Omega}{\partial y} + \gamma \frac{\partial \Omega}{\partial z} \\ \frac{\partial \Omega}{\partial \eta} &= \alpha_1 \frac{\partial \Omega}{\partial x} + \beta_1 \frac{\partial \Omega}{\partial y} + \gamma_1 \frac{\partial \Omega}{\partial z} \\ \frac{\partial \Omega}{\partial \zeta} &= \alpha_2 \frac{\partial \Omega}{\partial x} + \beta_2 \frac{\partial \Omega}{\partial z} + \gamma_2 \frac{\partial \Omega}{\partial z} \end{aligned}$$

ist, so wird

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2 \xi}{dt^2} + \varkappa^2 (1 + m) \frac{\xi}{\varrho^2} &= \varkappa^2 (1 + m) \frac{\partial \Omega}{\partial \xi} \\ \frac{d^2 \eta}{dt^2} + \varkappa^2 (1 + m) \frac{\eta}{\varrho^2} &= \varkappa^2 (1 + m) \frac{\partial \Omega}{\partial \eta} \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \quad \text{IV)}$$

die vierte Form der Fundamentalgleichungen sein, wobei

$$\varrho^2 = \xi^2 + \eta^2.$$

Es wurde bisher keine genügende Integrationsweise dieser Differentialgleichungen gegeben. Ihre Integration ist nur gelungen für den Fall, wo

$$\Omega = 0,$$

den wir sofort auseinandersetzen werden, weil er die Grundlage aller Arbeiten bildet, ferner für den Fall, wo Ω eine insbesondere einfache Gestalt annimmt. Man spricht im ersten Falle von einer ungestörten, im letzteren Falle von einer intermediären Bahn. Um diese letztere hat sich insbesondere H. Gyldèn verdient gemacht. (Eine übersichtliche Darstellung der Gyldèn'schen Methode giebt Backlund in der Zeitschrift Copernicus. Bd. II, S. 203.)

Betrachten wir also die ungestörte Bewegung: Die zu integrirenden Gleichungen sind:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \varkappa^2(1 + m)\frac{x}{r^3} = 0$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \varkappa^2(1 + m)\frac{y}{r^3} = 0$$

$$\frac{d^2z}{dt^2} + \varkappa^2(1 + m)\frac{z}{r^3} = 0,$$

wobei

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

zu setzen ist. $\varkappa$ ist bekanntlich die Gauss'sche Constante, also

$$\varkappa = 0{,}0172021\ldots \quad \varkappa^2 = 0{,}0002959\ldots \quad Log\,\varkappa = 8{,}2355814,$$

ihre Herleitung wird weiter unten angegeben.

Diese Gleichungen liefern zunächst die drei Flächenintegrale

$$x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt} = \varkappa_1 = \varkappa\sqrt{p}\cos i$$

$$z\frac{dx}{dt} - x\frac{dz}{dt} = \varkappa_2 = \varkappa\sqrt{p}\sin i\sin\Omega$$

$$y\frac{dz}{dt} - z\frac{dy}{dt} = \varkappa_3 = \varkappa\sqrt{p}\sin i\cos\Omega,$$

woraus

$$\varkappa_1 z + \varkappa_2 y + \varkappa_3 x = 0$$

oder

$$z + C_1 y + C_2 x = 0$$

folgt, d. h. die Bewegung geschieht in einer Ebene. (I. Kepler'sches Gesetz.)

Wir können demnach weiterhin nur die Gleichungen

$$\frac{d^2 x}{d t^2} + \varkappa^2 (1 + m) \frac{x}{r^3} = 0$$

$$\frac{d^2 y}{d t^2} + \varkappa^2 (1 + m) \frac{y}{r^3} = 0$$

in Betracht ziehen. Man hat

$$2 d s = r^2 d v = x d y - y d x = C_3 d t,$$

demnach

$$2 S = C_3 t + C_4.$$

Daraus folgt, dass die durch den Radiusvector beschriebenen Flächen der Zeit direct proportional sind, wir haben nämlich

$$2 (S - S') = C_3 (t - t') \quad \text{(II. Kepler'sches Gesetz.)}$$

Sei g die Geschwindigkeit, so ergiebt sich weiter

$$g = \sqrt{\left(\frac{d x}{d t}\right)^2 + \left(\frac{d y}{d t}\right)^2}.$$

Man hat aber

$$2 \left\{\frac{d x}{d t} \cdot \frac{d^2 x}{d t^2} + \frac{d y}{d t} \cdot \frac{d^2 y}{d t^2}\right\} + \frac{2 \varkappa^2 (1 + m)}{r^3} \left\{x \frac{d x}{d t} + y \frac{d y}{d t}\right\} = 0,$$

und da

$$r^2 = x^2 + y^2,$$

also

$$r \frac{d r}{d t} = x \frac{d x}{d t} + y \frac{d y}{d t},$$

so findet man

$$\frac{d}{d t} \left\{\left(\frac{d x}{d t}\right)^2 + \left(\frac{d y}{d t}\right)^2\right\} + \frac{2 \varkappa^2 (1 + m)}{r^2} \frac{d r}{d t} = 0.$$

Hieraus

$$g = \sqrt{C_5 + \frac{2 \varkappa^2 (1 + m)}{r}}.$$

Man hat identisch:

$$(x^2 + y^2)\left(\frac{d x^2}{d t^2} + \frac{d y^2}{d t^2}\right) - \left(\frac{x d x}{d t} + \frac{y d y}{d t}\right)^2 = \left(x \frac{d y}{d t} - y \frac{d x}{d t}\right)^2,$$

daraus folgt

$$\pm d t = \frac{r d r}{\sqrt{C_5 r^2 + 2 \varkappa^2 (1 + m) r - C_3^2}}$$

oder da

$$r^2 dv = C_3 dt$$

$$\pm dt = \frac{C_3 dr}{r\sqrt{C_5 r^2 + 2\varkappa(1+m)r - C_3^2}}.$$

Führen wir nun zwei neue Constanten a und e so ein,

$$C_5 = -\frac{\varkappa^2(1+m)}{a}$$

$$C_3^2 = a(1-e^2)\varkappa^2(1+m),$$

so folgt:

$$\cos(v+w) = \frac{1}{e}\left\{\frac{a(1-e^2)}{r} - 1\right\}$$

oder

$$r = \frac{a(1-e^2)}{1+e\cos(v+w)} \quad \text{(III. Kepler'sches Gesetz.)}$$

Die Planetenbahnen sind also in erster Annäherung Kegelschnitte.

a ist die halbe grosse Axe, e die Excentricität, der Parameter p ist bestimmt durch

$$p = a(1-e^2).$$

Die Sonne liegt im Brennpunkt. Die Gerade, mit welcher die grosse Axe zusammenfällt, nennt man die Apsidenlinie. ihre Schnittpunkte mit der Ellipse werden je nach der grösseren oder kleineren Entfernung von der Sonne Aphel oder Perihel genannt. Sei q der lineare Abstand des Perihels vom Sonnenmittelpunkte, so wird

$$p = q(1+e).$$

Zählt man den Winkel v vom Perihel aus, so wird w gleich Null. Aus

$$S' - S = C_3(t' - t)$$

folgt, da für die Umlaufzeit T, $S' - S = ab\pi$ wird,

$$\varkappa\sqrt{a(1-e^2)}\sqrt{1+m}\,T = a^2\sqrt{1-e^2}\,\pi,$$

also

$$\varkappa = \frac{2a^{3/2}}{T\sqrt{1+m}}.$$

Setzt man nach Gauss

$$a = 1$$
$$T = 365{,}2563855$$
$$m = 1 : 354710,$$

so wird

$$\varkappa = 0{,}0172021,$$

wie früher angeführt wurde.

Da diese Grösse für alle Planeten gleich bleibt, so folgt:

$$\frac{a^{3/2}}{T\sqrt{1+m}} = \frac{a_1^{3/2}}{T_1\sqrt{1+m_1}} \quad \text{(IV. Kepler'sches Gesetz.)}$$

für irgend welche zwei Planeten.

Wir hatten

$$g = \varkappa\sqrt{1+m}\sqrt{\frac{2}{r} - \frac{1}{a}},$$

die Bahn wird also eine

$$\text{Ellipse,} \quad \text{wenn } g < \varkappa\sqrt{\frac{2}{r}}$$

$$\text{Hyperbel,} \quad \text{„} \quad g > \varkappa\sqrt{\frac{2}{r}}$$

$$\text{Parabel,} \quad \text{„} \quad g = \varkappa\sqrt{\frac{2}{r}}.$$

Um die Beziehung zwischen v und t zu erhalten, schreiben wir

$$r^2\,dv = \varkappa\sqrt{p(1+m)}\,dt,$$

hieraus

$$\frac{\varkappa\sqrt{1+m}}{p^{3/2}} = \int\frac{dv}{(1+e\cos v)^2}.$$

Sei nun

$$\tau = tgn\,\frac{1}{2}\,v, \quad \alpha = -\beta = \frac{1-e}{1+e},$$

so wird für

I. $e = 1$ (Parabel)

$$\frac{\varkappa\sqrt{1+m}}{q^{3/2}\sqrt{2}}\,t = \tau + \frac{1}{3}\,\tau^3 + J.$$

J eine Constante.

II. $e < 1$ (Ellipse)

$$\frac{\varkappa\sqrt{1+m}\,(1+e)^2(1-e)}{p^{3/2}}\,t = -\frac{2e\tau}{1+\alpha\tau} + \frac{2}{\sqrt{\alpha}}\;arctg\,(\tau\sqrt{\alpha}) + J.$$

III. $e > 1$ (Hyperbel)

$$\frac{\varkappa\sqrt{1+m}\,(1+e)^2(1-e)}{p^{3/2}}\,t = -\frac{2e\tau}{1-\beta\tau}$$

$$+\frac{1}{\sqrt{\beta}}\,log\,nat\left\{\frac{1+\tau\sqrt{\beta}}{1-\tau\sqrt{\beta}}\right\} + J.$$

Bezeichnen wir mit v die wahre Anomalie wie oben, M di mittlere Anomalie, sowie mit u die excentrische Anomalie, sc haben wir folgende Beziehungen:

$$tg\,\frac{1}{2}\,u = tg\,\frac{1}{2}\,v \cdot \sqrt{\frac{1-e}{1+e}}$$

$$u - e\,sin\,u = \varepsilon + n\,t = M$$

$$n = \frac{\varkappa\sqrt{1+m}}{a^{3/2}}$$

$$e = sin\,\varphi$$

$$tg\,\frac{v}{2} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\,tg\,\frac{u}{2} = tg\left(45 + \frac{\varphi}{2}\right)tg\,u$$

$$\sqrt{r}\,cos\,\frac{v}{2} = \sqrt{a(1-e)}\,cos\,\frac{u}{2}$$

$$\sqrt{r}\,sin\,\frac{v}{2} = \sqrt{a(1+e)}\,sin\,\frac{u}{2}$$

$$r = a(1 - e\,cos\,u)$$

$$r\,cos\,v = a(cos\,u - e)$$

$$r\,sin\,v = a\,cos\,\varphi\,sin\,u$$

$$cos\,v = \frac{cos\,u - e}{1 - e\,cos\,u}$$

$$cos\,u = \frac{cos\,v + e}{1 + e\,cos\,v}$$

$$sin\,\frac{1}{2}\,(v - u) = \sqrt{\frac{a}{r}}\,sin\,\frac{\varphi}{2}\,sin\,u,$$

alle diese Formeln gelten für elliptische Bahnen. Für hyperbolische setzen wir

$$\tau\sqrt{\beta} = tg\,\frac{1}{2}\,F$$

oder

$$tg\,\frac{v}{2} = \sqrt{\frac{e+1}{e-1}}\,tg\,\frac{1}{2}\,F$$

und erhalten:

$$\frac{\varkappa\sqrt{1+m}}{(-a)^{3/2}} = e\,tg\,F - log\,nat\,tg\left(45 - \frac{F}{2}\right),$$

die Auflösung dieser Gleichung geschieht nach der Regula falsi.

Wie auf diese Formeln die Bahnbestimmung zu gründen ist, sehe man: Oppolzer, „Lehrbuch zur Bahnbestimmung der Kome-

ten und Planeten", zwei Bände (I. Bd., 2. Aufl., II. Bd., 1. Aufl.), Leipzig bei Engelmann, oder auch: Klinkerfues, „Theoretische Astronomie", Braunschweig 1872, oder endlich: Gauss, „Theoria Motus" 1809, übersetzt von Haase, 1865, und neuer Abdruck 1877. Auch Gauss' Werke, VII. Bd., 1874.

Einige Reihenentwickelungen.

1) Aus

$$u - e \sin u = \varepsilon + nt$$

folgt:

$$\begin{aligned} u = \varepsilon + nt + e \sin nt &+ \frac{e^2}{2} \sin 2nt \\ &+ \frac{e^3}{2^3} (3 \sin 3nt - \sin nt) \\ &+ \frac{e^4}{2 \cdot 3} (2 \sin 4nt - \sin 2nt) \\ &+ \frac{e^5}{2^7 \cdot 3} (5^3 \sin 5nt - 3^4 \sin 3nt + 2 \sin nt) \\ &+ \frac{e^6}{2^4 \cdot 3 \cdot 5} (3^4 \sin 6nt - 2^6 \sin 4nt + 5 \sin 2nt) \\ &+ \cdots \end{aligned}$$

2) Aus

$$r = a(1 - e \cos u)$$

folgt:

$$\begin{aligned} \frac{r}{a} = 1 - e \cos nt &- \frac{e^2}{2} (\cos 2nt - 1) \\ &- \frac{e^3}{2^3} (3 \cos 3nt - 3 \cos nt) \\ &- \frac{e^4}{3} (\cos 4nt - \cos 2nt) \\ &- \frac{e^5}{2^7 \cdot 3} (5^3 \cos 5nt - 5 \cdot 3^3 \cos 3nt + 5 \cdot 2 \cos nt) \\ &- \frac{e^6}{2^4 \cdot 5} (3^3 \cos 6nt - 2^5 \cos 4nt + 5 \cos 2nt) \\ &- \cdots \end{aligned}$$

3) Aus

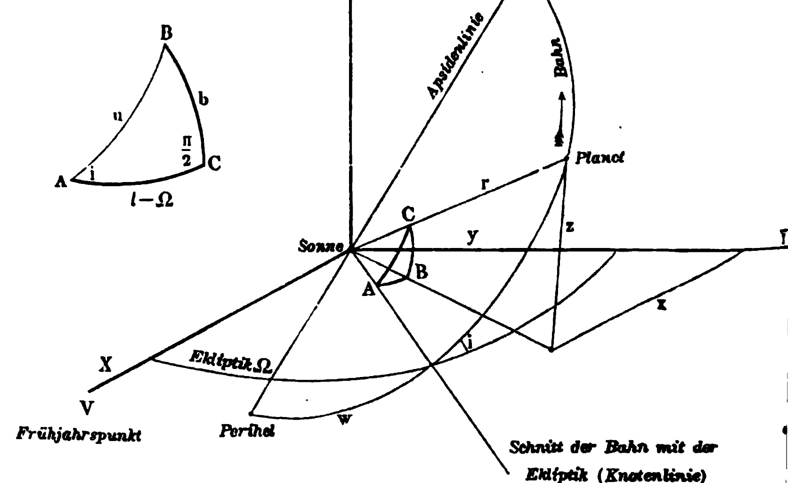
$$tg \frac{v}{2} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\, tg \frac{u}{2}$$

$$v = \varepsilon + nt + 2e\sin nt + \frac{5}{4}e^2 \sin 2nt$$
$$+ \frac{e^3}{2^2 . 3}(13 \sin 3nt - 3 \sin nt)$$
$$+ \frac{e^4}{2^5 . 3}(103 \sin 4nt - 44 \sin 2nt)$$
$$+ \frac{e^5}{2^6 . 3 . 5}(1097 \sin 5nt - 645 \sin 3nt + 50 \sin nt)$$
$$+ \cdots$$

Wir wollen nun die astronomischen Coordinatensysteme betrachten, um zu sehen, wie die Astronomie die Constanten verwendet.

Sei w der Abstand des Perihels, vom Knoten in der Bewegungsrichtung des Himmelskörpers gezählt, ferner Ω der Winkel

Fig. 9.



zwischen dem aufsteigenden Knoten und dem Frühlingspunkt, so wird

$$w + \Omega = \pi$$

die Länge des Perihels genannt. Auch ist, wie aus Fig. 9 ersichtlich,

$$u + w = v.$$

Es bezeichne b die Seite BC, $l - \Omega$ die Seite AC im sphärischen Dreiecke ABC, so ergiebt sich:

$$z = r \sin b$$
$$y = r \cos b \cos l$$
$$x = r \cos b \sin l.$$

Nun ist aber

$$\sin b = \sin u \sin i$$
$$\cos b \cos (l - \Omega) = \cos u$$
$$\cos b \sin (l - \Omega) = \sin u \cos i.$$

Schreibt man also in den früheren Formeln für l

$$(l - \Omega) + \Omega,$$

so ergiebt sich unter Benutzung der letzteren:

$$x = r \{\cos u \cos \Omega - \sin u \sin \Omega \cos i\}$$
$$y = r \{\cos u \sin \Omega + \sin u \cos \Omega \cos i\}$$
$$z = r \{\sin u \sin i\}.$$

Man nennt l die heliocentrische Länge, und b die heliocentrische Breite.

Unter Bahnelementen versteht man die Angaben der die Bahn charakterisirenden Grössen. Diese sind:

I. Halbe grosse Axe a.

II. Die Excentricität e, oder da $e = \sin \varphi$, auch φ.

Anmerkung. Bei den parabolischen Bahnen wird $e = 1$ und $a = \infty$. Hier wählt man also zur Dimensionsbestimmung die Periheldistanz q.

III. Der Ort für eine bestimmte Zeit (Epoche).

Anmerkung. Bei Bahnen kleiner Excentricität (Planetenbahnen) benutzt man die Angabe der mittleren Anomalie M zur Zeit der Epoche; bei sehr excentrischen Bahnen wählt man die Perihelzeit T.

IV. Der aufsteigende Knoten Ω.

V. Die Neigung i.

VI. Der heliocentrische Bogenabstand des Perihels vom aufsteigenden Knoten w.

Zu diesen Elementen wird noch die mittlere tägliche siderische Bewegung μ

$$\mu = \frac{\varkappa \sqrt{1 + m}}{a^{3/2}}$$

und oft noch die Masse hinzugefügt.

Für die Störungsrechnung ist es wichtig, die Entfernun zweier Planeten, sowie den Winkel, den ihre Radienvectoren mi einander einschliessen, zu kennen. Seien r und r' ihre Entfer nungen von der Sonne, sowie

$$H = \measuredangle (r r'),$$

so wird

$$\Delta^2 = (x' - x)^2 + (y' - y)^2 + (z' - z)^2 = r^2 + r'^2 - 2 r r' \cos H$$

und

$$\cos H = \frac{x}{r} \cdot \frac{x'}{r'} + \frac{y}{r} \cdot \frac{y'}{r'} + \frac{z}{r} \cdot \frac{z'}{r'}.$$

Es wird aber vortheilhaft sein, diesen Winkel durch die i den Elementen gegebenen Grössen ausgedrückt zu haben. Die erreichen wir durch folgende Ueberlegung. Sei A der Schnitt

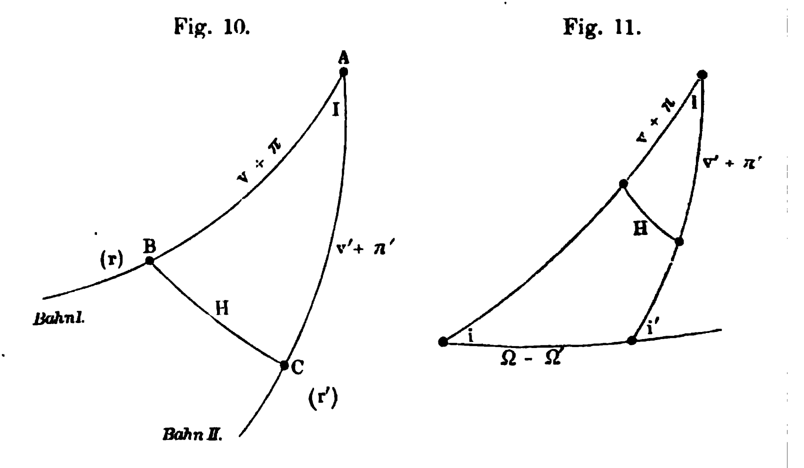


Fig. 10. Fig. 11.

punkt der Schnittlinie der beiden Bahnen, sowie B jener de Radiusvector r, und C jener des Vectors r' mit einer Kugel um den Sonnenmittelpunkt, deren Radius $= 1$ ist. Sodann wird offen- bar $BC = H$ sein. Setzen wir noch:

$$BA = v + \Pi$$
$$CA = v' + \Pi',$$

ferner den Winkel bei $A = I$, so wird offenbar:

$$\cos H = \cos (v + \Pi) \cos (v' + \Pi') + \sin (v + \Pi) \sin (v' + \Pi') \cos I,$$

wobei die Grössen Π, Π', I aus nebenstehendem Dreieck (Fig. 11) sich ergeben wie folgt:

$$\sin\frac{I}{2}\sin\frac{\Pi'+\Pi}{2}=-\sin\frac{\Omega-\Omega'}{2}\sin\frac{i+i'}{2}$$
$$\sin\frac{I}{2}\cos\frac{\Pi'+\Pi}{2}=+\cos\frac{\Omega-\Omega'}{2}\sin\frac{i-i'}{2}$$
$$\cos\frac{I}{2}\sin\frac{\Pi'-\Pi}{2}=-\sin\frac{\Omega-\Omega'}{2}\sin\frac{i+i'}{2}$$
$$\cos\frac{I}{2}\cos\frac{\Pi'-\Pi}{2}=+\cos\frac{\Omega-\Omega'}{2}\cos\frac{i-i'}{2}$$

nach den bekannten Gleichungen von Gauss. Setzen wir

$$\sin^2\frac{I}{2}=\nu$$

$$v-v'+\Pi-\Pi'=x$$
$$v+v'+\Pi+\Pi'=y,$$

so folgt:

$$\cos H=(1-\nu)\cos x+\nu\cos y.$$

Es wird noch:

$$\cos 2H=-2\nu(1-\nu)+(1-\nu)^2\cos 2x+\nu^2\cos 2y$$
$$+2\nu(1-\nu)\cos(x+y)+2\nu(1-\nu)\cos(x-y)$$

etc.

$$-\frac{\partial\cos H}{\partial\nu}=(1-\nu)\sin x+\nu\sin y$$

$$-\frac{\partial\cos 2H}{\partial\nu}=2(1-\nu)^2\sin 2x+2\nu^2\sin 2y+4\nu(1-\nu)\sin(x+y)$$

etc.

Vergleiche: F. Tisserand, Développement de la fonction perturbatrice etc. Annales de l'Observ. de Paris, Tom. XV, und O. Baclund, Zur Entwickelung der Störungsfunction, Mem. de l'Acad. de St. Pétersbourg, VII. Ser., Tom. XXXII, Nr. 4.

§. 175.

Dioptrik.

A. Allgemeines.

1) Sei i der Einfallswinkel, r der Brechungswinkel, so wird

$$\frac{\sin i}{\sin r}=constant=n$$

der Brechungsquotient genannt. Sei v die Fortpflanzungs geschwindigkeit vor, v' jene nach der Brechung, so wird

$$\frac{v}{v'} = \frac{\sin i}{\sin r} = n.$$

Multiplicirt man noch Zähler und Nenner mit der bei der Brechung ungeänderten Schwingungsdauer, so folgt noch

$$\frac{\lambda}{\lambda'} = \frac{v}{v'} = \frac{\sin i}{\sin r} = n,$$

wobei λ die Wellenlänge ist.

Der Winkel r wird zum Grenzwinkel, wenn

$$\sin r = \frac{1}{n}.$$

Sodann tritt totale Reflexion ein. Auch im allgemeinen Falle erhalten wir eine Reflexion. Man hat hier $v = v'$ zu setzen, woraus

$$r = 180^0 - i$$

folgt. Der Einfallswinkel, für den die Gleichung

$$i + r = 90^0$$

gilt, wo also

$$tg\, i = n, \quad \text{(Gesetz von Brewster)}$$

nennt man den Polarisationswinkel. Fällt natürliches Licht unter diesem Winkel auf einen nichtmetallischen Körper, so wird es zum grossen Theil linear-polarisirt.

2) Es sei eine brechende Kugelfläche gegeben. Fassen wir sodann die von einem Punkte ausgehenden Strahlen ins Auge, so sehen wir, dass ihnen wieder Strahlen eines Bündels entsprechen. Beide Bündel sind zu einander perspectivisch bezüglich der brechenden Fläche. Sind zwei solche Flächen gegeben, so ergiebt sich Folgendes:

Den unendlich fernen Punkten der Axe des Systems entsprechen als conjugirte Punkte die Brennpunkte und die durch sie senkrecht zur Axe gelegten Ebenen bilden die Brennebenen. Diejenigen Ebenen, wo Bild und Object gleich gross sind, werden Hauptebenen, ihre Schnittpunkte mit der Axe Hauptpunkte genannt.

Zwei conjugirte Punkte, durch welche der Lichtstrahl so hindurchgeht, dass er mit der Axe im ersten und letzten Medium denselben Winkel bildet, werden Knotenpunkte genannt und

die durch sie zur Axe senkrecht gelegten Ebenen, Knotenebenen.

Fallen zwei conjugirte Punkte zusammen, so entstehen die symptotischen Punkte (A und B). {Listing, Pogg. Ann. CXXIX.} Bezeichnen wir mit

$f f'$ die Brennpunkte,

$h h'$ die positiven und $\bar{h} \bar{h}'$ die negativen Hauptpunkte,

$k k'$ die positiven und $\bar{k} \bar{k}'$ die negativen Knotenpunkte,

so giebt die folgende Figur ein Bild der Zusammengehörigkeit dieser Punkte.

Fig. 12.

Sei a ein Punkt, a' der ihm conjugirte, sei ferner $fh = \varphi$, $f'h' = \varphi'$, wobei φ und φ' die Brennweiten darstellen, so wird

$$af \,.\, af' = \varphi \,.\, \varphi'.$$

Sei b, b' ein anderes Punktepaar, so wird

$$\frac{bf}{ab} + \frac{b'f'}{a'b'} = -1.$$

Aus dieser Gleichung ergeben sich folgende Relationen:

$$\frac{\varphi}{ah} + \frac{\varphi'}{h'a'} = 1$$

$$\frac{\varphi}{a\bar{h}} + \frac{\varphi'}{\bar{h}'a'} = -1$$

$$\frac{\varphi'}{ak} + \frac{\varphi}{k'a'} = 1$$

$$\frac{\varphi'}{a\bar{k}} + \frac{\varphi}{\bar{k}'a'} = -1.$$

Dabei ist die Richtung vom ersten zum letzten Medium als positive angenommen worden und $ab = -ba$, wie in der Streckenrechnung.

Ist das erste und letzte Medium dasselbe, so fallen die Knotenpunkte mit den Hauptpunkten zusammen.

Seien N und N' zwei conjugirte Ebenen senkrecht zur Axe, a und a' ihre Schnittpunkte mit der Axe, und p der Schnittpunkt aller Verbindungsgeraden je zweier conjugirten Punkte dieser Ebene. Wir bezeichnen nun mit ε das Verhältniss $ap : a'p$, also

$$\varepsilon = \frac{ap}{a'p}.$$

Sei X die Axe, M und M' zwei conjugirte Strahlen. Wir setzen

$$\eta = \frac{tg(XA)}{tg(XA')}$$

und erhalten folgende Tafel der Fundamentalpunkte.

	ε	η
$f\ \infty'$	-0	-0
$\infty\ f'$	$-\infty$	$-\infty$
$h\ h'$	$+1$	$+\frac{\varphi}{\varphi'}$
$\overline{h}\ \overline{h'}$	-1	$-\frac{\varphi}{\varphi'}$
$k\ k'$	$+\frac{\varphi}{\varphi'}$	$+1$
$\overline{k}\ \overline{k'}$	$-\frac{\varphi}{\varphi'}$	-1
A	$\frac{1}{\varphi}(\delta - \sqrt{\delta^2 - \psi^2})$	$\frac{1}{\varphi'}(\delta - \sqrt{\delta^2 - \psi^2})$
B	$\frac{1}{\varphi}(\delta + \sqrt{\delta^2 - \psi^2})$	$\frac{1}{\varphi'}(\delta + \sqrt{\delta^2 - \psi^2})$

Dabei wurde zur Abkürzung

$$\varphi \cdot \varphi' = \psi^2$$
$$\delta = \frac{1}{2} ff'$$

gesetzt.

Man vergleiche die vorzügliche Abhandlung von F. Lippich: Die Fundamentalpunkte eines Systems centrirter brechender Kugelflächen. (Mitth. des steyr. naturw. Vereins, Graz 1871.) Die Hauptpunkte erkannte Moebius {Crelle J. V., S 113, §. 10, S. 122}. Die Knotenpunkte Moser {Dove, Repert. V., 1844; er nennt sie Hauptpunkte}. Die negativen Punkte hat Töppler (Pogg. Ann. CXLII, S. 233) hervorgehoben.

3) Sei ein System von zwei Medien gegeben, deren Brechungsindices n und n' sein mögen, welche durch eine Kugel mit dem Radius r getrennt werden.

Seien a und b zwei conjugirte Punkte, deren Coordinaten bezogen auf die Scheiteltangente und Axe des Systems

$$(xy),\quad (x'y')$$

sein mögen. Sodann ergiebt sich:

$$\frac{n'}{x'} - \frac{n}{x} = \frac{n'-n}{r} \quad \text{I)}$$

$$\frac{y}{y'} = \frac{n'}{n}\frac{x}{x'} = 1 + \frac{n'-n}{nr}x \quad \text{II)}$$

Sei w der Winkel, den zwei durch a gehende Geraden mit einander bilden, w' jene der ihnen entsprechenden Austrittsgeraden, die also durch b gehen, so wird

$$\frac{w}{w'} = \frac{n'}{n}\frac{y'}{y} \quad \text{III)}$$

Die Brennweiten sind gegeben durch

$$\left.\begin{aligned} f &= -\frac{nr}{n'-n} \\ f' &= \frac{n'r}{n'-n} \end{aligned}\right\} \quad \text{IV)}$$

aus welchen Gleichungen sich wieder

$$\frac{f}{f'} = -\frac{n}{n'}$$

$$f + f' = r$$

ergiebt. Führt man die Brennweiten in die obigen Gleichungen ein, so ergiebt sich:

$$\frac{f}{x} + \frac{f'}{x'} = 1 \quad \text{I')}$$

$$\frac{y}{y'} = 1 - \frac{x}{f},\quad \frac{y'}{y} = 1 - \frac{x'}{f'} \quad \text{II')}$$

$$\frac{w}{w'} = \frac{n'}{n}\left(1 - \frac{x'}{f'}\right) = \frac{x' - f'}{f} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \text{III'})$$

$$(x - f)(x' - f') = ff' \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \text{V})$$

Diese Formel entsteht durch Multiplication von III') mit

$$\frac{w'}{w} = \frac{x - f}{f'} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \text{III''})$$

Es wird jedoch bei diesen Formeln vorausgesetzt, dass die Winkel w so klein sind, dass $sin\, w$ gleichgesetzt werden kann dem Bogen selbst.

4) Es kann vorkommen, dass gar keine Fundamentalpunkte existiren, sodann nennt man das System ein teleskopisches, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:

I. Entweder kann das System immer in zwei solche nichtteleskopische zerlegt werden, dass der erste Brennpunkt des zweiten zusammenfällt mit dem zweiten Brennpunkt des ersten, oder

II. Alle Trennungsflächen sind Ebenen.

Für solche Systeme, die sich nicht nach den allgemeinen Sätzen behandeln lassen, ergeben sich folgende Formeln:

Seien f_1, f'_1 die Brennweiten des Systems A, f_2, f'_2 jene des Systems B, die als nichtteleskopische zusammen ein teleskopisches System bilden.

In jedem teleskopischen System steht die gegenseitige Entfernung zweier Ebenen zur gegenseitigen Entfernung der ihnen conjugirten Ebenen in einem constanten Verhältniss. Dieses Verhältniss e wird die Elongation genannt, und es ist

$$e = \frac{f_2 f'_2}{f_1 f'_1} \text{ (immer positiv).}$$

Das constante Verhältniss zwischen homologen Strecken zweier conjugirten Bilder, die in zur Axe senkrechten Ebenen liegen, nennt man die lineare Vergrösserung (l) des teleskopischen Systems, und es ist:

$$l = \frac{f_2}{f'_1}.$$

In jedem teleskopischen System ist das Verhältniss des von zwei Austrittsgeraden gebildeten Winkels zu dem Winkel der entsprechenden Einfallsgeraden constant und wird die angulare Vergrösserung (m) genannt. Es ist

$$m = \frac{n}{n'} \cdot \frac{f_1}{f_2} = \frac{n}{n'} \cdot \frac{1}{l},$$

n und n' sind die Brechungsexponenten des ersten und letzten Mediums. Wird $n = n'$, wie dies bei den gewöhnlichen Instrumenten der Fall ist, so wird

$$e = \left(\frac{f_2}{f_1}\right)^2, \quad l = -\frac{f_2}{f_1}$$

$$m = -\frac{f_1}{f_2} = \frac{1}{l}.$$

Sind die Trennungsflächen lauter Ebenen, so wird

$$e = \frac{n'}{n}, \quad l = 1, \quad m = \frac{n'}{n}.$$

B. Linsen und Linsensysteme.

1) Ein aus drei Medien (gewöhnlich Luft, Glas, Luft) bestehendes centrirtes dioptrisches System wird eine Linse genannt. Die Linse besitzt folgende charakteristische Eigenschaften:

1) Die Brennweiten sind ihrem absoluten Werthe nach einander gleich.

2) Die Knotenpunkte fallen mit den Hauptpunkten zusammen.

Sei φ die zweite Brennweite, so wird $-\varphi$ die erste sein und wir erhalten die Fundamentalformeln:

$$\frac{1}{x'} - \frac{1}{x} = \frac{1}{\varphi}$$

$$\frac{y}{x} = \frac{y'}{x'}$$

$$\frac{y}{y'} = 1 + \frac{x}{\varphi}, \quad \frac{y'}{y} = 1 - \frac{x'}{\varphi}$$

$$\frac{w}{w'} = \frac{y'}{y} = 1 - \frac{x'}{\varphi}, \quad \frac{w'}{w} = \frac{y}{y'} = 1 + \frac{x}{\varphi}.$$

Seien r und r' die beiden Krümmungsradien, n_1 der Brechungsexponent des eingeschlossenen Mediums, n der Brechungsquotient des einschliessenden Mediums, Δ die Linsendicke.

Seien V und V' die Scheitelpunkte, P, P' die Hauptpunkte, sowie φ die Brennweite, ferner

$$\mu = \frac{n_1}{n}$$

$$\varrho = r' - r + \frac{\mu - 1}{\mu} \varDelta,$$

so wird:

$$\varphi = \frac{1}{\mu - 1} \frac{r r'}{\varrho}$$

$$V P = -\frac{1}{\mu} \frac{r}{\varrho} \varDelta$$

$$V' P' = -\frac{1}{\mu} \frac{r'}{\varrho} \varDelta.$$

Man merke insbesondere:

Die planconvexen Linsen sind immer convergent.

Einer der Hauptpunkte fällt immer mit dem Scheitel der convexen Oberfläche zusammen, der andere befindet sich innerhalb des Linsenkörpers, von der ebenen Fläche um $\frac{\varDelta}{\mu}$ entfernt.

Die planconcaven Linsen sind immer divergent.

Einer der Hauptpunkte liegt im Scheitel der krummen Oberfläche, der andere im Innern der Linse um $\frac{\varDelta}{\mu}$ von der ebenen Oberfläche entfernt.

Die Formen der Linsen sind:

1) Biconvex: (), 2) Biconcav:)(, 3) Planconvex: (| oder |), 4) Planconcav:)| oder |(, 5) Concavconvex oder Meniscus: ((.

2) Wird $\varDelta = 0$, so nennt man die Linse eine **unendlich dünne** Linse, für diese ist

$$\varphi = \frac{1}{\mu - 1} \frac{r r'}{r' - r}$$

oder

$$\frac{1}{\varphi} = (\mu - 1) \left\{ \frac{1}{r} - \frac{1}{r'} \right\}$$

und $VP = 0$, $V'P' = 0$.

3) Seien zwei Linsen gegeben. Sei $\varDelta$ die Entfernung der zweiten Hauptebene der ersten Linse von der ersten Hauptebene der zweiten Linse, φ_1 und φ_2 die beiden Brennweiten. Sei P_1 der erste Hauptpunkt der ersten, P_2' der zweite der zweiten Linse; PP' die Hauptpunkte des Systems, sowie φ dessen Brennweite, so wird:

$$\varphi = \frac{\varphi_1 \varphi_2}{\varphi_1 + \varphi_2 - \Delta}$$

$$P_1 P = \frac{\varphi_1 \Delta}{\varphi_1 + \varphi_2 - \Delta}$$

$$P_2' P' = -\frac{\varphi_2 \Delta}{\varphi_1 + \varphi_2 - \Delta}.$$

4) Aequivalente Systeme. Irgend einem centrirten dioptrischen Systeme entspricht ein einfaches System von zwei durch eine einzige Oberfläche getrennten Medien, oder aber eine unendlich dünne Linse, welche Bilder geben, die, parallel zur Axe um eine Distanz gleich dem Abstande der Hauptpunkte verschoben, mit den Bildern des gegebenen dioptrischen Systems zusammenfallen. Dies einfache System ist entweder eine brechende Fläche, oder eine unendlich dünne Linse, je nachdem im gegebenen System die beiden äussersten Medien ungleiche oder gleiche Brechungsexponenten besitzen.

C. Dioptrische Instrumente.

1) Das Auge sieht einen Gegenstand deutlich, wenn er zwischen dem Fern- und Nahepunkte gelegen ist. Der Fernpunkt eines normalen Auges liegt im Unendlichen, der Nahepunkt etwa 20 bis 30 cm entfernt. Die Entfernung des Nahepunktes wird auch die deutliche Sehweite genannt.

2) Das einfache Mikroskop. Sei φ die Brennweite des Systems, d die Entfernung des Augenmittelpunktes*) vom zweiten Hauptpunkte, δ' die deutliche Sehweite des Auges, δ' die Entfernung des Bildes vom Augenmittelpunkt (= der Distanz, auf welche das Auge accommodirt ist), so wird die Vergrösserung m

$$m = \frac{B}{g} \frac{\delta'}{\delta},$$

wobei B die Bildlänge, g die Gegenstandslänge bezeichnen, oder

$$m = \left(1 + \frac{\delta - d}{\varphi}\right) \frac{\delta'}{\delta}.$$

Da das Auge gewöhnlich auf dem Nahepunkt accomodirt ist, so wird $\delta = \delta'$, also

$$m = 1 + \frac{\delta' - d}{\varphi}.$$

*) Der Augenmittel- oder Kreuzungspunkt liegt 7,26 mm hinter der Vorderfläche der Cornea.

3) Ein zusammengesetztes Instrument besteht aus zwei Systemen, dem Objectiv und dem Ocular. Unter der Vergrösserung eines Instrumentes versteht man das Verhältniss des Sehwinkels, unter dem ein Gegenstand gesehen wird. zu dem Sehwinkel, unter dem der Gegenstand mit blossem Auge betrachtet erscheinen würde.

Sei D die absolute Entfernung des Objectes vom ersten Hauptpunkte des Objectivs, d die Entfernung des Augenmittelpunktes vom zweiten Hauptpunkte des Oculars, die Distanz, auf welche das Auge, während es durch das Instrument sieht, accommodirt ist, δ, die Distanz, in welcher das Object mit blossem Auge betrachtet würde, mit δ', so wird die Vergrösserung

$$m = -\frac{\varphi_1}{\varphi_2} \cdot \frac{\delta'}{D - \varphi_1} \cdot \left\{1 + \frac{\varphi_2 - d}{\delta}\right\}.$$

Dabei ist φ_2 die Brennweite des Oculars, φ_1 diejenige des Objectivs. Speciell für ein Fernrohr wird $m = - \varphi_1 : \varphi_2 =$ Durchmesser des Objectivs: Durchmesser des Oculars.

D. Prismen.

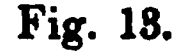
1) Sei n der Brechungsquotient des Prismas, so gelten folgende Formeln:

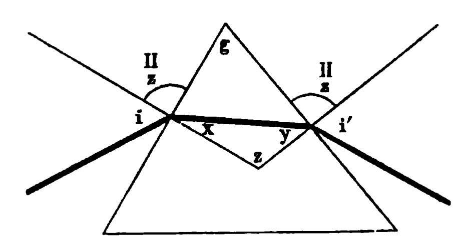
$$\frac{\sin i}{\sin x} = \frac{\sin i'}{\sin y} = n$$

$$x + y = g$$

$$\sin i' = \sin g \sqrt{n^2 - \sin^2 i} - \cos g \sin i.$$

Die ganze Ablenkung ist $= i + i' - g$.


Fig. 18.



Soll ein Lichtstrahl durch ein Prisma hindurchgehen, so muss der brechende Winkel g kleiner sein, als der doppelte Betrag des Grenzwinkels.

Die Totalablenkung wird ein Minimum, wenn der Lichtstrahl mit den beiden brechenden Flächen gleiche Winkel einschliesst, also wenn

$$x = y.$$

Sei D das Minimum der Ablenkung, so wird

$$n = \frac{\sin \frac{D+g}{2}}{\sin \frac{g}{2}} \quad \text{(Newton und Fraunhofer).}$$

Man nennt die Grösse:

$n^2 - 1$, die brechende Kraft,

$\{(n^2 - 1)$: specifisches Gewicht$\}$, das Brechungsvermögen des Prismas.

Die brechende Kraft ist in der Vibrationstheorie ein Maass für den Ueberschuss der Dichtigkeit des Aethers im brechenden Medium. Der Brechungsquotient für den Uebergang aus dem leeren Raume in ein Medium wird der absolute genannt.

Für ein und dasselbe Gas ist, wie sich auch der Druck und die Temperatur ändern mögen, $(n - 1)$: Specifisches Gewicht nahezu constant.

Diese Formeln und Sätze gelten nur für homogenes Licht.

2) Sei λ die Wellenlänge des angewandten Lichtes, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \ldots$ bestimmte Constanten, n_λ der Brechungsquotient, so wird

$$n_\lambda = \alpha_1 + \frac{\alpha_2}{\lambda^2} + \frac{\alpha_3}{\lambda^4} + \cdots$$

Seien n_B, n_H, n_E die Brechungsquotienten der Fraunhofer'schen Linien B, H, E, so wird

$n_H - n_B$ die totale Dispersion,

$\frac{n_H - n_B}{n_E - 1}$ die zerstreuende Kraft genannt.

3) Es ist angenähert die Ablenkung eines Prismas proportional der Grösse $g(n - 1)$, der Zerstreuungswinkel proportional der Grösse $g\{n - n'\}$, wobei n und n' die Brechungsquotienten zweier Lichtsorten sind.

Sollen für zwei Prismen die Zerstreuungswinkel gleich gross sein, so müssen sich annähernd die Kantenwinkel verkehrt verhalten, wie die Dispersionen.

Diese Sätze gelten für achromatische Prismen, wenn es sich um kleine Kanten und Einfallswinkel handelt.

4) Für Amici-Prismen, bei welchen die Zerstreuung möglichst beibehalten, die Ablenkung aufgehoben werden soll, müssen sich die Kantenwinkel (genähert) verkehrt verhalten, wie die Ueberschüsse der Brechungsquotienten der mittleren Strahlen über Eins, also

$$\frac{g}{g'} = \frac{n'_E - 1}{n_E - 1}.$$

Literatur. Matthiessen's Grundriss der Dioptrik geschichteter Systeme enthält einige Literatur (nur die deutsche, die namhaften Arbeiten der Italiener und Engländer sind dort nicht angeführt). Das beste Werk über Dioptrik dürfte, soweit es sich um elementare Begründung handelt, Ferrari's: „Le proprietà cardinali degli strumenti diottrici", deutsch von F. Lippich, sein. Unter den älteren sind Littrow J., Dioptrik, Wien 1830, und Prechtl's Praktische Dioptrik, Wien 1828, besonders hervorzuheben.

§. 176.

Mechanische Theorie der Wärme.

A. Allgemeine Theorie.

1) Eine Wärmeeinheit (Calorie) ist jene Wärmenge, welche 1 kg Wasser um 1 Grad erwärmt, sie ist im Stande, 1 kg 423,5 m zu heben, also 423,5 kgm Arbeit zu leisten.

Wir haben:

$A = \frac{1}{423,55}$ = das Wärmeäquivalent der Arbeitseinheit,

$B = 423,55$ = das Arbeitsäquivalent der Wärmeeinheit.

2) Wir führen folgende Bezeichnungen ein:

v das specifische Volumen eines Körpers in cbm pro kg,

p den specifischen Druck, d. h. den Normaldruck auf die Oberfläche,

c_v die specif. Wärme bei constantem Volumen,

c_d die specif. Wärme bei constantem Drucke,

t die Temperatur in Celsiusgraden,

$T = a + t = 273 + t$ die absolute Temperatur,

U die in 1 kg des Körpers enthaltene innere Arbeit in mkg (Energie),

$A\,U$ die entsprechende innere Wärme,

Q die Wärmemenge, welche bei einer Zustandsänderung einem kg des Körpers zugeführt wird (Wärmeeinheit pro kg),

$L = \int p\,d\,v$ die bei einer Zustandsänderung verrichtete, äussere Arbeit (mkg pro kg).

3) Soll v um $d\,v$, p um $d\,p$ wachsen, so ist die zuzuführende Wärmemenge gleich der Zunahme der inneren Wärmemenge plus der Wärmemenge, welche der zu verrichtenden äusseren Arbeit entspricht, also

$$d\,Q = A(d\,U + p\,d\,v).$$

Der Zustand eines Körpers ist im Allgemeinen eine Function von t (Temperatur), p (Druck), und v (Volumen). Wir können ferner jede dieser Grössen als Function der anderen darstellen, so dass wir haben:

$$t = \varphi\,(p, v), \quad p = \psi\,(t, v), \quad v = \vartheta\,(t, p).$$

Durch den Zustand des Körpers ist zugleich seine Energie bestimmt, demnach können wir U darstellen wie folgt:

$$U = \Phi(p, v), \quad U = \Psi(t, v), \quad U = \Theta(t, p),$$

und es werden folgende selbstverständliche Gleichungen gelten:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t\,\partial v} - \frac{\partial^2 U}{\partial v\,\partial t} = 0$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t\,\partial p} - \frac{\partial^2 U}{\partial p\,\partial t} = 0$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial v\,\partial p} - \frac{\partial^2 U}{\partial p\,\partial v} = 0.$$

Diese letzten Gleichungen gelten nur für Gleichgewichtszustände. Zur Bestimmung des Bewegungszustandes bedarf es einer viel grösseren Anzahl von Angaben.

4) Betrachten wir zunächst U als Function von p und v so folgt aus

$$d\,Q = A(d\,\Phi[u\,v] + p\,d\,v),$$

wenn

$$X = \frac{\partial\,\Phi}{\partial p}$$

$$Y = \left(\frac{\partial\,\Phi}{\partial\,v} + p\right)$$

gesetzt wird:

$$d\,Q = A(X\,dp + Y\,dv) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \text{A)}$$

und es wird

$$\frac{\partial X}{\partial v} - \frac{\partial Y}{\partial p} = 1 \quad \ldots\ldots \quad \text{I)}$$

(Erste Hauptgleichung der mechanischen Wärmetheorie.)

Daraus folgt, dass $X dp$ und $Y dv$ kein vollständiges Differential sein kann, weil sonst

$$\frac{\partial X}{\partial v} - \frac{\partial Y}{\partial p} = 0$$

sein müsste.

5) Seien nun t und v unabhängige Variable, so wird, wenn

$$c_v = A \frac{\partial \Psi}{\partial t}$$

$$l = A \left\{ \frac{\partial \Psi}{\partial v} + p \right\}$$

gesetzt wird:

$$d Q = c_v dt + l dv.$$

Wird $v = const.$, so folgt

$$d Q = c_v dt,$$

daher c_v die spec. Wärme bei constantem Volumen. Setzen wir t constant, so folgt

$$d Q = l dv$$

und es wird l die latente Wärme der Ausdehnung genannt.

Wir haben ferner:

$$\frac{\partial l}{\partial t} - \frac{\partial c_v}{\partial v} = A \frac{\partial p}{\partial t} \quad \ldots\ldots \quad \alpha)$$

6) Seien endlich t und p die unabhängigen Variablen, so wird, wenn

$$c_p = A \left\{ \frac{\partial \Theta}{\partial t} + p \frac{\partial v}{\partial t} \right\}$$

$$h = A \left\{ \frac{\partial \Theta}{\partial p} + p \frac{\partial v}{\partial p} \right\}$$

gesetzt wird:

$$d Q = c_p dt + h dp,$$

hier ist c_p die spec. Wärme bei constantem Druck. Man hat ferner

$$\frac{\partial h}{\partial t} - \frac{\partial c_p}{\partial p} = - A \frac{\partial v}{\partial t} \quad \ldots\ldots \quad \beta)$$

Sei allgemein

$$d\,Q = M\,d\,m + N\,d\,n,$$

so ist M diejenige Wärmemenge, die nöthig ist, um bei constantem n die m-Zunahme Eins zu bewirken. So ist z. B. h diejenige Wärmemenge, die nöthig ist, um bei constanter Temperatur die Druckzunahme gleich Eins zu bewirken.

7) Eine Zustandsänderung, bei welcher der Körper wieder in seinen Anfangszustand zurückkehrt, nennt man einen vollständigen Kreisprocess. Kann der Körper diese Zustandsänderung auch in umgekehrter Richtung durchlaufen, so entsteht ein umkehrbarer vollständiger Kreisprocess.

In jedem umkehrbaren Kreisprocess ist die algebraische Summe sämmtlicher Wärmemengen, jede einzelne dividirt durch die zugehörige absolute Temperatur, gleich Null, also

$$\sum \frac{d\,Q}{T} = 0$$

oder

$$\int \frac{d\,Q}{T} = 0.$$

Dieses Integral nennt Clausius die Entropie des Körpers, die Grösse

$$\frac{d\,Q}{T}$$

den Verwandlungswerth. Ist der Kreisprocess ein nicht umkehrbarer, so wird

$$\int \frac{d\,Q}{T} > 0,$$

also positiv. Die Entropie der Welt strebt einem Maximum zu, sagt Clausius.

8) Wir haben in dem Falle, wo

$$\int \frac{d\,Q}{T} = 0,$$

auch

$$\int \left(\frac{X}{T}\,dp + \frac{Y}{T}\,dv \right) = 0.$$

Daraus folgt aber

$$\frac{\partial}{\partial v} \left\{ \frac{X}{T} \right\} - \frac{\partial}{\partial p} \left\{ \frac{Y}{T} \right\} = 0,$$

oder, weil

$$\frac{\partial X}{\partial v} - \frac{\partial Y}{\partial p} = 1,$$

sofort

$$T = Y\frac{\partial T}{\partial p} - X\frac{\partial T}{\partial v} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad \text{II)}$$

(Zweite Hauptgleichung der mechan. Wärmetheorie.)

Diese Formel lässt sich auch schreiben:

$$T = Y\frac{\partial t}{\partial p} - X\frac{\partial t}{\partial v}.$$

9) **Mit Hülfe des soeben gefundenen Satzes können wir die Gleichung A) transformiren. Aus II) folgt**

$$Y = \frac{1}{\left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)}\left\{T + X\frac{\partial T}{\partial v}\right\},$$

dies in A) eingesetzt, giebt:

$$d\,Q = \frac{A}{\left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)}\{X d T + T d v\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad \text{B)}$$

Berechnet man ähnlich X, so folgt ebenso

$$d\,Q = \frac{A}{\left(\frac{\partial T}{\partial v}\right)}\{Y d T - T d p\} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad \text{C)}$$

10) Wir hatten ferner

$$dQ = c_v dt + l dv = c_v d T + l d v.$$

Sodann ist

$$\frac{d\,Q}{T} = \frac{c_v}{T}\,d\,T + \frac{l}{T}\,dv$$

ein vollständiges Differential, es muss also

$$\frac{\partial}{\partial v}\left\{\frac{c_v}{T}\right\} - \frac{\partial}{\partial T}\left\{\frac{l}{T}\right\} = 0$$

sein, woraus

$$l = T\left\{\frac{\partial l}{\partial T} - \frac{\partial c_v}{\partial v}\right\}$$

und wegen der Gleichung α)

$$l = A\,T\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad \text{III)}$$

Ebenso ergiebt sich aus

$$d Q = c_p d T + h d p$$

$$h = - A T \left(\frac{\partial v}{\partial T}\right) \quad \ldots\ldots\ldots \quad \text{IV)}$$

Die Gleichungen II), III) und IV) rühren von Thomson her. Zu diesen fügen wir noch hinzu die analogen

$$X = \frac{c_v}{A} \left(\frac{\partial T}{\partial p}\right) \quad \ldots\ldots\ldots \quad \text{V)}$$

$$Y = \frac{c_p}{A} \left(\frac{\partial T}{\partial v}\right) \quad \ldots\ldots\ldots \quad \text{VI)}$$

und erhalten aus I), II) und den Gleichungen für $d Q$

$$A = \frac{\partial}{\partial p} \left\{c_p \frac{\partial T}{\partial v}\right\} - \frac{\partial}{\partial v} \left\{c_v \frac{\partial T}{\partial p}\right\} \quad \ldots\ldots \quad \text{VII)}$$

$$A T = (c_p - c_v) \frac{\partial T}{\partial p} \cdot \frac{\partial T}{\partial v} \quad \ldots\ldots\ldots \quad \text{VIII)}$$

$$d Q = c_v \left(\frac{\partial T}{\partial p}\right) d p + c_p \left(\frac{\partial T}{\partial v}\right) d v \quad \ldots\ldots \quad \text{IX)}$$

$$d Q = c_v d T + \frac{A T}{\left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)} d v \quad \ldots\ldots\ldots \quad \text{X)}$$

$$d Q = c_p d T - \frac{A T}{\left(\frac{\partial T}{\partial v}\right)} d p \quad \ldots\ldots\ldots \quad \text{XI)}$$

B. Anwendung auf Gase.

1) Seien

$$v_1, p_1, t_1, T_1, U_1$$

die dem Anfangszustande,

$$v_2, p_2, t_2, T_2, U_2$$

die dem Endzustande entsprechenden Werthe von

$$v, p, t, T, U.$$

2) Es bestehen nun folgende Experimentalgesetze:

$$\frac{v p}{T} = const. = R,$$

dabei ist für trockene atmosphärische Luft

$$R = 29{,}27 \text{ mkg}.$$

Diese Constante für andere Gase wird erhalten, wenn R durch das specifische Gewicht des Gases dividirt wird.

(Das Mariotte-Gay-Lussac'sche Gesetz.)

Dieses Gesetz lässt sich auch anders schreiben. Seien v_0, p_0, T_0 die Werthe von v, p, T für eine beliebige Zustandsänderung des Gases, ferner

$$\frac{1}{a} = \alpha$$

gleich dem Ausdehnungscoefficienten des Gases, so wird

$$\frac{vp}{v_0 p_0} = \frac{1 + \alpha t}{1 + \alpha t_0} = \frac{T}{T_0}.$$

Für 1° C. Temperaturänderung ist $\alpha = 0{,}003665$.

3) Es ist

$$c_v = const. = A\,U\,T$$

für alle Gase.

(Das Regnault'sche Gesetz.)

4) Dehnt sich ein Gas, ohne Arbeit zu leisten, so ändert es seine Temperatur nicht.

(Das Regnault-Joule'sche Gesetz.)

Diese Gesetze sind nur approximativ giltig, dasselbe gilt von den auf sie basirten Formeln. Gase, von denen man sich vorstellt, dass sie diese Gesetze vollkommen erfüllen, nennt man ideale oder vollkommene Gase.

5) Wir erhalten damit aus den Gleichungen V), VI)

$$X = \frac{c_v v}{AR}, \quad Y = \frac{c_p p}{AR}$$

und aus VII)

$$AR = c_p - c_v.$$

Nun ist nach dem Regnault'schen Gesetze $c_v = const.$, wir haben also auch

$$c_p = const. = A\{UT + R\}.$$

Man findet aus IX), X), XI) sofort:

$$dQ = \frac{1}{R}\{c_v v\,dp + c_p p\,dv\}$$

$$dQ = c_v\,dT + A p\,dv$$

$$dQ = c_p\,dT - A v\,dp.$$

Aus III) und IV) folgt:

$$h = -Av$$

$$l = Ap$$

Ebenso ergiebt sich leicht:

$$d\,U = \frac{c_v}{A}\,d\,T,$$

d. h. die Energie eines Gases ist eine lineare Function der Temperatur.

6) Setzt man

$$\frac{c_p}{c_v} = \varkappa = 1{,}41\ldots,$$

so wird, für den Fall, dass ein Gas derartige Aenderungen erfährt, dass $d\,Q = 0$ ist,

$$p\,v^{\varkappa} = const.$$

(Das Gesetz von Poisson.)

In diesem Falle wird von aussen Wärme weder zu- noch abgeführt. Aus dieser Gleichung ergiebt sich:

$$\frac{p_2}{p_1} = \left(\frac{v_1}{v_2}\right)^{\varkappa}$$

$$\frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{v_1}{v_2}\right)^{\varkappa-1} = \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{\varkappa-1}{\varkappa}}.$$

7) Man hat (Rankine) drei bestimmte Zustandsänderungen mit besonderen Namen bezeichnet, und zwar:

I. Isotherme, wenn $d\,T = 0$,

II. Isodynamische, wenn $d\,U = 0$,

III. Adiabatische oder Calorische, wenn $dQ = 0$.

Bei den Gasen sind isotherme und isodynamische Curven dieselben. Sie sind gleichseitige Hyperbeln (Mariotte-Gay-Lussac'sches Gesetz).

Sei

$$c_p - c_v = \lambda,$$

so lassen sich adiabatische Curven darstellen durch

$$\left(\frac{T}{T_0}\right)^{c_v} = \left(\frac{v_0}{v}\right)^{\lambda}$$

$$\left(\frac{T}{T_0}\right)^{c_p} = \left(\frac{p}{p_0}\right)^{\lambda}$$

$$\left(\frac{p}{p_0}\right)^{c_v} = \left(\frac{v_0}{v}\right)^{c_p}.$$

Einfacher für vollkommene Gase:

Temperaturcurven durch $v\,p = const.$,

Calorische Curven " $v^{\varkappa}\,p = const.$

Die Ordinaten nehmen mit wachsenden Abscissen ab. Die calorische Curve ist die steilere.

8) Lässt man den Zustand eines Gases fortschreiten längs einer calorischen Curve, so wird

$$v_0^{\varkappa} p_0 = v^{\varkappa} p^{\varkappa}$$
$$v_0^{\varkappa-1}(a + t_0) = v^{\varkappa-1}(a + t).$$

Die zuzuführende Arbeit wird gleich

$$A c_v (t - t_0),$$

die zugeführte Wärme $= 0$.

9) Lässt man den Zustand eines Gases längs einer Temperaturcurve fortschreiten, so wird

$$v_0 p_0 = v p$$

und die Summe der zuzuführenden Arbeit und Wärme gleich Null, die zuzuführenden Wärmemengen stehen in arithmetischer, falls die Volumina eine geometrische Reihe bilden. Sei Q diese Wärmemenge, so wird

$$Q = \frac{v_0 p_0}{A} \log\left(\frac{v}{v_0}\right).$$

Daraus folgt weiter:

Nimmt man von zwei verschiedenen Gasen Quantitäten von verschiedenem Gewicht und verschiedener Temperatur, jedoch von gleichem Volumen v_0 und gleicher Spannung p_0 und lässt man sodann bei gleichbleibender Temperatur v_0 zu v sich ausdehnen, so sind die zuzuführenden Wärmemengen für beide Gase gleich gross. (Dulong-Clausius'scher Satz.)

10) Wenn ein Gas einen Carnot'schen, d. h. umkehrbaren Process, bestehend aus zwei calorischen und zwei isothermen Curven, vollführt, so ist der Nutzeffect (ökonomische Coefficient)

$$\zeta = \frac{T_1 - T_0}{T_1},$$

dabei ist ζ das Verhältniss der verbrauchten Wärme zu der überhaupt zugeführten. Für jeden anderen Process ist

$$\zeta < \frac{T_1 - T_0}{T_1},$$

sobald er sich innerhalb derselben Temperatur- und calorischen Curven abwickelt.

Literatur. Briot, Mechan. Wärmetheorie, d. v. Weber. Clausius, Die mechan. Wärmetheorie. Maxwell, Theorie der

Wärme, deutsch von Neesen. C. Neumann, Vorlesungen über mechanische Theorie der Wärme. Rühlmann, Handbuch der mechanischen Wärmetheorie. Zeuner, Grundzüge der mechanischen Wärmetheorie.

§. 177.

Kinetische Gastheorie.

1) Man nimmt an, dass die Wärmebewegung der Molekeln eines Gases in einer geradlinig mit gleichförmiger Geschwindigkeit fortschreitenden Bewegung bestehe.

2) Der Druck eines Gases variirt im umgekehrten Verhältnisse seines Volumens. {Das Boyle'sche Gesetz.}

Sei nämlich:

v das Volumen eines Gefässes,
n die Anzahl der darin enthaltenen Molecüle,
m die Masse eines jeden Molecüls,
c die Geschwindigkeit ihrer Bewegung,
p der Druck des Gases pro Flächeneinheit, so wird

$$p = \frac{n m c^2}{3 v}$$

die Grundgleichung der kinetischen Gastheorie, aus ihr folgt

$$p v = \frac{n m c^2}{3} = const.,$$

also das Boyle'sche {oder Mariotte'sche Gesetz}.

3) Sei T die absolute Temperatur (also $T = 273 + t^0$ C. nahezu), so wird

$$p v = R T,$$

also

$$T = \frac{2}{3 R} \frac{n m c^2}{2},$$

demnach wird die Temperatur proportional dem Quadrate der Geschwindigkeit der Molecüle.

4) Aus den Fundamentalgleichungen ergiebt sich sofort: Werden mehrere Gase gemischt, so ist der von der Mischung ausgeübte Druck gleich der Summe der Druckkräfte, welche jeder Bestandtheil für sich allein ausübt. (Dalton's Gesetz.)

5) Die Moleculargeschwindigkeiten zweier Gase verhalten sich umgekehrt, wie die Quadratwurzeln aus den Dichtigkeiten.

6) Wenn zwei Gase gleiche Temperatur besitzen und zugleich unter gleichem Drucke stehen, so verhalten sich ihre Dichtigkeiten, wie ihre Moleculargewichte. (Gay-Lussac's Gesetz.)

7) Stehen zwei Gase von gleicher Temperatur unter gleichem Drucke, so enthalten sie in gleichen Räumen gleiche Anzahl von Molekeln. (Avogadro'sche Regel.)

Literatur: Meyer, Kinetische Theorie der Gase. Breslau 1877.

§. 178.

Capillarität.

1) Seien α und β zwei Constanten, ferner θ derjenige Winkel, den die Normale der Flüssigkeitsoberfläche mit der Normalen der Gefässwand einschliesst, so wird

$$\alpha \cos \theta + \beta = 0.$$

Seien ϱ und ϱ_1 die beiden Hauptkrümmungsradien der Oberfläche, s das specifische Gewicht, z die Höhe der erhobenen, beziehungsweise der deprimirten Flüssigkeit, h die normale Höhe, so wird

$$\alpha \left(\frac{1}{\varrho} + \frac{1}{\varrho_1}\right) = s\,(h - z).$$

Die Grössen haben folgende Bedeutung:

α, Capillaritätsconstante nach Quincke = dem Gewichte der Flüssigkeitsmasse, welche an der Längeneinheit der Berührungslinie einer vollkommen benetzten Wand gehoben wird. (Für die unvollkommene Benetzung ist dieses Gewicht $= \alpha \cos \theta$.)

Man setzt

$$1)\quad \frac{H}{2} = \alpha,$$

sodann wird H die Oberflächenspannung per Flächeneinheit auf einer Kugel vom Radius Eins.

$$2)\quad a^2 = \frac{H}{s} = \frac{2\alpha}{s}.$$

Sodann ist a die Steighöhe einer Flüssigkeit an einer von ihr vollkommen benetzten Wandfläche. Bei unvollkommener Benetzung ist diese Steighöhe $= a\sqrt{1 - \sin\theta}$.

a^2, Capillaritätsconstante nach Poisson (specifische Cohäsion nach Quincke) = Steighöhe einer Flüssigkeit in einer von ihr vollkommen benetzten Röhre vom Radius Eins.

2) Untersuchen wir die Steighöhe an einer Platte. Hier wird $\varrho_1 = \infty$, also $\frac{1}{\varrho_1} = 0$. Sei h eine beliebige Steighöhe, φ der zugehörige Winkel, den die Tangente mit der verticalen Wand einschliesst, so wird

$$-\varrho\, d\varphi \cos\varphi = dh,$$

oder da

$$\frac{\alpha}{\varrho} = s h$$

$$-\frac{\alpha}{s}\, d\varphi \cos\varphi = h\, dh,$$

woraus

$$h = a\sqrt{1 - \sin\varphi}$$

folgt.

3) Bei hinreichend engen Steigröhren sind die Steighöhen oder Depressionen der Flüssigkeit dem Halbmesser der Röhren umgekehrt proportional.

Wird nämlich der Meniscus der Halbkugel gleich, so ist $\varrho = \varrho_1$, also

$$\frac{2\alpha}{\varrho} = s(h - z).$$

Ist die Röhre nicht so eng, dass der Meniscus eine Halbkugel bildet, so wird

$$h = \frac{a^2}{\varrho} - \frac{\varrho}{3}$$

näherungsweise.

Die Steighöhe zwischen zwei Platten ist umgekehrt proportional dem Abstande der beiden Platten.

Einige Literatur findet man in Lang: Einleitung in die theoretische Physik. Sonst ist zu nennen: Beer, Einleitung in die mathem. Theorie der Elasticität und Capillarität. Mathieu, Théorie de la Capillarité, Paris 1883. Lesenswerth sind die Abschnitte über Capillarität in der eigenartigen Mechanik von Mach.

§. 179.

Die Mechanik.

I. Zur Einleitung.

Die Mechanik ist die Wissenschaft von der Bewegung; als ihre Aufgabe bezeichnen wir: die in der Natur vor sich gehenden Bewegungen vollständig und auf einfachste Weise zu beschreiben (Kirchhoff). Man hat die Mechanik zur Grundlage alles unseres Wissens machen wollen, man hat aber dabei vergessen, dass sie nicht die Grundlagen, auch nicht einen Theil der Welt, sondern eine Seite derselben fasst (Mach). Dass sie wirklich die Grundlage aller Wissenschaften geworden, hat seinen Grund in der Geschichte (Mach). Wie alles Naturwissen, so kann auch die Mechanik nur Complexe von jenen Elementen nach- und vorbilden, die wir Empfindungen nennen. Es handelt sich um den Zusammenhang dieser Empfindungen. Die mechanischen Vorgänge sind zugleich auch physiologische. Keine ist allein da, beide sind zugleich da. Daher soll die Mechanik den sparsamsten und einfachsten begrifflichen Ausdruck der Bewegungsempfindungen liefern. Darin liegt zugleich der ökonomische Charakter dieser Wissenschaft (Mach).

Raum, Zeit, Bewegung und Materie sind Begriffe, von deren Existenz wir uns nur durch die Empfindungen überzeugen können. Von ihrer Existenz ausserhalb der Empfindungen wissen wir nichts. Die Empfindungen neben einander nennen wir Raum, die nach einander Zeit, eine räumlich-zeitliche Empfindung nennen wir Bewegung. Den Träger der Empfindungen nennen wir Materie.

Die Principe der Mechanik entnehmen wir der Erfahrung. Das erste Princip der Dynamik, das Trägheitsgesetz, hat Galilei (1632) ausgesprochen. Das zweite Princip von der Zusammensetzung der Bewegungen rührt von Huyghens (1673) her; das dritte von der Gleichheit der Wirkung und Gegenwirkung verdanken wir Newton (1687). Die Coordinaten-Methode führte Maclaurin (1742) ein, nachdem früher Leibnitz die Differentialbezeichnung eingeführt hatte.

Die Masse ist die Quantität der Materie. Das Gewicht ein Product aus der Masse in die Beschleunigung.

Die Beschleunigung selbst ist von der Natur der Materie unabhängig, was Aristoteles noch nicht wusste, wenn er behauptet, dass schwere Körper schneller fallen als leichte. Dieser Satz wurde zuerst von Galilei behauptet, aber erst von Newton bewiesen, indem letzterer zeigte, dass zwei gleiche Pendel von verschiedener Materie gleich schwingen.

Die Vollendung der Mechanik als Wissenschaft wird dann eintreten, wenn an die Stelle der Elementargesetze, welche gegenwärtig unser Wissen ausmachen, Integralgesetze treten werden, so dass wir sodann direct die Abhängigkeit der Lagen der Körper von einander erkennen werden (Neumann).

Wer sich Klarheit über die Aufgaben der Mechanik verschaffen will, dem sei empfohlen das hochinteressante Werk: Die Mechanik in ihrer Entwickelung von Dr. E. Mach (Leipzig 1883), sowie eine Abhandlung von C. Neumann in den Sitzungsber. der königl. sächs. Akademie 1887, I. u. II.

Einige Lehrbücher.

Delaunay, Traité de Mécanique ration. Auch deutsch mehrere Auflagen. Duhamel, Lehrb. der analyt. Mechanik, deutsch von Schlömilch. Euler, Mechanica, deutsch von Wolfers. Jacobi, Vorlesungen über Dynamik, herausgegeben von Clebsch. Kirchhoff, Vorlesungen über mathematische Physik. Lagrange, Mécanique analyt., deutsch von H. Servus. Mathieu, Dynamique analytique. Navier, Lehrbuch der höheren Mechanik, deutch von Meyer. Poinsot, Elemente der Statik, deutsch von Servus. Poinsot, Théorie nouv. de la rot. d. corps, deutsch von Schellbach. Poisson, Traité de Mécanique, deutsch von Stern. Schell, Theorie der Bewegung und der Kräfte. Sommof, Theoretische Mechanik, deutsch von Ziewet. Thomson und Tait, Handbuch der theoretischen Physik, deutsch von Helmholz und Wertheim. Maxwell, Substanz und Bewegung, deutsch von Fleischl. (Ein äusserst interessantes Büchlein, 1 Mk. 20 Pf.)

Sodann die Aufgabensammlungen von Fuhrmann und Zech. Die grösseren von Kraft, Jullien (französisch) und Walton (englisch).

II. Allgemeine Sätze.

Wir betrachten zunächst die Bewegung eines Punktes, oder eines Systems von Punkten. Sodann gelten folgende Sätze und Betrachtungen.

1) Die Bewegung eines materiellen Punktes ist bestimmt sobald für einen Ort zur Zeit t die Coordinaten und die Componenten der Geschwindigkeit u_0, v_0, w_0 gegeben sind und ausserdem für jedes t die Werthe der zweiten Differentialquotienten. Also

$$x_0, \quad y_0, \quad z_0$$

$$u_0 = \frac{d x_0}{d t_0}, \quad v_0 = \frac{d y_0}{d t_0}, \quad w_0 = \frac{d z_0}{d t_0},$$

$$\frac{d^2 x}{d t^2} = X, \quad \frac{d^2 y}{d t^2} = Y, \quad \frac{d^2 z}{d t^2} = Z,$$

denn dann sind wir im Stande, x, y, z als Functionen der Zeit t darzustellen. Die Grössen X, Y und Z nennt man Componenten der Beschleunigung.

2) Ist der Punkt gezwungen, auf einer Fläche $\varphi(x, y, z, t) = 0$ sich zu bewegen, so kommen noch zu den Componenten X, Y, Z die Componenten X', Y', Z' hinzu, die wir in folgender Weise ausdrücken wollen:

$$X' = \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad Y' = \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad Z' = \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial z}.$$

Sodann wird

$$\frac{d^2 x}{d t^2} = X + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial x}$$

$$\frac{d^2 y}{d t^2} = Y + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial y}$$

$$\frac{d^2 z}{d t^2} = Z + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial z}.$$

Um λ zu bestimmen, bilden wir

$$\frac{d^2 \varphi}{d t^2} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{d^2 x}{d t^2} + \cdots$$

und ersetzten hierin $d^2 x/d t^2 \ldots$ durch die Werthe aus den vorangehenden Gleichungen, sodann ergiebt sich λ als Function von

$$x, y, z, t, \frac{d x}{d t}, \frac{d y}{d t}, \frac{d z}{d t}.$$

Verallgemeinern wir diese Betrachtungsweise, so erhalten wir die allgemeinen, zuerst von Lagrange aufgestellten Gleichungen:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = X + \lambda\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \mu\frac{\partial\psi}{\partial x} + \cdots$$
$$m\frac{d^2y}{dt^2} = Y + \lambda\frac{\partial\varphi}{\partial y} + \mu\frac{\partial\psi}{\partial y} + \cdots$$
$$m\frac{d^2z}{dt^2} = Z + \lambda\frac{\partial\varphi}{\partial z} + \mu\frac{\partial\psi}{\partial z} + \cdots$$

Mit den Bedingungsgleichungen

$$\varphi = 0, \quad \psi = 0 \ldots$$

3) Ertheilen wir diesem System eine unendlich kleine Verschiebung δx, δy, δz derart, dass

$$\sum\frac{\partial\varphi}{\partial x}\delta x = 0, \quad \sum\frac{\partial\psi}{\partial x}\delta x = 0, \ldots$$

so ergiebt sich das d'Alembert'sche Princip

$$0 = \sum\left\{\left(m\frac{d^2x}{dt^2} - X\right)\delta x + \left(m\frac{d^2y}{dt^2} - Y\right)\delta y + \left(m\frac{d^2z}{dt^2} - Z\right)\delta z\right\}.$$

4) Den Werth von

$$X\delta x + Y\delta y + Z\delta z$$

nennt man die Arbeit der Kraft (XYZ) für die Verrückung δx, δy, δz. Setzen wir noch

$$\sum\{X\delta x + Y\delta y + Z\delta z\} = \delta U,$$

also U' gleich der Arbeit der Kräfte, ferner

$$T = \frac{1}{2}\sum m\left\{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2\right\} = \frac{1}{2}\sum mv^2,$$

wo T die sogenannte lebendige Kraft des Systems darstellt, so folgt:

$$\left[\sum m\left\{\frac{dx}{dt}\delta x + \frac{dy}{dt}\delta y + \frac{dz}{dt}\delta z\right\}\right]_{t_1}^{t_0} = \int_{t_0}^{t_1} dt(\delta T + \delta U).$$

Verschwinden nun die Variationen δx, δy, δz sämmtlich für t_1 und t_0, so wird

$$0 = \int_{t_0}^{t_1} dt(\delta T + \delta U),$$

welche Gleichung das **Hamilton'sche Princip** enthält. Dasselbe lässt sich auch schreiben wie folgt:

$$0 = \delta \int_t^t (T + U)\, dt.$$

5) Führt man in die Lagrange'schen Gleichungen an die Stelle der alten Variabeln x, y, z neue q ein, deren Zahl $\mu = 3n - x$ ist, wobei n die Anzahl der Punkte, und x jene der Bedingungsgleichungen ist, und welche so gewählt sind, dass sie die Bedingungsgleichungen identisch erfüllen, und setzt noch

$$Q = \sum m \left\{\frac{d^2 x}{dt^2}\frac{\partial x}{\partial q} + \frac{d^2 y}{dt^2}\frac{\partial y}{\partial q} + \frac{d^2 z}{dt^2}\frac{\partial z}{\partial q}\right\},$$

so ergeben sich die sogenannten **zweiten Lagrange'schen** Gleichungen:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial q'} - \frac{\partial T}{\partial q} = Q,$$

wobei der Kürze wegen

$$q' = \frac{dq}{dt}$$

gesetzt wurde.

6) Ersetzt man in der d'Alembert'schen Gleichung δx, δy, δz durch dx, dy, dz und integrirt, so folgt:

$$T_1 - T_0 = \int_{t_0}^{t_1} \sum (X dx + Y dy + Z dz).$$

Dieser **Satz von der lebendigen Kraft** besagt, dass der Zuwachs, den die lebendige Kraft des Systems in irgend einem Zeitintervall erleidet, gleich der Arbeit der wirkenden Kräfte für die Verschiebungen ist, die die Punkte in diesem Zeitintervall erfahren.

Existirt ein Potential, welches die Zeit nicht enthält, so lässt sich die obige Gleichung auch schreiben wie folgt:

$$T = U + h,$$

wobei U das Potential, und h eine Constante ist. Ist U eine einwerthige Function, so folgt hieraus, dass, wenn alle Punkte des Systems in Lagen zurückkehren, die sie schon einmal hatten, auch die lebendige genau denselben Werth annehmen wird, den sie damals besass. (**Satz von der Erhaltung der lebendigen Kraft.**)

Der obige Satz lässt sich auch schreiben wie folgt:

$$\frac{1}{2}\sum(m v^2 - m v_0^2) = \sum \int_{s_0}^{s} P \cos(P, d s) d s,$$

wobei P die Kraft bezeichnet.

7) Aendert sich bei einer Translation des Systems die relative Lage der Punkte gegen einander nicht, so wird:

$$\sum m \frac{d^2 x}{d t^2} = \sum X$$

$$\sum m \frac{d^2 y}{d t^2} = \sum Y$$

$$\sum m \frac{d^2 z}{d t^2} = \sum Z.$$

Sei nun

$$M = \sum m, \quad M\xi = \sum m x$$

$$M\eta = \sum m y, \quad M\zeta = \sum m z,$$

so folgt:

$$M \frac{d^2 \xi}{d t^2} = \sum X$$

$$M \frac{d^2 \eta}{d t^2} = \sum Y$$

$$M \frac{d^2 \zeta}{d t^2} = \sum Z,$$

wodurch der Satz von der **Bewegung des Schwerpunktes** ausgesprochen ist. Wirken keine äusseren Kräfte, so ist

$$\frac{d^2 \xi}{d t^2} = 0, \quad \frac{d^2 \eta}{d t^2} = 0, \quad \frac{d^2 \zeta}{d t^2} = 0,$$

d. h. der Schwerpunkt bewegt sich geradlinig mit gleichbleibender Geschwindigkeit (**Satz von der Erhaltung der Bewegung des Schwerpunktes**).

8) Aendern die Punkte auch bei einer Rotationsbewegung ihre relativen Lagen nicht, so wird, wenn die Rotationsaxe die z-Axe ist:

$$\frac{d}{d t}\sum m\left(x \frac{d y}{d t} - y \frac{d x}{d t}\right) = \sum(x Y - y X)$$

oder

$$x = \varrho \cos\theta, \quad y = \varrho \sin\theta$$

gesetzt

$$\frac{d}{dt}\sum m\varrho^2\frac{d\theta}{dt}=\sum(xY-yX).$$

Dies ist der sogenannte **Flächensatz** für die xy-Ebene. Wirken keine äusseren Kräfte, so wird

$$\sum m\varrho^2\frac{d\theta}{dt}=const.,$$

welche Gleichung den **Satz von der Erhaltung der Flächen** ausspricht.

Analoge Formeln erhält man, indem man nach einander die x- und y-Axe als Drehungsaxe annimmt. Alle zusammen stellen die allgemeinen Flächensätze dar.

III. Geometrie der Bewegung.

1) Bewegt sich ein Körper parallel zu einer Ebene, so kann er stets durch drei Punkte bestimmt gedacht werden, die ihrerseits wieder eine Ebene bestimmen. Die Symmetralen je zweier unendlich nahen Lagen dieser drei Punkte gehen durch einen Punkt, das sogenannte **Momentancentrum**. Nennen wir die durch den Körper bestimmte Ebene E', jene feste parallel, zu welcher die Bewegung vor sich geht, E, so wird das Momentancentrum im Verlaufe der Bewegung auf beiden Ebenen Spuren zurücklassen, die wir die Curven C und Γ nennen wollen. Sodann reducirt sich die Bewegung dieses Körpers auf das Rollen zweier Curven auf einander.

2) Um die analytischen Ausdrücke für die Curven C und Γ zu finden, beachten wir Folgendes: Wir fixiren zwei Punkte des Systems, deren unveränderlicher Abstand a sein soll. Diese werden während der Bewegung zwei Curven α und β beschreiben. Seien $x_1 y_1$ und $x_2 y_2$ ihre Coordinaten, so wird jederzeit die Gleichung

$$(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2=a^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 1)$$

bestehen. Dabei denken wir uns $x_1 y_1$ als Functionen einer Variablen, t_1 und $x_2 y_2$ als Variable von t_2. Ferner nehmen wir in der Bewegungsebene ein festes Coordinatensystem XY, und ein bewegliches $\xi\eta$ an. Das letztere soll die Mitte von a zum Ursprung haben und so beschaffen sein, dass a mit der ξ-Axe zusammenfällt.

Sei nun

$$x_1 - x_2 = a \cos \lambda, \quad y_1 - y_2 = a \sin \lambda \;.\;.\;.\;.\;.\; 2)$$

so giebt λ die gegenseitige Neigung der beiden Coordinatensysteme an und es wird:

$$\left.\begin{aligned} X - \frac{1}{2}(x_1 + x_2) &= \xi \cos \lambda - \eta \sin \lambda \\ Y - \frac{1}{2}(y_1 + y_2) &= \xi \sin \lambda + \eta \cos \lambda \end{aligned}\right\} \;.\;.\;.\;.\; 3)$$

Der Schnittpunkt der Normalen giebt das Momentancentrum. Dieses liefert:

$$\left.\begin{aligned} (y_1 - Y)\frac{d y_1}{d t} + (x_1 - X)\frac{d x_1}{d t} &= 0 \\ (y_2 - Y)\frac{d y_2}{d t} + (x_2 - X)\frac{d x_2}{d t} &= 0 \end{aligned}\right\} \;.\;.\;.\;.\; 4)$$

Aus diesen Gleichungen 1) bis 5) erhält man:

A. Die Gleichung der Bahn eines beliebigen Systempunktes. Dabei hat man ξ und η als seine Coordinaten zu betrachten und ohne Zuhülfenahme von 4) die Grössen ξ, η, t_1 und t_2 zu eliminiren aus 1) 2) 3).

B. Die Gleichungen der Curven C und Γ, wenn man aus 1) bis 4) die Grössen λ, t_1, t_2, und entweder noch ξ, η oder X, Y eliminirt.

3) Durch Transformation vermittelst der Methode der reciproken Radien erhalten wir sofort die Relationen für die Drehung und Bewegung eines Körpers parallel einer Kugelfläche. Der Transformationsmittelpunkt verbunden mit dem Momentancentrum giebt die Momentanaxe. Der Transformationsmittelpunkt und die Curven C und Γ bestimmen zwei Kegelflächen, welche den Curven C und Γ entsprechen.

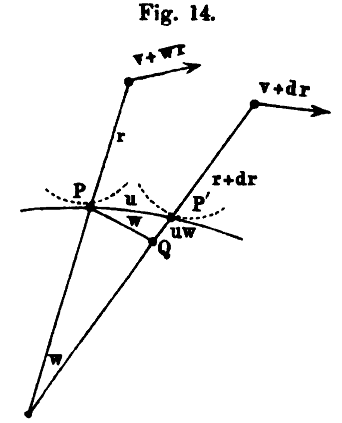
4) Es bezeichne für das System in 1) w die Winkelgeschwindigkeit, $d\vartheta$ das Differential des Rotationswinkels um die Momentanaxe zur Zeit t, u die Geschwindigkeit des Momentancentrums, v die Geschwindigkeit eines Systempunktes in der Entfernung r vom Momentancentrum, ds das Bogenelement der Curve der Momentancentra, und ϱ und ϱ_1 die Krümmungshalbmesser der Curven C und Γ für den augenblicklichen Berührungspunkt, so ist

$$w = \frac{d\vartheta}{dt}, \quad v = wr = \frac{ds}{dt}$$

$$\frac{u}{w} = \frac{\varrho\,\varrho_1}{\varrho_1 \pm \varrho}$$

und zwar gilt in der letzten Formel das obere oder unte Zeichen, je nachdem die benachbarten Theile der Curven a entgegengesetzte oder dieselben S ten der gemeinschaftlichen Tangen fallen.

Fig. 14.



5) Die Bewegung des Mome tancentrums längs der festen Cur kann aufgefasst werden als ei neben der Drehbewegung PQ sta findende fortschreitende Bewegu QP' von der Beschleunigung u in der Richtung der Normalen d beiden Curven. Würde der auge blickliche Drehpunkt seine La nicht ändern, so würde sich d Beschleunigung eines Punktes z sammensetzen aus der Centripetalbeschleunigung rw^2 und d Tangentialbeschleunigung

$$r\,\frac{dw}{dt},$$

so kommt aber noch die Beschleunigung uw hinzu.

Wählt man die Tangente der Curve der Momentancent als X-Axe positiv im Sinne der Geschwindigkeit u, und d Normale als X-Axe positiv im Sinne der Beschleunigung w so sind die Componenten der Beschleunigung längs den Coord natenaxen

$$X \cdots -w^2 x + \frac{dw}{dt}\,y = p_x$$

$$Y \cdots -w^2 y - \frac{dw}{dt}\,x + uw = p_y.$$

Sei $p_x = 0$, so erhält man eine Gerade, in welcher die B schleunigungen parallel sind der X-Axe, ebenso liefert p_y d Beschleunigungen parallel zur X-Axe. In ihrem Schnittpunk P wird die Totalbeschleunigung 0 sein (Beschleunigung centrum).

Die Coordinaten dieses Punktes sind:

$$x_1 = \frac{w u \frac{d w}{d t}}{w^4 + \left(\frac{d w}{d t}\right)^2}, \quad y_1 = \frac{w^3 u}{w^4 + \left(\frac{d w}{d t}\right)^2}.$$

Die Componenten der Beschleunigung in der Richtung des Momentancentrums und senkrecht darauf sind:

$$p_n = r w^2 - \frac{u w}{r} y = X \frac{x}{r} + Y \frac{y}{r} = \frac{v^2}{\varrho} = \frac{w^2 r^2}{\varrho}$$

$$p_t = r \frac{d w}{d t} - \frac{u w}{r} x = X \frac{y}{r} - Y \frac{x}{r},$$

wobei ϱ der Krümmungsradius der Bahn ist. Setzt man $p_n = 0$, $p_t = 0$, so erhält man zwei Kreise (Bresse'sche Kreise, Journ. de l'École. Polyt. 1853). $p_t = 0$ giebt $\frac{d v}{d t} = 0$, d. h. v ein Maximum oder Minimum, die Geschwindigkeit wechselt also das Zeichen (Wechselkreis). $p_n = 0$ giebt $v^2/\varrho = 0$ oder $\varrho = \infty$, die Bahn hat also hier einen Wendepunkt (Wendekreis).

Die Gleichung des Wendekreises lautet

$$x^2 + y^2 = \frac{u}{w} y,$$

jene des Wechselkreises ist:

$$x^2 + y^2 = \frac{w u}{2 \frac{d w}{d t}}.$$

Die Punkte gleicher Beschleunigung β liegen auf einem um das Beschleunigungscentrum beschriebenen Kreise, dessen Gleichung

$$\xi^2 + \eta^2 = \frac{\beta^2}{w^4 + \left(\frac{d w}{d t}\right)^2}$$

ist. Die Totalbeschleunigung ist gegeben durch

$$p = \sqrt{p_x^2 + p_y^2}.$$

IV. Die Geschwindigkeiten.

1) Seien v_x, v_y, v_z die Projectionen der Geschwindigkeit v auf die drei rechtwinkligen Axen, sowie α, β, γ die Neigungswinkel der Tangente im Punkte x, y, z der Bahn, so wird

$$v_x = \frac{dx}{dt} = v \cos\alpha, \quad v_y = \frac{dy}{dt} = v \cos\beta,$$

$$v_z = \frac{dz}{dt} = v \cos\gamma,$$

$$v^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2, \quad \frac{\cos\alpha}{v_x} = \frac{\cos\beta}{v_y} = \frac{\cos\gamma}{v_z}.$$

Sind mehrere Geschwindigkeiten $v_1, v_2, \ldots v_n$ eines Punktes gegeben, welche mit den Coordinatenaxen die Winkel... $(\alpha_n \beta_n \gamma_n)$ bilden, so sind die äquivalenten Geschwindigkeiten V_x, V_y, V_z gegeben durch

$$V_x = \sum v_n \cos\alpha_n, \quad V_y = \sum v_n \cos\beta_n, \quad V_z = \sum v_n \cos\gamma_n,$$

und die Resultirende

$$V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2},$$

für deren Richtungswinkel a, b, c die Gleichungen

$$\frac{\cos a}{V_x} = \frac{\cos b}{V_y} = \frac{\cos c}{V_z} = \frac{1}{V}$$

bestehen.

Es gilt die Regel: Die Resultante von beliebig vielen Geschwindigkeiten eines Punktes wird nach Grösse, Richtung und Sinn durch die Schlusslinie eines Polygonzuges dargestellt, dessen Seiten, in beliebiger Ordnung genommen, der Grösse, Richtung und dem Sinne nach mit den einzelnen Geschwindigkeiten übereinstimmen (Polygon der Geschwindigkeiten).

2) Seien ferner r (Radiusvector), ϑ (Winkel zwischen r und der Polaraxe) und φ (der Winkel zwischen der Ebene des Winkels ϑ und einer Fundamentalebene) die Polarcoordinaten, so sind die ihnen entsprechenden Geschwindigkeiten:

$$v_r = \frac{dr}{dt}, \quad v_\vartheta = r\frac{d\vartheta}{dt}, \quad v_\varphi = r \sin\vartheta \frac{d\varphi}{dt}.$$

Die Grösse $\frac{d\vartheta}{dt}$ wird die Winkelgeschwindigkeit genannt und mit w bezeichnet. Die Winkelgeschwindigkeiten setzen sich nach dem Polygon der Geschwindigkeiten zusammen.

3) Betrachten wir ein unveränderliches System, dessen Punkte während der Zeit dt sämmtlich parallele und congruente Wege beschreiben. Alsdann wird

$$v = \frac{ds}{dt},$$

die **Translationsgeschwindigkeit** des Systems genannt. Es besitze das System ferner eine unendlich kleine Rotation $d\vartheta$ um eine Axe α. Wir nennen sodann

$$w = \frac{d\vartheta}{dt}$$

die **Winkelgeschwindigkeit des Systems** um die Axe α.

Die gleichzeitige Verbindung einer beliebigen Menge von Winkelgeschwindigkeiten eines unveränderlichen Systems um beliebige Axen ist äquivalent einer Winkelgeschwindigkeit Ω und einem Rotationspaare T (einer Translationsgeschwindigkeit), für welche folgende Gleichungen gelten:

$$\Omega_x = \sum w_x, \quad \Omega_y = \sum w_y, \quad \Omega_z = \sum w_z$$

$$\Omega^2 = \Omega_x^2 + \Omega_y^2 + \Omega_z^2$$

$$\frac{\cos a}{\Omega_x} = \frac{\cos b}{\Omega_y} = \frac{\cos c}{\Omega_z} = \frac{1}{\Omega}$$

$$T_x = \sum (y w_x - x w_y), \quad T_y = \sum (z w_x - x w_z)$$

$$T_z = \sum (x w_y - y w_x)$$

$$T^2 = T_x^2 + T_y^2 + T_z^2$$

$$\frac{\cos\lambda}{T_x} = \frac{\cos\mu}{T_y} = \frac{\cos\nu}{T_z} = \frac{1}{T}.$$

Der Winkel zwischen der Axe von Ω und T ist bestimmt durch

$$\cos\psi = \frac{\Omega_x T_x + \Omega_y T_y + \Omega_z T_z}{\Omega\, T}.$$

Soll sich das System auf eine blosse Winkelgeschwindigkeit Ω reduciren, so muss

$$\Omega_x T_x + \Omega_y T_y + \Omega_z T_z = 0$$

sein.

Sollen dagegen sämmtliche Winkelgeschwindigkeiten einem Rotationspaare äquivalent sein, so muss $\Omega = 0$, d. h.

$$\sum w_x = 0, \quad \sum w_y = 0, \quad \sum w_z = 0$$

sein. Das System ist momentan ein Stillstand, wenn $\Omega = 0$ und $T = 0$, also

$$\sum w_x = 0 \ldots$$

$$\sum (y w_x - x w_y) = 0 \ldots$$

4) Die relative Geschwindigkeit eines Punktes ist die Resultante aus der absoluten Geschwindigkeit desselben und der im entgegengesetzten Sinne genommenen Geschwindigkeit des mit ihm zusammenfallenden Punktes des Systems, auf welches die relative Bewegung sich bezieht.

V. Die Beschleunigungen.

1) Analog den Geschwindigkeiten bezeichnen wir die Beschleunigungen mit φ, sodann wird:

$$\frac{d^2 x}{d t^2} = \varphi_x = \varphi \cos \alpha$$

$$\frac{d^2 y}{d t^2} = \varphi_y = \varphi \cos \beta$$

$$\frac{d^2 z}{d t^2} = \varphi_z = \varphi \cos \gamma$$

$$\varphi^2 = \varphi_x^2 + \varphi_y^2 + \varphi_z^2, \quad \frac{\cos \alpha}{\varphi_x} = \frac{\cos \beta}{\varphi_y} = \frac{\cos \gamma}{\varphi_z} = \frac{1}{\varphi}.$$

2) Die Beschleunigung kann auch in eine Tangentialbeschleunigung φ_t und in eine Normalbeschleunigung φ_n jederzeit zerlegt werden. Die letztere ist längs der Hauptnormalen nach dem Krümmungsmittelpunkte hin gerichtet. Es ist

$$\varphi_t = \frac{d v}{d t}$$

$$\varphi_n = \frac{v^2}{\varrho} = \varrho \left(\frac{d \varepsilon}{d t}\right)^2,$$

wo ϱ der Krümmungshalbmesser, und $d \varepsilon / d t$ die Winkelgeschwindigkeit um den Krümmungsmittelpunkt bezeichnet.

3) Sei c die Sehne, welche die Richtung der Beschleunigung im Krümmungskreise bestimmt, so wird

$$v^2 = \frac{1}{2} c \varphi.$$

4) Die Deviation δ eines Punktes (d. h. die Abweichung des beweglichen Punktes von der Tangente in der Richtung der Beschleunigung nach Verlauf von dt) ist gegeben durch

$$\delta = \frac{1}{2} \varphi . dt^2.$$

5) Bezüglich der Beschleunigungen eines unveränderlichen Systems, welches sich parallel zu einer Ebene bewegt, vergleiche Nr. III., S. 638.

6) Die Beschleunigung eines Punktes für die allgemeinste Bewegung eines unveränderlichen Systems besteht aus vier Componenten.

I. Aus einer centripetalen, normal zur Momentanaxe

$$w^2 r$$

gleich dem Producte aus dem Quadrate der Winkelgeschwindigkeit (w) um die Momentanaxe in den Abstand (r) des Punktes von dieser.

II. Aus der Beschleunigung

$$\alpha p$$

gleich dem Producte aus der Winkelbeschleunigung (α) und dem Abstand (p) des Punktes von deren Axe. Ihre Richtung ist normal zu der Ebene, welche der Momentanaxe und der Axe der Winkelbeschleunigung parallel läuft.

III. Aus der Beschleunigung

$$w u$$

senkrecht zu der durch die Momentanaxe und die Richtung von u gelegten Ebene, und

IV. Aus der Translationsbeschleunigung des Systems.

7) Die relative Beschleunigung eines Punktes in Bezug auf ein bewegliches System besteht aus drei Componenten (Satz von Coriolis).

I. Aus der absoluten Beschleunigung des Punktes.

II. Aus der entgegengesetzt genommenen Beschleunigung des mit ihm zusammenfallenden Systempunktes.

III. Aus der zusammengesetzten Centrifugalbeschleunigung, welche dem Werthe nach gleicht dem doppelten Producte aus

der Winkelgeschwindigkeit des Systems um die Momentanaxe in die Projection der relativen Geschwindigkeit auf eine zur Momentanaxe senkrechte Ebene. Diese Componente steht senkrecht auf einer durch diese Axe und die relative Geschwindigkeit gehenden Ebene; der Sinn ihrer Richtung ist entgegengesetzt dem Sinne der augenblicklichen Drehung des Systems; sie kann daher als Axe einer Drehung betrachtet werden, welche die Richtung der relativen Geschwindigkeit auf dem kürzesten Wege in die Richtung der augenblicklichen Drehungsaxe überführt.

Coriolis (Journ. de l'école polyt., Tom. XV, Cah. XXIV) nennt die zweite Componente „force d'entraînement". Specielle Fälle dieses Satzes kannten schon Newton (für progressive) und Clairaut (für drehende Bewegung).

§. 180.

Dynamik.

I. Freie Bewegung eines Punktes.

A. Geradlinige Bewegung eines Punktes.

1) Sei v die Geschwindigkeit, φ die Beschleunigung, P die Kraft, m die Masse, s der Weg, so gelten die Formeln:

$$v = \frac{ds}{dt}, \quad \varphi = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2 s}{dt^2}$$

$$v\frac{dv}{ds} = \varphi = \frac{P}{m}, \quad d\frac{mv^2}{2} = P\,ds,$$

$$s = \int_{t_0}^{t_1} v\,ds, \quad mv - mv_0 = \int_{t_0}^{t} P\,dt$$

$$\frac{1}{2}(mv^2 - mv_0^2) = \int_{s_0}^{s} P\,ds.$$

2) Der freie Fall ohne Rücksicht auf den Widerstand der Luft. Sei R der Erdhalbmesser, a der Abstand des Punktes vom Erdmittelpunkte, s sein Fallraum nach t Secunden, g die Beschleunigung an der Erdoberfläche, φ diejenige im Abstande $a - s$ vom Erdcentrum. Sodann wird

$$\frac{ds}{dt} = v, \quad \frac{dv}{dt} = \varphi, \quad \varphi = \frac{R^2}{(a-s)^2}\, g.$$

Für irgend einen Punkt der Erdoberfläche ist

$$g_{\lambda,h} = g_{45}\,(1 - 0{,}00259\, \cos 2\,\lambda)\,(1 - 0{,}000000002\, h),$$

wobei λ die geographische Breite, und h die in cm ausgedrückte Höhe des betreffenden Ortes über dem Meere bezeichnet.

$$g_{45} = 9806\, mm/sec^2$$

$$v = R\sqrt{\frac{2gs}{a(a-s)}}$$

$$t = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{a}{2g}}\left\{\sqrt{(a-s)\,s} + a\, arc\sin\sqrt{\frac{s}{a}}\right\}.$$

Daraus für den gewöhnlichen Fall:

$$\varphi = g, \quad v = \sqrt{2gs} = gt, \quad t = \sqrt{\frac{2s}{g}}$$

$$s = \frac{1}{2}\, vt = \frac{1}{2}\, gt^2 = \frac{1}{2}\,\frac{v^2}{g}.$$

Nimmt man im letzteren Falle den Widerstand der Luft dem Quadrate der Geschwindigkeit direct proportional, so wird

$$\frac{ds}{dt} = v, \quad \frac{dv}{dt} = \varphi, \quad \varphi = g - \varkappa v^2,$$

und hieraus folgt:

$$t = \frac{1}{2a\varkappa}\log\frac{a+v}{a-v}, \quad a^2 = \frac{g}{\varkappa}$$

$$v = a\,\frac{e^{a\varkappa t} - e^{-a\varkappa t}}{e^{a\varkappa t} + e^{-a\varkappa t}} = a\, tg\, hyp\, a\varkappa t$$

$$s = \frac{1}{\varkappa}\log\frac{e^{a\varkappa t} + e^{-a\varkappa t}}{2} = \frac{1}{\varkappa}\log\cos hyp\, a\varkappa t.$$

3) Der verticale Wurf ohne Rücksicht auf den Luftwiderstand.

Sei R der Erdradius und s der Abstand des steigenden Punktes vom Erdcentrum, sowie v_0 die Anfangsgeschwindigkeit, so wird:

$$\varphi = -\,g\,\frac{R^2}{s^2}, \quad v\,dv = -\,\varphi\, ds,$$

daraus

$$\frac{1}{2}\,(v^2 - v_0^2) = g\,R^2\left\{\frac{1}{s} - \frac{1}{R}\right\}$$

$$s = \frac{2gR^2}{2gR + v^2 - v_0^2}.$$

Die grösste Steighöhe ist

$$H = \frac{2gR^2}{2gR - v_0^2} - R = \frac{Rv_0^2}{2gR - v_0^2}.$$

Der Punkt kann nie fallen, wenn $2gR - v_0^2$ negativ wird.

$$t = \frac{2gR^2(v_0 - v)}{(2gR^2 - v_0^2)(2gR^2 - v_0^2 + v^2)}$$

$$+ \frac{2gR^2}{(2gR^2 - v_0^2)^{3/2}} \left\{ arctg \frac{v_0}{\sqrt{2gR^2 - v_0^2}} - arctg \frac{v}{\sqrt{2gR^2 - v_0^2}} \right\}$$

und die ganze Steigzeit T

$$T = \frac{2gR^2}{(2gR^2 - v_0^2)^2} \left\{ v_0 + (2gR^2 - v_0^2)^{1/2} \, arctg \frac{v_0}{\sqrt{2gR^2 - v_0^2}} \right\}.$$

Wird die Veränderlichkeit der Beschleunigung der Schwere nicht berücksichtigt, so wird

$$v = v_0 - gt$$

$$s = \frac{v_0 + v}{2} t = v_0 t - \frac{gt^2}{2} = \frac{v_0^2 - v^2}{2g},$$

ferner

$$T = \frac{v_0}{g}, \quad H = \frac{v_0}{2} T = \frac{v_0^2}{2g}.$$

Der Punkt kehrt nach der doppelten Steigzeit in seine Anfangslage zurück. Die Geschwindigkeit im $n$ten Theil der Steighöhe ist

$$v = v_0 \sqrt{1 - \frac{1}{n}}.$$

Wird der Widerstand der Luft proportional dem Quadrate der Geschwindigkeit angenommen und die Veränderung der Schwere nicht berücksichtigt, so wird:

$$\varphi = -(g + \varkappa v^2)$$

$$t = \frac{1}{\sqrt{g\varkappa}} \left\{ arctg \, v_0 \sqrt{\frac{\varkappa}{g}} - arctg \, v \sqrt{\frac{\varkappa}{g}} \right\}$$

$$t = \frac{a}{g} \, arctg \, a \frac{v_0 - v}{a^2 + v_0 v}, \quad a^2 = \frac{g}{\varkappa}, \quad \frac{v_0}{a} = tg \, \alpha$$

$$v = a \frac{v_0 \cos \frac{gt}{a} - a \sin \frac{gt}{a}}{a \cos \frac{gt}{a} + v_0 \sin \frac{gt}{a}}$$

$$s = \frac{a^2}{g} \log \left\{ \frac{v_0}{a} \sin \frac{g t}{a} + \cos \frac{g t}{a} \right\}$$

$$s = \frac{1}{2 \varkappa} \log \frac{g + \varkappa v_0^2}{g + \varkappa v^2}$$

$$T = \frac{a \alpha}{g}, \quad H = \frac{1}{2 \varkappa} \log \frac{g + \varkappa v_0}{g}.$$

4) In Bezug auf die allgemeine Behandlung derartiger Probleme entnehmen wir dem Werke: Theorie der Bewegung und der Kräfte von Schell folgende Andeutungen:

I. Es sei gegeben

$$\frac{d s}{d t} = v, \quad \frac{d v}{d t} = \varphi, \quad \varphi = f(t),$$

so folgt:

$$v - v_0 = \int_{t_0}^{t} f(t) \, d t$$

$$s - s_0 = v_0 (t - t_0) + \int_{t_0}^{t} d t \int_{t_0}^{t} f(t) \, d t.$$

II. Es sei gegeben

$$\frac{d s}{d t} = v, \quad \frac{d v}{d t} = \varphi, \quad \varphi = f(s),$$

so folgt:

$$\frac{1}{2} v^2 - \frac{1}{2} v_0^2 = \int_{s_0}^{s} f(s) \, d s$$

$$t - t_0 = \int_{s_0}^{s} \frac{d s}{\sqrt{v_0^2 + 2 \int_{s_0}^{s} f(s) \, d s}}.$$

III. Es sei gegeben

$$\frac{d s}{d t} = v, \quad \frac{d v}{d t} = \varphi, \quad \varphi = f(v).$$

Es wird

$$t - t_0 = \int_{v_0}^{v} \frac{d v}{f(v)}$$

$$s - s_0 = \int_{v_0}^{v} \frac{v \, d v}{f(v)}.$$

IV. Es sei gegeben

$$\frac{ds}{dt} = f(t), \quad f'(t) = \varphi, \quad v = f(t),$$

so folgt:

$$s - s_0 = \int_{t_0}^{t} f(t)\,dt.$$

V. Es sei gegeben

$$\frac{ds}{dt} = v, \quad \frac{dv}{dt} = \varphi, \quad v = f(s), \quad s = \psi(v).$$

Man hat

$$t - t_0 = \int_{s_0}^{s} \frac{ds}{f(s)} = \int_{v_0}^{v} \frac{\psi'(v)}{v}\,dv$$

$$\varphi = f'(s) \,.\, f(s).$$

VI. Es sei gegeben

$$\frac{ds}{dt} = v, \quad \frac{dv}{dt} = \varphi, \quad \Phi(\varphi, s, t) = 0.$$

Man hat hier die Gleichung

$$\Phi\left\{\frac{d^2 s}{dt^2}, s, t\right\} = 0$$

zu integriren.

VII. Es sei gegeben

$$\frac{ds}{dt} = v, \quad \frac{dv}{dt} = \varphi, \quad \Phi(\varphi, v, t) = 0.$$

Die zu integrirende Gleichung ist:

$$\Phi\left\{\frac{d^2 s}{dt^2}, \frac{ds}{dt}, t\right\} = 0.$$

VIII. Es sei gegeben

$$\frac{ds}{dt} = v, \quad \frac{dv}{dt} = \varphi, \quad \Phi(\varphi, v, s) = 0.$$

Die Differentialgleichung lautet

$$\Phi\left(\frac{d^2 s}{dt^2}, \frac{ds}{dt}, s\right) = 0.$$

IX. Es sei gegeben

$$\frac{ds}{dt} = v, \quad \frac{dv}{dt} = \varphi, \quad \Phi(v, s, t) = 0.$$

Diese Aufgabe erfordert die Integration von

$$\Phi\left(\frac{ds}{dt}, s, t\right) = 0.$$

X. Es sei gegeben

$$\frac{ds}{dt} = v, \quad \frac{dv}{dt} = \varphi, \quad \Phi(\varphi, v, s, t) = 0.$$

Die zu integrirende Gleichung ist:

$$\Phi\left(\frac{d^2 s}{dt^2}, \frac{ds}{dt}, s, t\right) = 0.$$

B. Krummlinige Bewegung eines Punktes.

1) Die krummlinige Bewegung eines Punktes ist I. durch die Gleichungen

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = X, \quad \frac{d^2 y}{dt^2} = Y, \quad \frac{d^2 z}{dt^2} = Z$$

charakterisirt. Zur Bestimmung der sechs Integrationsconstanten dienen die Werthe

$$x_0, y_0, z_0, \frac{dx_0}{dt_0}, \frac{dy_0}{dt_0}, \frac{dz_0}{dt_0},$$

oder II. durch die Gleichungen

$$\frac{ds}{dt} = v, \quad \frac{dv}{dt} = \varphi_t, \quad \frac{v^2}{\varrho} = \varphi_n.$$

Die ersteren Gleichungen rühren von Maclaurin (Treatise of Fluxions 1742) her, vor ihm waren die letzteren gebräuchlich.

2) Der horizontale Wurf mit der Anfangsgeschwindigkeit v_0.

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = 0, \quad \frac{d^2 y}{dt^2} = g, \quad \frac{d^2 z}{dt^2} = 0$$

$$x = y = z = v_z = v_y = 0, \quad v_x = v_0 \text{ für } t = 0.$$

Man erhält

$$x = v_0 t, \qquad v_x = v_0$$

$$y = \frac{1}{2} g t^2, \quad v_y = g t, \quad v = \sqrt{v_0^2 + g^2 t^2}$$

$$z = 0, \qquad v_z = 0,$$

und die Gleichung der Bahn:

$$x^2 = \frac{2 v_0^2}{g} y.$$

3) Der schiefe Wurf nach aufwärts mit der Anfangsgeschwindigkeit v_0.

$$\frac{d^2 x}{d t^2} = 0, \quad \frac{d^2 y}{d t^2} = -g, \quad \frac{d^2 z}{d t^2} = 0$$

$$x = y = z = v_z = 0, \quad v_x = a, \quad v_y = b \text{ für } t = 0.$$

Man erhält:

$$x = a t, \qquad v_x = a$$

$$y = b t - \frac{1}{2} g t^2, \quad v_y = b - g t, \quad v = \sqrt{v_0^2 - 2 g y}$$

$$z = 0, \qquad v_z = 0,$$

und als Gleichung der Bahn

$$y = \frac{b}{a} x - \frac{1}{2} \frac{g}{a^2} x^2.$$

Die Wurfhöhe H und Wurfweite W ist

$$H = \frac{b^2}{2 g}, \quad W = \frac{2 a b}{g}$$

Die Länge der Bahn während der Zeit t ist

$$S = \frac{1}{2 g} \left\{ b \sqrt{a^2 + b^2} + (g t - b) \sqrt{a^2 + (g t - b)^2} + a^2 \log \frac{g t - b + \sqrt{a^2 + (g t - b)^2}}{\sqrt{a^2 + b^2} - b} \right\}.$$

Die Zeit, in welcher eine Bahnstelle erreicht wird, ist

$$t = \frac{x}{a} = \frac{b}{g} \pm \frac{1}{g} \sqrt{b^2 - 2 g y}.$$

Soll der Punkt x_1, y_1 in der Bahn liegen, d. h. getroffen werden, so ist, wenn α den erforderlichen Wurfwinkel bezeichnet:

$$tg\, \alpha = \frac{v_0^2 \pm \sqrt{v_0^4 - 2 v_0^2 g y_1 - g^2 x_1^2}}{g x_1}.$$

4) Wird der Luftwiderstand in Betracht gezogen, und zwar in der Weise, dass derselbe dem Quadrate der Geschwindigkeit direct proportional angenommen wird, so lauten die Fundamentalgleichungen:

$$\frac{d^2 x}{d t^2} = -\frac{g}{\varkappa^2} \left(\frac{d s}{d t}\right)^2 \frac{d x}{d t}$$

$$\frac{d^2 y}{d t^2} = -\frac{g}{\varkappa^2} \left(\frac{d s}{d t}\right)^2 \frac{d y}{d t} - g$$

$$\frac{d^2 z}{d t^2} = -\frac{g}{\varkappa^2} \left(\frac{d s}{d t}\right)^2 \frac{d z}{d t}$$

und die Bedingungsgleichungen:

$$x = y = z = 0$$
$$v_x = a = v_0 \cos\alpha$$
$$v_y = b = v_0 \sin\alpha$$
$$v_z = 0.$$

Sei $p = \frac{dy}{dx}$, ferner

$$P = p\sqrt{1+p^2} + \log(p + \sqrt{1+p^2}).$$

Sei ferner p_0 der Werth von p zur Zeit t_0 und dem entsprechend P_0, ferner

$$c = P_0 + \frac{\varkappa^2}{4gh\cos^2\alpha},$$

so wird

$$x = \frac{1}{2}\frac{\varkappa^2}{g}\int\limits_p^{p_0}[c - P]^{-1}dp$$

$$y = \frac{1}{2}\frac{\varkappa^2}{g}\int\limits_p^{p_0}[c - P]^{-1}p\,dp$$

$$t = \sqrt{\frac{1}{2}}\,\frac{\varkappa}{g}\int\limits_p^{p_0}[c - P]^{-1}dp.$$

Ist p_0 sehr klein, so wird

$$y = x\,tg\,\alpha + \frac{\varkappa^2}{4gh\cos^2\alpha}\left\{x - \frac{1}{2}\frac{\varkappa^2}{g}e^{\frac{2g}{\varkappa^2}x} + \frac{1}{2}\frac{\varkappa^2}{g}\right\}$$

$$t = \frac{\varkappa^2}{g}\cdot\frac{e^{\frac{g}{\varkappa^2}x} - 1}{v_0\cos\alpha},\quad h = \frac{v_0^2}{2g}.$$

5) Die Centralbewegung eines Punktes. Die Bewegung ist eine ebene.

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\varphi\frac{x}{r},\quad \frac{d^2y}{dt^2} = -\varphi\frac{y}{r}\qquad \varphi = \varphi(r).$$
$$r^2\frac{d\vartheta}{dt} = c,\ \text{wenn}\ \begin{cases} x = r\cos\vartheta \\ y = r\sin\vartheta\end{cases}$$

Sei F die Fläche des Sectors, welcher von dem Fahrstrahle in der Zeit t beschrieben wird, so ist

$$F = \frac{1}{2} c t$$

$$v^2 = v_0^2 - 2 \int_{r_0}^{r} \varphi . d r = c^2 \left\{ \left(\frac{d}{d \vartheta} \cdot \frac{1}{r} \right)^2 + \frac{1}{r^2} \right\} =$$

$$= \frac{c^2}{p^2} = \varphi p \frac{d r}{d p} = 2 \varphi \frac{\text{Krümmungssehne}}{4} = \varphi \varrho \frac{p}{r}$$

$$\varphi = \frac{c^2}{r^2} \left\{ \frac{d^2}{d \vartheta^2} \left(\frac{1}{r} \right) + \frac{1}{r} \right\} = \frac{c^2}{p^3} \frac{d p}{d r} =$$

$$= - \frac{c^2}{2} \frac{d}{d r} \left(\frac{1}{p^2} \right) = r \left(\frac{d \vartheta}{d t} \right)^2 - \frac{d^2 r}{d t^2}.$$

Dabei ist p das vom Coordinatenursprung auf die Bahntangente gefällte Perpendikel und ϱ der Krümmungshalbmesser Die Gleichung der Bahn ist

$$\vartheta - \vartheta_0 = c \int_{r_0}^{r} \frac{- d \left(\frac{1}{r} \right)}{\sqrt{v^2 - \left(\frac{c}{r} \right)^2}}.$$

Ferner die Zeit als Function von r

$$t - t_0 = \int_{r_0}^{r} \frac{d r}{\sqrt{v^2 - \left(\frac{c}{r} \right)^2}}.$$

Wir haben noch

$$\frac{c^2}{p^2} = v_0^2 - 2 \int_{r_0}^{r} \varphi \, d r.$$

Die Centralbewegung für den Fall, dass $\varphi = - \frac{\varkappa}{r^2}$, haben wir in der Astronomie betrachtet, §. 174.

II. Bewegung auf vorgeschriebener Bahn.

1) Für die Bewegung eines Punktes auf vorgeschriebener Bahn gelten die Gleichungen:

$$\frac{d^2 x}{d t^2} = X + N_x$$

$$\frac{d^2 y}{d t^2} = Y + N_y$$

$$\frac{d^2 z}{d t^2} = Z + N_z$$

$$N^2 = N_x^2 + N_y^2 + N_z^2, \quad N_x \frac{dx}{ds} + N_y \frac{dy}{ds} + N_z \frac{dz}{ds} = 0$$

$$\varphi(x, y, z) = 0, \quad \psi(x, y, z) = 0.$$

Sei

$$N_x = N \cos\alpha, \quad N_y = N \cos\beta, \quad N_z = N \cos\gamma,$$

so wird

$$N = -\{X \cos\alpha + Y \cos\beta + Z \cos\gamma\} \pm \frac{v^2}{\varrho},$$

wobei ϱ der Krümmungsradius ist.

2) Ist ein Punkt (unter der Einwirkung der Schwere) gezwungen, auf der Curve

$$x = \varphi(z), \quad y = \psi(z)$$

zu bleiben, so wird

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = N \cos\alpha, \quad \frac{d^2 y}{dt^2} = N \cos\beta, \quad \frac{d^2 z}{dt^2} = -g + N \cos\gamma.$$

Man findet

$$-\varkappa^2 + v^2 = 2gz - 2gh$$

$$dt = -dz \frac{\sqrt{1 + \varphi'(z)^2 + \psi'(z)^2}}{\sqrt{\varkappa^2 + 2gh - 2gz}}.$$

Dabei ist $\varkappa$ die der Höhe h entsprechende Geschwindigkeit des Punktes.

3) Sei $f(v)$ irgend eine Function der Geschwindigkeit, welche den Widerstand ausdrückt, so ist

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = X + N \cos\alpha - f(v) \frac{dx}{ds}$$

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = Y + N \cos\beta - f(v) \frac{dy}{ds}$$

$$\frac{d^2 z}{dt^2} = Z + N \cos\gamma - f(v) \frac{dz}{ds}.$$

4) Ist der Punkt gezwungen, auf einer Fläche

$$F(x, y, z) = 0$$

zu bleiben, so wird

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = X + N \cos\alpha, \quad \frac{d^2 y}{dt^2} = Y + N \cos\beta$$

$$\frac{d^2 z}{dt^2} = Z + N \cos\gamma$$

$$\cos\alpha = \frac{1}{V}\frac{\partial F}{\partial x}, \quad \cos\beta = \frac{1}{V}\frac{\partial F}{\partial y}, \quad \cos\gamma = \frac{1}{V}\frac{\partial F}{\partial z}$$

$$V^2 = \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2.$$

Eliminirt man N aus den ersten drei Gleichungen und verbindet die so entstandenen Gleichungen mit $F(x, y, z) = 0$, so kann man x, y, z als Functionen von t bestimmen.

5) Ist speciell

$$X dx + Y dy + Z dz = d\varphi(x, y, z),$$

also

$$v^2 = 2\varphi(x, y, z) + C,$$

so kann man sich oft die Lösung des Problems erleichtern.

Bildet man nämlich

$$A = dx\frac{d^2y}{dt^2} - dy\frac{d^2x}{dt^2} = Y dx - X dy + \frac{N}{V}\left\{\frac{\partial F}{\partial y}dx - \frac{\partial F}{\partial x}dy\right\}$$

$$B = dx\frac{d^2z}{dt^2} - dz\frac{d^2x}{dt^2} = Z dx - X dz + \frac{N}{V}\left\{\frac{\partial F}{\partial z}dx - \frac{\partial F}{\partial x}dz\right\}$$

so wird

$$A = v^2\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 d\left(\frac{dy}{ds}\right) = [2\varphi(x, y, z) + c]\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 d\left(\frac{dy}{ds}\right)$$

$$B = v^2\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 d\left(\frac{dz}{ds}\right) = [2\varphi(x, y, z) + c]\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 d\left(\frac{dz}{ds}\right).$$

Eliminirt man aus diesen beiden Gleichungen N, so entsteht eine Gleichung zwischen x, y, z, die t nicht enthält, und die in Verbindung mit $F(x, y, z) = 0$, y und z als Functionen von x darstellt.

§. 181.

Relative Bewegung.

1) Sei xyz das unbewegliche, $x'y'z'$ das bewegliche Coordinatensystem, dessen Anfangspunkt die Coordinaten ξ, η, ζ besitzt. Sodann haben wir

$$x - \xi = ax' + by' + cz'$$
$$y - \eta = a'x' + b'y' + c'z'$$
$$x - \zeta = a''x' + b''y' + c''z'.$$

2) Für die absoluten Geschwindigkeiten ergiebt sich

$$\frac{dx}{dt} = \frac{d\xi}{dt} + x' \frac{da}{dt} + y' \frac{db}{dt} + z' \frac{dc}{dt}$$
$$+ a \frac{dx'}{dt} + b \frac{dy'}{dt} + c \frac{dz'}{dt},$$
$$\frac{dy}{dt} = \frac{d\eta}{dt} + x' \frac{da'}{dt} + y' \frac{db'}{dt} + z' \frac{dc'}{dt}$$
$$+ a' \frac{dx'}{dt} + b' \frac{dy'}{dt} + c' \frac{dz'}{dt},$$
$$\frac{dz}{dt} = \frac{d\zeta}{dt} + x' \frac{da''}{dt} + y' \frac{db''}{dt} + z' \frac{dc''}{dt}$$
$$+ a'' \frac{dx'}{dt} + b'' \frac{dy'}{dt} + c'' \frac{dz'}{dt}.$$

3) Die Beschleunigungen ergeben sich aus

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d^2\xi}{dt^2} + x' \frac{d^2a}{dt^2} + y' \frac{d^2b}{dt^2} + z' \frac{d^2c}{dt^2}$$
$$+ a \frac{d^2x'}{dt^2} + b \frac{d^2y'}{dt^2} + c \frac{d^2z'}{dt^2}$$
$$+ 2 \left\{\frac{dx'}{dt} \cdot \frac{da}{dt} + \frac{dy'}{dt} \cdot \frac{db}{dt} + \frac{dz'}{dt} \cdot \frac{dc}{dt}\right\},$$
$$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{d^2\eta}{dt^2} + x' \frac{d^2a'}{dt^2} + y' \frac{d^2b'}{dt^2} + z' \frac{d^2c'}{dt^2}$$
$$+ a' \frac{d^2x'}{dt^2} + b' \frac{d^2y'}{dt^2} + c' \frac{d^2z'}{dt^2}$$
$$+ 2 \left\{\frac{dx'}{dt} \cdot \frac{da'}{dt} + \frac{dy'}{dt} \cdot \frac{db'}{dt} + \frac{dz'}{dt} \cdot \frac{dc'}{dt}\right\},$$
$$\frac{d^2z}{dt^2} = \frac{d^2\zeta}{dt^2} + x' \frac{d^2a''}{dt^2} + y' \frac{d^2b''}{dt^2} + z' \frac{d^2c''}{dt^2}$$
$$+ a'' \frac{d^2x'}{dt^2} + b'' \frac{d^2y'}{dt^2} + c'' \frac{d^2z'}{dt^2}$$
$$+ 2 \left\{\frac{dx'}{dt} \cdot \frac{da''}{dt} + \frac{dy'}{dt} \cdot \frac{db''}{dt} + \frac{dz'}{dt} \cdot \frac{dc''}{dt}\right\}.$$

4) Nehmen wir nun an, dass das zweite System fortwährend mit dem festen denselben Anfangspunkt behalte. Sei V die absolute, v die relative Geschwindigkeit eines Punktes A, sowie u die Geschwindigkeit des Punktes im beweglichen System, in welchem sich A zur Zeit t befindet, so wird

$$V_x = u_x + v \cos(v, x)$$
$$V_y = u_y + v \cos(v, y)$$
$$V_z = u_z + v \cos(v, z)$$
$$v^2 = V^2 + u^2 - 2uV \cos(u, V).$$

Sei

$$w_{x'} = c\frac{db}{dt} + c'\frac{db'}{dt} + c''\frac{db''}{dt}$$
$$w_{y'} = a\frac{dc}{dt} + a'\frac{dc'}{dt} + a''\frac{dc''}{dt}$$
$$w_{z'} = b\frac{da}{dt} + b'\frac{da'}{dt} + b''\frac{da''}{dt},$$

so folgt

$$x' \cos(u, x') + y' \cos(u, y') + z' \cos(u, z') = 0$$
$$w_{x'} \cos(u, x') + w_{y'} \cos(u, y') + w_{z'} \cos(u, z') = 0.$$

Durch $w_{x'}$, $w_{y'}$, $w_{z'}$ wird eine Gerade w dargestellt mit den Richtungscosinussen

$$\frac{w_{x'}}{w},\ \frac{w_{y'}}{w},\ \frac{w_{z'}}{w},$$

wobei

$$w^2 = w_{x'}^2 + w_{y'}^2 + w_{z'}^2,$$

und es wird

$$u = rw \sin(r, w),$$

r ist der Radiusvector. Nun ist $r \sin(r, w)$ der Abstand des Punktes von der Momentanaxe. Demnach ist w die Winkelgeschwindigkeit um die Momentanaxe, und $w_{x'}$, $w_{y'}$, $w_{z'}$ ihre Componenten um die beweglichen Axen. Vergl. §. 179, Nr. III.

5) Sei R die Beschleunigung der absoluten, r der relativen Bewegung, und ϱ die der Geschwindigkeit u entsprechende Beschleunigung, so wird:

$$\frac{\alpha}{dt} v_{x'} = r \cos(r, x') = R \cos(R, x') - \varrho \cos(\varrho, x') - 2 \begin{vmatrix} w_{y'} & v_{y'} \\ w_{z'} & v_{z'} \end{vmatrix}$$
$$\frac{d}{dt} v_{y'} = r \cos(r, y') = R \cos(R, y') - \varrho \cos(\varrho, y') - 2 \begin{vmatrix} w_{z'} & v_{z'} \\ w_{x'} & v_{x'} \end{vmatrix}$$
$$\frac{d}{dt} v_{z'} = r \cos(r, z') = R \cos(R, z') - \varrho \cos(\varrho, z') - 2 \begin{vmatrix} w_{x'} & v_{x'} \\ w_{y'} & v_{y'} \end{vmatrix}$$

Setzt man die letzten Determinanten der Reihe nach gleich

$$p \cos(p, x'),\quad p \cos(p, y'),\quad p \cos(p, z'),$$

so wird

$$p = 2 v w \sin(v, w)$$

und

$$v_{x'} \cos(p, x') + v_{y'} \cos(p, y') + v_{z'} \cos(p, z') = 0$$
$$w_{x'} \cos(p, x') + w_{y'} \cos(p, y') + w_{z'} \cos(p, z') = 0.$$

Daher steht p senkrecht auf der Momentanaxe und der Richtung der Geschwindigkeit v.

Man hat noch

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} (v^2) = R v \cos(v, R) - \varrho v \cos(v, \varrho).$$

6) Relative Bewegung in der Nähe der Erdoberfläche. Sei w die Winkelgeschwindigkeit der Erdbewegung, und φ die geographische Breite eines Erdortes O, der zugleich als Coordinatenanfang angenommen wird. Die Z-Axe sei die Verticale in diesem Punkte vom Erdcentrum aus positiv gezählt, die X-Axe die durch O gehende Tangente an den Meridian, die Y-Axe senkrecht auf die Ebene XZ, so gelten die (genäherten) Gleichungen:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + 2 w \sin\varphi \frac{dy}{dt} = X$$
$$\frac{d^2 y}{dt^2} - 2 w \cos\varphi \frac{dz}{dt} - 2 w \sin\varphi \frac{dx}{dt} = Y$$
$$\frac{d^2 z}{dt^2} + 2 w \cos\varphi \frac{dy}{dt} = - g + Z,$$

g ist die Beschleunigung der Schwere.

7) Fällt ein Punkt aus der Höhe h, so wird:

$$x = 0$$
$$y = - w \cos\varphi \frac{g t^3}{3}$$
$$z = h - \frac{1}{2} g t^2.$$

Es existirt also eine Abweichung nach Orten, die dem Cubus der Fallzeit direct proportional ist.

§. 182.

Rotation und Translation.

1) Sei ds ein Wegelement, so wird

$$v = \frac{ds}{dt}$$

die Translationsgeschwindigkeit genannt. Sei $d\vartheta$ ein Bogenelement in der Einheit der Entfernung von der Rotationsaxe, so stellt

$$w = \frac{d\vartheta}{dt}$$

die Winkel- oder Rotationsgeschwindigkeit dar. Das Symbol derselben ist ihre Grösse als Länge auf der Axe aufgetragen zugleich mit der Bezeichnung der Richtung.

Setzt man mehrere derartige Symbole nach der Analogie der Kräfte zusammen, so ist die Resultirende das Symbol der resultirenden Winkelgeschwindigkeit.

Die Winkelgeschwindigkeit in der Entfernung r von der Rotationsaxe ist

$$r\frac{d\vartheta}{dt} = rw.$$

2) Wir wählen als Bezeichnung für die Winkelgeschwindigkeit das Symbol (w, a), wobei w ihre Intensität, a ihre Axe bezeichnen soll.

Seien (w, a) und (w', a') zwei Winkelgeschwindigkeiten, so wollen wir ferner unter $a - a'$ den Abstand dieser beiden Axen verstehen, vorausgesetzt, dass sie parallel sind.

Sodann gelten folgende Sätze:

3) $$(w, a) + v = (w, b),$$

wobei $a \parallel b$ und

$$a - b = \frac{v}{w}.$$

Die erste Gleichung soll gelesen werden: Die Verbindung $(+)$ einer Rotationsgeschwindigkeit (w, a) mit einer Translationsgeschwindigkeit v ist äquivalent einer Rotationsgeschwindigkeit von derselben Intensität und Richtung um eine Axe b.

4) $$(w, a) + (\pm w' b) = (w \pm w' c)$$
wenn $a \parallel b$. Und es wird
$$a \parallel b \parallel c$$
und
$$a - c : b - c = w' : w.$$

5) Gehen die beiden Axen durch denselben Punkt, so wird
$$(w, a) + (w', b) = (\Omega, c),$$
wobei
$$\Omega = \sqrt{w^2 + w'^2 + 2\, w\, w' \cos(a, b)}$$
$$\frac{\sin(a\, c)}{w'} = \frac{\sin(b\, c)}{w} = \frac{\sin(a\, b)}{\Omega}$$
(Satz vom Parallelogramm der Winkelgeschwindigkeiten.)

6) Aus der Zusammensetzung der Drehungen folgt unmittelbar die Existenz der Winkelgeschwindigkeitspaare
$$(w, a) + (-w, b),$$
für welche
$$(a - b) \, . \, w$$
das Moment darstellt. Ein solches Rotationspaar ist äquivalent einer Translationsgeschwindigkeit in der Axenrichtung mit einer Geschwindigkeit, die gleich ist dem Moment des Paares.

7) Die Verbindung einer Rotation (w, a) mit einer Translation v parallel zu a ist äquivalent einer Schraubenbewegung. Bezieht man diese auf eine Entfernung r von der Axe a, so wird, wenn v_r die Geschwindigkeit der Schraubenbewegung darstellt,
$$v_r^2 = v^2 + r^2 w^2$$
und ihre Neigung ψ gegen die Axe
$$tgn\, \psi = r \cdot \frac{w}{v}.$$

8) Für die Zusammensetzung beliebiger Drehungen um beliebige Axen gilt dasselbe, was über die Zusammensetzung der Kräfte im §. 185 gesagt ist.

Es ergiebt sich, dass sämmtliche Winkelgeschwindigkeiten äquivalent sind, und zwar auf unendlich viele Arten einer Winkelgeschwindigkeit und einem Rotationspaar (einer Translationsgeschwindigkeit) oder zwei Winkelgeschwindigkeiten, deren Axen im Allgemeinen nicht in dieselbe Ebene fallen.

Vergl. Schell, Theorie der Bewegung und der Kräfte. Daselbst auch die Literatur.

§. *183.

Theorie der Kräfte.

1) Die Kraft ist die Ursache der Beschleunigung. Die Beschleunigung ist die Ursache der Geschwindigkeitsänderung.

2) Die Bewegungen werden aus drei willkürlichen Hypothesen abgeleitet. Diese von Newton eingeführten Hypothesen sind:

I. Das Trägheitsgesetz: Corpus omne perseverare in statu suo quiescendi vel movendi uniformiter in directum, nisi quatenus a viribus impressis cogitur statum suum mutare.

II. Das Kraftgesetz [das Gesetz des Parallelogramms]: Mutationem motus proportionalem esse vi motrici impressae et fieri secundum lineam rectam qua vis illa imprimitur.

III. Das Gesetz der Action und Reaction: Actioni contrariam semper et aequalem esse reactionem.

3) Das Product aus der Masse m in die Geschwindigkeit v heisst die Bewegungsgrösse. Das Product aus der Masse und der Beschleunigung φ wird die bewegende Kraft, die Kraft welche dieselbe Beschleunigung φ der Masseneinheit ertheilt, also $1 \cdot \varphi = \varphi$, wird im Gegensatze hierzu die beschleunigende Kraft genannt.

4) Sei F_n die Normal- und F_t die Tangentialbeschleunigung, sowie F die Totalbeschleunigung, so wird

$$F_t = m\,\varphi_t = m\,\frac{dv}{dt}$$

$$F_n = m\,\varphi_n = m\,\frac{v^2}{\varrho}$$

$$F = \sqrt{F_t^2 + F_n^2} = m\sqrt{\left(\frac{dv}{dt}\right)^2 + \frac{v^4}{\varrho^2}}$$

und es wird das Integral

$$\int_{t_0}^{t} F_t\,dt = mv - mv_0$$

der Kraftantrieb während der Zeit $t - t_0$ genannt und das Integral

$$\int_{s_0}^{s} F_t\, dt = \frac{1}{2}\, m v^2 - \frac{1}{2}\, m v_0^2$$

die Arbeit der Kraft längs des Weges $s - s_0$.

5) Das Product aus der Masse m und dem Abstande p eines Punktes von einer Ebene E wird das Moment dieses Punktes im Bezug auf die Ebene E genannt. Sodann gilt der Satz: In jedem System giebt es einen einzigen bestimmten Punkt, für welchen die Summe der Momente des Systems in Bezug auf jede durch ihn hindurchgehende Ebene verschwindet und für jede andere nicht durch ihn hindurchgehende gleich ist dem Momente desselben, gebildet aus der Gesammtmasse des Systems.

Dieser Punkt heisst der Mittelpunkt der Massen.

6) Der Inbegriff aller an einem System angreifenden Kräfte wird ein Kräftesystem genannt. Kräftesysteme sind äquivalent, wenn sie gleiche Wirkungen hervorbringen. Ist das Kräftesystem äquivalent einer einzigen Kraft, so wird dieselbe die Resultante genannt.

7) Kräfte, die an einem einzigen Punkte angreifen, besitzen immer eine Resultante, ist sie Null, so sind sie im Gleichgewicht.

8) Die Zusammensetzung der Kräfte, sowie ihre Zerlegung geschieht nach dem Princip des Kräfteparallelogramms. Wirken auf einen Punkt die Kräfte P_1 und P_2, die einen Winkel φ mit einander einschliessen, und ist R die Resultirende, so wird

$$R = \sqrt{P_1^2 + P_2^2 + 2\, P_1\, P_2 \cos\varphi}$$

$$\frac{R}{\sin(P_1\, P_2)} = \frac{P_1}{\sin(R\, P_2)} = \frac{P_2}{\sin(R\, P_1)}.$$

9) Fällt man von irgend einem Punkte der Ebene auf die Richtungen dieser drei Kräfte Senkrechten p, p_1, p_2, so wird

$$Rp = P_1 p_1 + P_2 p_2.$$

10) Allgemein ist

$$R = \sqrt{\sum P_x^2 + 2 \sum P_x P_\lambda \cos(P_x P_\lambda)}$$

$$Rp = \sum P_x\, p_x.$$

11) Umgekehrt kann auch jede Kraft wieder zerlegt werden. Seien α, β, γ die Winkel, die die Kraft mit den rechtwinkligen Coordinatenaxen einschliesst, und X, Y, Z ihre Componenten, so wird

$$R = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}$$

$$\frac{1}{R} = \frac{\cos\alpha}{X} = \frac{\cos\beta}{Y} = \frac{\cos\gamma}{Z}.$$

12) Wirken mehrere Kräfte auf einen Punkt, so gelten die obigen Formeln, nur ist dann

$$X = \sum P\cos\alpha, \quad Y = \sum P\cos\beta, \quad Z = \sum P\cos\gamma$$

zu setzen. Im Falle des Gleichgewichtes wird

$$X = 0, \quad Y = 0, \quad Z = 0.$$

13) Ist der Punkt gezwungen, auf einer Curve zu bleiben, so tritt zu den Kräften noch der Widerstand der Curve hinzu. Seien

$$f_1(x, y, z) = 0, \quad f_2(x, y, z) = 0$$

die Gleichungen der Curven, so liefern diese im Vereine mit der Determinante

$$\begin{vmatrix} X & Y & Z \\ \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} & \frac{\partial f_1}{\partial z} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} & \frac{\partial f_2}{\partial z} \end{vmatrix} = 0$$

jene Punkte der Curve, an welchen sich die Kräfte Gleichgewicht halten können. Die Gleichgewichtsbedingung wird

$$X\,dx + Y\,dy + Z\,dz = 0.$$

14) Ist der Punkt gezwungen, auf der Fläche

$$f(x, y, z) = 0$$

zu bleiben, so sind die Gleichgewichtsbedingungen:

$$X + N\cos\lambda = 0, \quad Y + N\cos\mu = 0, \quad Z + N\cos\nu = 0,$$

dabei ist N der Widerstand der Fläche und

$$\frac{\cos\lambda}{\frac{\partial f}{\partial x}} = \frac{\cos\mu}{\frac{\partial f}{\partial y}} = \frac{\cos\nu}{\frac{\partial f}{\partial z}} = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2}};$$

es muss also im Falle des Gleichgewichtes

$$\frac{X}{\frac{\partial f}{\partial x}} = \frac{Y}{\frac{\partial f}{\partial y}} = \frac{Z}{\frac{\partial f}{\partial z}}.$$

15) Bei einer Reibung treten noch zu den einzelnen Componenten die Grössen

$$\pm \varepsilon N \frac{dx}{ds}, \quad \pm \varepsilon N \frac{dy}{ds}, \quad \pm \varepsilon N \frac{dz}{ds}$$

hinzu. ε ist der Reibungscoefficient.

Der Reibungscoefficient ist die Tangente des sogenannten Ruhewinkels.

§. 184.

Die Kräftepaare.

1) Sind zwei Kräfte gleich und parallel, aber dem Sinne nach entgegengesetzt, so lassen sie sich durch eine einzige Kraft nicht ersetzen. Sie bilden ein Kräftepaar. Sei P die Intensität der Kraft, sowie p der Abstand der beiden parallelen Richtungen, so wird P_p das Moment des Paares genannt.

Ein Perpendikel auf die Ebene des Paares nach der Seite des Raumes gerichtet, von welcher aus der Sinn der Drehung mit dem Uhrzeigersinne übereinstimmt, heisst die Axe des Paares und eine Strecke auf ihr gleich dem Zahlenwerth des Momentes das Axenmoment.

2) Kräftepaare sind äquivalent, wenn sie gleiche Axenmomente besitzen.

3) Das resultirende Kräftepaar von mehreren gegebenen hat ein Axenmoment, welches als Kraft betrachtet die Resultirende der gegebenen Axenmomente bildet.

§. 185.

Die Kräftesysteme.

1) Jedes Kräftesystem, welches an einem unveränderlichen Punktsysteme angreift, lässt sich auf unendlich viele Arten auf eine Kraft und ein Kräftepaar reduciren. Die Resultante bleibt in allen Fällen der Intensität, der Richtung und dem Sinne nach dieselbe, nur das zugehörige Paar kann variiren. Die Gesammtheit aller möglichen Lagen der Resultirenden bestimmt ein paralleles Strahlenbüschel.

Derjenige Strahl dieses Büschels, für den das Axenmoment des zugehörigen Strahles gleichfalls die Richtung des Büschels annimmt, wird die Centralaxe des Kräftesystems genannt.

2) Sei M_0 das Axenmoment für die Centralaxe, M jene eines Strahles in der Entfernung r von der Centralaxe, und R die Resultante, sowie ψ die Neigung des Axenmomentes gegen die Centralaxe, so wird

$$M^2 = M_0^2 + r^2 R^2$$

$$tgn\, \psi = \frac{R}{M_0} \cdot r.$$

3) Ein Kräftesystem ist auf unendlich viele Arten zwei windschiefen Kräften äquivalent. Für alle solche Paare von Kräften ist das Volumen der Pyramide, welche sie zu Gegenkanten hat, constant.

4) Das Kräftesystem liefert eine Resultante, wenn das Axenmoment senkrecht auf der Resultante steht, und ist äquivalent einem Kräftepaar, wenn die Resultante $= 0$ ist.

5) Seien x, y, z die Coordinaten, X, Y, Z die Componenten der Kräfte nach den Coordinatenaxen, sowie R die Resultirende, so wird

$$R = \sqrt{(\Sigma X)^2 + (\Sigma Y)^2 + (\Sigma Z)^2}$$

$$\frac{\cos(R X)}{\Sigma X} = \frac{\cos(R Y)}{\Sigma Y} = \frac{\cos(R Z)}{\Sigma Z} = \frac{1}{R}.$$

Seien ferner L, M, N die Axenmomente, so wird:

$$L = \Sigma(y Z - z Y)$$
$$M = \Sigma(z X - x Z)$$
$$N = \Sigma(x Y - y X)$$

und das Moment des resultirenden Paares

$$H = \sqrt{L^2 + M^2 + N^2},$$

dessen Axe mit den Coordinatenaxen die Winkel

$$\frac{\cos\lambda}{L} = \frac{\cos\mu}{M} = \frac{\cos\nu}{N} = \frac{1}{H}$$

bildet. Der Winkel ψ zwischen H und R ist

$$\cos\psi = \cos(R X)\cos\lambda + \cos(R Y)\cos\mu + \cos(R Z)\cos\nu$$

oder

$$\cos\psi = \frac{L\Sigma X + M\Sigma Y + N\Sigma Z}{HR}.$$

Um die Gleichung der Centralaxe zu bestimmen, bilde man

$$\xi = \frac{N\Sigma Y - M\Sigma Z}{R^2}$$

$$\eta = \frac{L\Sigma Z - N\Sigma X}{R^2}$$

$$\zeta = \frac{M\Sigma X - L\Sigma Y}{R^2},$$

so wird die Gleichung der Centralaxe

$$\frac{x-\xi}{\Sigma X} = \frac{y-\eta}{\Sigma Y} = \frac{z-\zeta}{\Sigma Z}.$$

Existirt kein Kräftepaar, so ist

$$L\Sigma X + M\Sigma Y + N\Sigma Z = 0.$$

6) Für das Gleichgewicht eines Systems ist erforderlich, dass:

$$\Sigma X = 0, \quad \Sigma Y = 0, \quad \Sigma Z = 0$$

$$\Sigma(yZ - zY) = 0, \quad \Sigma(zX - xZ) = 0, \quad \Sigma(xY - yX) = 0.$$

7) Für ein System der parallelen Kräfte existirt immer ein Kräftemittelpunkt, wenn die Resultirende nicht $= 0$ ist. Seine Coordinaten sind:

$$x' = \frac{\Sigma Px}{\Sigma P}, \quad y' = \frac{\Sigma Py}{\Sigma P}, \quad z' = \frac{\Sigma Pz}{\Sigma P}.$$

8) Hat das System einen festen Punkt, so leitet derselbe einen Widerstand R, dessen Componenten X, Y, Z sind. Die Bedingungen des Gleichgewichtes lauten sodann:

$$X_1 + \Sigma X = 0, \quad Y_1 + \Sigma Y = 0, \quad Z_1 + \Sigma Z = 0$$

$$\Sigma(yZ - zY) = 0, \quad \Sigma(zX - xZ) = 0, \quad \Sigma(xY - yX) = 0$$

9) Seien zwei Punkte ($=$ einer Axe) vorhanden in der Entfernung h von einander, und wählt man die durch sie gehende Gerade zur Z-Axe, und sind $X_1\, Y_1\, Z_1$, $X_2\, Y_2\, Z_2$ die Componenten ihrer Widerstände, so wird

$$X_1 + X_2 + \Sigma X = 0, \quad \Sigma(yZ - zY) - Y_2 h = 0$$

$$Y_1 + Y_2 + \Sigma Y = 0, \quad \Sigma(zX - xZ) + X_2 h = 0$$

$$Z_1 + Z_2 + \Sigma Z = 0, \quad \Sigma(xY - yX) = 0.$$

10) Berührt das System die Ebene in den Punkten $x_x\, y_x$ mit den Normalwiderständen N_x, so wird, wenn diese Ebene die XY-Ebene sein soll, im Falle des Gleichgewichtes:

$$\Sigma X = 0, \quad \Sigma Y = 0, \quad \Sigma Z + \Sigma N = 0$$
$$\Sigma(yZ - zY) + \Sigma yN = 0$$
$$\Sigma(zX - xZ) - \Sigma xN = 0$$
$$\Sigma(xY - yX) = 0.$$

11) Das Gleichgewicht eines Kräftesystems, welches an einem unveränderlichen Punktsystem wirkt, ist in Bezug auf eine Axe von der Richtung (φ, χ, ψ) sicher oder unsicher, je nachdem

$$S \gtrless 0,$$

wobei

$$S = f\cos^2\varphi + g\cos^2\chi + h\cos^2\psi$$
$$- 2\{F\cos\chi\cos\psi + G\cos\psi\cos\varphi + H\cos\varphi\cos\chi\},$$

worin

$$f = \Sigma(yY + zZ) \quad F = \Sigma yZ = \Sigma zY$$
$$g = \Sigma(zZ + xX) \quad G = \Sigma zX = \Sigma xZ$$
$$h = \Sigma(xY + yY) \quad H = \Sigma xY = \Sigma yX.$$

§. 186.

Das Princip von Gauss.

Seien $m, m' \ldots$ Massen, die sich in irgend welchen Beziehungen befinden. Frei würden sie in einem Zeitelement die Wege ab, $a'b'$ zurücklegen. Die Verbindungen zwingen sie aber zu den Wegen ac, $a'c'$, ... Sodann ist bei der wirklichen Bewegung die Abweichungssumme

$$\Sigma m(bc)^2$$

ein Minimum. Liefert eine jede Bewegung grössere Abweichungssummen als die Ruhe, so besteht Gleichgewicht.

Gauss, Crelle Journ. IV, S. 233 (1829).

§. 187.

Astatische Körper.

1) Ein Körper wird astatisch genannt, wenn er so befestigt ist, dass die auf ihn wirkenden Kräfte bei jeder seiner möglichen Stellungen im Gleichgewicht bleiben. Wir nehmen an, dass die vorhandenen Kräfte bei jeder Körperlage unverändert

n der Intensität und Richtung an ihren Angriffspunkten haften sollen.

2) Sodann ist die Bedingung für das astatische Gleichgewicht der vorhandenen Kräfte

$$\Sigma X = 0 \quad \Sigma Y = 0 \quad \Sigma Z = 0$$
$$\Sigma x X = 0 \quad \Sigma y X = 0 \quad \Sigma z X = 0$$
$$\Sigma x Y = 0 \quad \Sigma y Y = 0 \quad \Sigma z Y = 0$$
$$\Sigma x Z = 0 \quad \Sigma y Z = 0 \quad \Sigma z Z = 0.$$

3) Sind die Bedingungsgleichungen:

$$\frac{\Sigma x X}{\Sigma X} = \frac{\Sigma x Y}{\Sigma Y} = \frac{\Sigma x Z}{\Sigma Z}$$
$$\frac{\Sigma y X}{\Sigma X} = \frac{\Sigma y Y}{\Sigma Y} = \frac{\Sigma y Z}{\Sigma Z}$$
$$\frac{\Sigma z X}{\Sigma X} = \frac{\Sigma z Y}{\Sigma Y} = \frac{\Sigma z Z}{\Sigma Z}$$

erfüllt, so kann das astatische Gleichgewicht durch Hinzufügung einer Kraft R, deren Componenten

$$\Sigma X, \quad \Sigma Y, \quad \Sigma Z$$

sind, mit dem Angriffspunkte, dessen Coordinaten ξ, η, ζ so beschaffen sind, dass

$$\xi = \frac{\Sigma x X}{\Sigma X}, \quad \eta = \frac{\Sigma y Y}{\Sigma Y}, \quad \zeta = \frac{\Sigma z Z}{\Sigma Z}.$$

Dieser Punkt heisst der **astatische Mittelpunkt** des Systems. Diese sechs Gleichungen sind für parallele Kräfte immer erfüllt. Der statische Mittelpunkt fällt mit dem Mittelpunkt der parallelen Kräfte zusammen.

4) Verschwindet die Resultante nicht und sind die beiden Gleichungen:

$$\{\Sigma Y.\Sigma(zZ) - \Sigma Z \Sigma(zY)\}\{\Sigma Z.\Sigma(xX) - \Sigma X.\Sigma(xZ)\}$$
$$\{\Sigma X.\Sigma y Y - \Sigma Y.\Sigma y X\}$$
$$= \{\Sigma Y.\Sigma(yZ) - \Sigma Z.\Sigma(yY)\}\{\Sigma Z.\Sigma(zX) - \Sigma X.\Sigma(zZ)\}$$
$$\{\Sigma X.\Sigma(xY) - \Sigma Y.\Sigma(xX)\}$$

oder in selbstverständlicher Abkürzung geschrieben

$$A_1 A_2 A_3 = B_1 B_2 B_3,$$

ferner:

$$B_1 B_3 \{\Sigma(xX).\Sigma(yY) - \Sigma(xY).\Sigma(yX)\}$$
$$+ A_1 A_2 \{\Sigma(yY).\Sigma(zZ) - \Sigma(yZ).\Sigma(zY)\}$$
$$+ A_1.B_3 \{\Sigma(xX).\Sigma(zZ) - \Sigma(xZ).\Sigma(zX)\} = 0$$

erfüllt, so kann das astatische Gleichgewicht durch eine Kra deren Componenten

$$\Sigma X, \quad \Sigma Y, \quad \Sigma Z$$

sind und durch ein Kräftepaar mit den Componenten

$$\frac{\Sigma(xX) - \xi \Sigma X}{\xi'}, \quad \frac{\Sigma(yY) - \eta \Sigma Y}{\eta'}, \quad \frac{\Sigma(zZ) - \zeta \Sigma Z}{\zeta'},$$

wobei ξ', ξ willkürlich, und

$$\eta' = \frac{A_1}{B_2}\xi', \quad \zeta' = \frac{B_1}{A_3}\xi'$$

$$\eta = \frac{A_1}{B_2}\xi - \frac{\Sigma(xX)\Sigma(yY) - \Sigma(xY)\Sigma(yX)}{B_2}$$

$$\zeta = \frac{B_1}{A_3}\xi + \frac{\Sigma(xX)\Sigma(zZ) - \Sigma(xZ)\Sigma(zX)}{A_3}.$$

Diese letzte Gerade heisst die astatische Mittellinie.

5) Wirken auf einen Körper Kräfte, deren Resultante nicl verschwindet, so kann jederzeit mit Hülfe einer Kraft und zwei Kräftepaare der astatische Zustand hergestellt werden.

Der Angriffspunkt dieser Kraft kann beliebig in der astat schen Mittelebene des Systems gewählt werden. Die Arm der beiden Kräftepaare liegen parallel zu dieser Ebene.

Um die Gleichung dieser Ebene zu erhalten, berechnen w die Grössen λ, μ, ν, σ aus den Gleichungen:

$$\lambda.\Sigma xX + \mu.\Sigma yX + \nu.\Sigma zX = \sigma.\Sigma X$$
$$\lambda.\Sigma xY + \mu.\Sigma yY + \nu.\Sigma zY = \sigma.\Sigma Y$$
$$\lambda.\Sigma xZ + \mu.\Sigma yZ + \nu.\Sigma zZ = \sigma.\Sigma Z$$

und erhalten

$$\frac{\lambda}{\sigma} = \frac{L}{S}, \quad \frac{\mu}{\sigma} = \frac{M}{S}, \quad \frac{\nu}{\sigma} = \frac{N}{S}.$$

Sind sodann ξ, η, ζ die Coordinaten des Angriffspunktes de einzelnen Kraft, so ist die Gleichung der Mittelebene:

$$L\xi + M\eta + N\zeta = S.$$

6) Enthält der Körper einen Punkt, um den er gedreht werden kann, so muss dieser Punkt mit dem astatischen Mittelpunkt zusammenfallen, wenn der Körper astatisch gemacht werden soll.

7) Besitzt der Körper eine feste Axe, die wir als z-Axe beıchten, so müssen im Falle des astatischen Gleichgewichtes die eichungen:

$$\Sigma X = 0, \quad \Sigma Y = 0, \quad \Sigma Z = 0$$

$$\Sigma (x Z) = 0, \quad \Sigma (y Z) = 0, \quad \Sigma (z Z) = 0, \quad \Sigma (z Y) = 0$$

$$\Sigma (x X) + \Sigma (y Y) = 0, \quad \Sigma (x Y) - \Sigma (y X) = 0$$

füllt werden.

Weitere Untersuchungen findet man in: Duhamel, Lehrıch der analytischen Mechanik, Bd. I., S. 63 bis 76.

§. 188.

Der Schwerpunkt.

1) Sei m die Masse eines Systempunktes x, y, z, so sind e Coordinaten des Schwerpunktes gegeben durch:

$$\xi = \frac{\Sigma m x}{\Sigma m}, \quad \eta = \frac{\Sigma m y}{\Sigma m}, \quad \zeta = \frac{\Sigma m z}{\Sigma m}.$$

2) Seien ϱ die Entfernungen der Systempunkte von dem chwerpunkte, σ die Entfernungen der Systempunkte von irgend nem anderen beliebigen Raumpunkte, so wird immer

$$\Sigma m \varrho^2 < \Sigma m \sigma^2,$$

h. diese Summe von Producten erreicht für den Schwerpunkt n Minimum.

3) A. Der Inhalt der Rotationsfläche, welche ein ebener urvenbogen bei einer Umdrehung um eine in seiner Ebene egende Axe beschreibt, ist gleich dem Producte aus der Länge es erzeugenden Bogens in die von seinem Schwerpunkte durchıufene Peripherie.

B. Der Inhalt des Rotationskörpers, den eine ebene Fläche ei ihrer Umdrehung um eine in ihrer Ebene liegende Axe behreibt, ist gleich dem Producte aus der erzeugenden Fläche in ie von ihrem Schwerpunkte durchlaufene Peripherie.

(Sätze von Pappus.)

4) Für eine Curve im Raume wird, wenn

$$x = r \sin\varphi \cos\vartheta$$
$$y = r \sin\varphi \sin\vartheta$$
$$z = r \cos\varphi$$

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = dr^2 + r^2 d\varphi^2 + r^2 \sin\varphi\, d\vartheta$$

gesetzt wird,

$$\mu = \int \varepsilon\, ds$$

$$\mu\xi = \int \varepsilon x\, ds, \quad \mu\eta = \int \varepsilon y\, ds, \quad \mu\zeta = \int \varepsilon z\, ds,$$

wobei ε die variable Dichte bezeichnet.

5) Für krumme Flächen wird

$$\mu = \int\int \varepsilon \sqrt{1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2}\, dx\, dy = \int\int A\, dx\, dy$$

$$= \int\int r\varepsilon \sqrt{\left\{r^2 + \left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2\right\} \sin^2\varphi + \left(\frac{dr}{d\vartheta}\right)^2}\, d\varphi\, d\vartheta$$

$$= \int\int r B\, d\varphi\, d\vartheta$$

und damit

$$\xi\mu = \int\int A x\, dx\, dy, \quad \eta\mu = \int\int A y\, dx\, dy,$$

$$\zeta\mu = \int\int A z\, dx\, dy.$$

Ist die Fläche durch Rotation von

$$Y = f(x) \text{ von } x = x_0 \text{ bis } x = x_1$$

um die x-Axe entstanden, so wird, $\varepsilon = 1$ gesetzt:

$$\mu = \frac{\pi}{2} \int_{x_0}^{x_1} y\, dx \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

$$\mu\xi = \frac{\pi}{2} \int_{x_0}^{x_1} x y\, dx \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

$$\mu\eta = \mu\zeta = \frac{\pi}{2} \int_{x_0}^{x_1} y^2\, dx \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}.$$

6) Sei

$$d\tau = dx\, dy\, dz,$$

so gelten die allgemeinen Raumformeln

$$\mu = \int\int\int \varepsilon\, d\tau, \quad \mu\xi = \int\int\int \varepsilon x\, d\tau$$

$$\mu\eta = \int\int\int \varepsilon y\, d\tau, \quad \mu\zeta = \int\int\int \varepsilon z\, d\tau.$$

7) Der Schwerpunkt eines homogenen Kreisbogens liegt auf em auf der Sehne senkrecht stehenden Halbmesser und ist vom ittelpunkte um die Strecke

$$\eta = r\frac{a}{s} = r\frac{\sin\alpha}{\alpha}$$

ntfernt, dabei ist v der Halbmesser, a die Länge der Sehne, die Länge des Bogens und α der halbe Centriwinkel.

8) Der Schwerpunkt eines Kreissectors mit dem Centriinkel 2α und dem Radius r steht vom Mittelpunkte um die Strecke

$$\eta = \frac{2}{3}r\frac{a}{s} = \frac{2}{3}r\frac{\sin\alpha}{\alpha}$$

b.

9) Der Schwerpunkt eines Kreissegmentes wird durch die änge

$$\eta = \frac{2}{3}r\frac{\sin^3\alpha}{\alpha - \sin\alpha\cos\alpha}$$

om Mittelpunkte aus bestimmt.

10) Sei η die Entfernung des Schwerpunktes vom Kugelnittelpunkte, so wird für eine Kugelzone mit den begrenzenden Entfernungen hh' vom Mittelpunkte

$$\eta = \frac{3}{4}(h' + h)\frac{2r^2 - (h'^2 + h^2)}{3r^2 - (h'^2 + hh' + h^2)},$$

für das Kugelsegment folgt hieraus

$$\eta = \frac{3}{4}\frac{(r + h)^2}{2r + h}.$$

§. 189.

Das Princip der virtuellen Verschiebungen.

1) Wirken an den Punkten $A, B, C\ldots$ die Kräfte $P, P', P''\ldots$ und ertheilen wir den Punkten irgend welche unendlich kleine, mit der Natur der Verbindungen verträgliche (virtuelle) Verschiebungen $v, v', v''\ldots$, und bilden von denselben die Projectionen $p, p', p''\ldots$ auf die Richtungen der Kräfte, positiv in der Richtung der Kraft gerechnet, so ist für den Fall des Gleichgewichtes

$$Pp + P'p' + P''p'' + \cdots \gtreqless 0,$$

oder kürzer geschrieben

$$\Sigma Pp = \Sigma Pv \cos(P,v) \gtreqless 0.$$

2) Denkt man sich die Kräfte nach den Coordinatenaxen zerlegt und bezeichnet die Componenten der virtuellen Verschiebungen mit δx, δy, δz, so wird

$$\Sigma Pp = \Sigma \{X\delta x + Y\delta y + Z\delta z\} = 0.$$

Bestehen ausserdem zwischen den Coordinaten der Angriffspunkte die Gleichungen

$$F_1 = 0, \quad F_2 = 0, \quad F_3 = 0 \ldots,$$

so sind mit der obigen Gleichung noch die folgenden:

$$\frac{dF_1}{dx_1}\delta x_1 + \frac{dF_2}{dy_1}\delta y_1 + \frac{dF_1}{dz_1}\delta z_1 + \frac{\partial F_1}{\partial x_2}\delta x_2 + \cdots$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

zu verbinden.

Maupertuis hat bemerkt, dass die Gleichung

$$Pp + P'p' + P''p'' + \cdots$$

als nichts anderes als das Element der Arbeit angesehen werden kann. Sodann sagt das Princip der virtuellen Verschiebungen, dass die Variation der Arbeit gleich Null ist, d. h. dass die Arbeit entweder ein Minimum oder Maximum ist {„Loi de repos", 1740 der Pariser Akademie mitgetheilt}.

Das Princip hat zuerst Joh. Bernoulli (1717) in einem Briefe an Varignon allgemein ausgesprochen.

§. 190.

Satz von der Erhaltung der lebendigen Kraft.

1) Bewegt sich ein Massentheilchen m auf der Curve

$$f_1(x, y, z) = 0$$
$$f_2(x, y, z) = 0,$$

so wird

$$m\left(\frac{dx}{dt}\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{dy}{dt}\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{dz}{dt}\frac{d^2z}{dt^2}\right) = 2m(X\,dx + Y\,dy + Z\,dz),$$

weil der Einfluss der Bahn ganz wegfällt.

Ist ferner

$$X = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad Y = \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad Z = \frac{\partial \varphi}{\partial z},$$

so folgt hieraus durch Integration

$$m\left\{\left(\frac{ds}{dt}\right)^2-\left(\frac{ds}{dt}\right)_0^2\right\}=2m\int\limits_{t_0}^{t}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}dx+\frac{\partial\varphi}{\partial y}dy+\frac{\partial\varphi}{\partial z}dz\right)$$

oder

$$m\left\{\left(\frac{ds}{dt}\right)^2-\left(\frac{ds}{dt}\right)_0^2\right\}=2m\left[\varphi(x,y,z)-\varphi(x_0,y_0,z_0)\right].$$

Es hängt also der Zuwachs der lebendigen Kraft nur von der Anfangs- und Endlage des Massentheilchens m ab, der Weg, auf welchem m aus der einen Lage in die andere gelangt, kann ein beliebiger sein.

2) Ist speciell für die Schwere

$$\varphi(x,y,z)=gz,$$

so folgt:

$$m\left(\frac{ds}{dt}\right)^2-m\left(\frac{ds}{dt}\right)_0^2=2mg(z-z_0),$$

wobei die z-Axe in der Richtung der Schwere angenommen wird.

3) Der Satz von der Erhaltung der lebendigen Kraft gilt nicht:

I. Wenn die Kräfte nicht reine Functionen der Coordinaten, sondern auch der Zeit sind.

II. Bei den Widerstandskräften. Sei

$$V^2=u^2+v^2+w^2$$

$$u=\frac{dx}{dt},\quad v=\frac{dy}{dt},\quad w=\frac{dz}{dt},$$

so wird der Widerstand

$$=F(V)$$

sein und

$$m\left\{\left(\frac{ds}{dt}\right)^2-\left(\frac{ds}{dt}\right)_0^2\right\}=2m\{\varphi(x,y,z)-\varphi(x_0,y_0,z_0)\}$$
$$-\int\limits_{t_0}^{t}F(V).\,V\,dt,$$

es findet demnach eine dauernde Verringerung der lebendigen Kraft statt.

Dasselbe gilt von der Reibung.

III. Enthält die Bedingungsgleichung die Zeit explicite, so gilt der Satz von der lebendigen Kraft ebenfalls nicht. Sei

$$f(x,y,z,t)=0$$

die Bedingungsgleichung, sowie λ die bewegende Kraft des normalen Druckes, so wird

$$m\left\{\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 - \left(\frac{ds}{dt}\right)_0^2\right\} = 2m\{\varphi(x,y,z) - \varphi(x_0,y_0,z_0)\}$$
$$- 2\int_{t_0}^{t} \frac{\lambda}{R}\frac{\partial f}{\partial t}\,dt,$$

wobei

$$R^2 = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2.$$

IV. Ein Verlust an lebendiger Kraft findet ferner statt bei plötzlicher Abnahme der Geschwindigkeit oder bei plötzlicher Richtungsänderung.

Diese Ausnahmen gelten streng nur für ein Massentheilchen allein oder für ein System allein. Werden auch die umgebenden Systeme berücksichtigt, so findet sich in ihrer Bewegung die verloren gegangene lebendige Kraft wieder.

4) Wird die Bahn discontinuirlich, d. h. geht die Geschwindigkeit

$$w^2 = u^2 + v^2 + w^2$$

plötzlich über in

$$\Omega^2 = U^2 + V^2 + W^2,$$

so ist der Verlust an lebendiger Kraft gegeben durch

$$\Sigma m(w^2 - \Omega^2) = \Sigma m\{(u - U)^2 + (v - V)^2 + (w - W)^2\}$$

(Carnot'scher Satz).

5) Durch Explosion findet immer ein Gewinn an lebendiger Kraft statt.

6) Sei M die Masse eines Systems und u die Geschwindigkeit des Schwerpunktes, sowie w die des Massenelementes m in Bezug auf den Schwerpunkt, so wird

$$\Sigma m v^2 = M u^2 + \Sigma m w^2.$$

Ist die Bewegung in Bezug auf den Schwerpunkt eine Rotation, und θ die Winkelgeschwindigkeit zur Zeit t, ferner ϱ der Abstand des Elementes m von der Drehaxe, so wird

$$\Sigma m v^2 = M u^2 + \theta^2 \Sigma m \varrho^2.$$

7) Gilt das Princip der lebendigen Kraft, so wird das Integral

$$\int \Sigma m v\, ds,$$

nachdem mit Hülfe des genannten Princips die Zeit aus ihm eliminirt ist und wenn es auf die ganze Bahn des Systems von einer Position in die andere erstreckt wird, für die wirkliche Bewegung ein Minimum. (Maupertuis 1747.)

(Princip der kleinsten Wirkung.)

Vergl. Mach: l. c. p. 340.

Zum ganzen Paragraphen vergleiche: F. Neumann, Einleitung in die theor. Physik, IV. Cap.

§. 191.

Die Theorie der Fadencurven.

1) Der Faden sei frei, vollkommen biegsam und unelastisch. Sei T die Spannung im Punkte x, y, z, ϱ die Dichtigkeit und w der Querschnitt in diesem Punkte, sowie $X\,Y\,Z$ die Componenten der wirkenden Kräfte, und setzt man $\varrho\, w = m$, so müssen im Falle des Gleichgewichtes die Gleichungen:

$$\frac{d}{ds}\left\{T\frac{dx}{ds}\right\} + m\,X = 0$$

$$\frac{d}{ds}\left\{T\frac{dy}{ds}\right\} + m\,Y = 0$$

$$\frac{d}{ds}\left\{T\frac{dz}{ds}\right\} + m\,Z = 0$$

erfüllt sein. Aus diesen Gleichungen ergiebt sich:

$$T = \left\{\int m\,X\,ds\right\}^2 + \left\{\int m\,Y\,ds\right\}^2 + \left\{\int m\,Z\,ds\right\}^2$$

oder

$$T = Const - \int m\,\{X\,dx + Y\,dy + Z\,dz\}.$$

2) Ruht der Faden auf einer glatten Fläche

$$u = f\,(x, y, z)$$

und bezeichnet R die Reaction der Fläche in einem beliebigen Punkte x, y, z des Fadens, so wird

$$\frac{d}{ds}\left(T\frac{dx}{ds}\right) + mX + \lambda R\frac{\partial u}{\partial x} = 0$$
$$\frac{d}{ds}\left(T\frac{dy}{ds}\right) + mY + \lambda R\frac{\partial u}{\partial y} = 0$$
$$\frac{d}{ds}\left(T\frac{dz}{ds}\right) + mZ + \lambda R\frac{\partial u}{\partial z} = 0,$$

wobei zugleich

$$\frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy + \frac{\partial u}{\partial z}dz = 0.$$

Aus diesen Gleichungen folgt:

$$\left(mX + T\frac{d^2x}{dt^2}\right)\left\{\frac{dy}{ds}\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{dz}{ds}\frac{\partial u}{\partial y}\right\}$$
$$+\left(mY + T\frac{d^2y}{dt^2}\right)\left\{\frac{dz}{ds}\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{dx}{ds}\frac{\partial u}{\partial z}\right\}$$
$$+\left(mZ + T\frac{d^2z}{dt^2}\right)\left\{\frac{dx}{ds}\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{dy}{ds}\frac{\partial u}{\partial x}\right\} = 0$$

und

$$0 = dT + m\{Xdx + Ydy + Zdz\}.$$

Diese Gleichungen bestimmen zugleich mit der Gleichung der Fläche die Gestalt des Fadens.

3) Die Bewegungsgleichungen sind:

$$m\frac{dv_x}{dt} = \frac{d}{ds}\left(T\frac{dx}{ds}\right) + mX$$
$$m\frac{dv_y}{dt} = \frac{d}{ds}\left(T\frac{dy}{ds}\right) + mY$$
$$m\frac{dv_z}{dt} = \frac{d}{ds}\left(T\frac{dz}{ds}\right) + mZ.$$

Ausserdem ist

$$\frac{dx}{ds}\frac{dv_x}{dt} + \frac{dy}{ds}\frac{dv_y}{dt} + \frac{dz}{ds}\frac{dv_z}{dt} = 0.$$

Diese vier Gleichungen liefern x, y, z und T als Functionen von s und t.

4) Ist der Faden elastisch und bezeichne $d\sigma$ die ungedehnte, ds die gedehnte Elementenmenge, sowie λ den Elasticitätsmodulus des Fadens, so wird

$$m \frac{d v_x}{d t} = \frac{d}{d \sigma}\left(T \frac{d x}{d s}\right) + m X$$

$$m \frac{d v_y}{d t} = \frac{d}{d \sigma}\left(T \frac{d y}{d s}\right) + m Y$$

$$m \frac{d v_z}{d t} = \frac{d}{d \sigma}\left(T \frac{d z}{d s}\right) + m Z,$$

ferner

$$\frac{d s}{d \sigma} = 1 + \frac{T}{\lambda}$$

und

$$\frac{d x}{d \sigma}\frac{d v_x}{d \sigma} + \frac{d y}{d \sigma}\frac{d v_y}{d \sigma} + \frac{d z}{d \sigma}\frac{d v_z}{d \sigma} = \left(1 + \frac{T}{\lambda}\right)\frac{1}{\lambda}\frac{d T}{d t},$$

diese Gleichungen liefern v_x, v_y, v_z, s und T als Functionen von σ und t.

5) Ein vollkommen biegsamer und unausdehnbarer Faden, der in zwei festen Punkten aufgehangen ist und auf den die Schwere wirkt, bildet die sogenannte Kettenlinie. Ihre Gleichung ist

$$y = \frac{1}{2} m \left\{ e^{\frac{x}{m}} + e^{-\frac{x}{m}} \right\}.$$

Ueber diese Curve vergleiche: Kulik, Theorie und Tafeln der Kettenlinie. Abhandl. der k. böhm. Ges. der Wiss., 1832.

Es gilt der Satz: Unter allen Curven von bestimmter Länge, welche durch zwei gegebene Punkte gehen, liegt der Schwerpunkt der Kettenlinie am tiefsten.

§. 192.

Das Trägheitsmoment.

1) Das Trägheitsmoment irgend eines Körpers bezüglich einer Axe ist die Summe aller Producte aus den Massenelementen in die Quadrate der Abstände. Ist M die Gesammtmasse und T das Trägheitsmoment, so ist

$$T = M k^2,$$

wobei k den Namen des Trägheitsradius führt.

(Euler, Theoria motus corporum solidorum.)

2) Seien x, y, z die Coordinaten eines beliebigen Systempunktes von der Masse M, und A, B, C die Trägheitsmomente

des Systems bezüglich der drei Coordinatenaxen, und sei T das Trägheitsmoment dieses Systems bezüglich einer Geraden, die durch den Coordinatenursprung geht und mit den Axen die Winkel α, β, γ einschliesst, so wird:

$$A = \Sigma m (y^2 + z^2), \quad B = \Sigma m (x^2 + y^2), \quad C = \Sigma m (x^2 + y^2),$$

oder für ein Continuum

$$A = \int\int\int y^2 d\tau + \int\int\int z^2 d\tau,$$
$$B = \int\int\int z^2 d\tau + \int\int\int x^2 d\tau$$
$$C = \int\int\int x^2 d\tau + \int\int\int y^2 d\tau,$$

wobei

$$d\tau = dx\, dy\, dz$$

ist. Sei noch

$$l = \sum xym = \int\int\int xy\, d\tau$$
$$m = \sum yzm = \int\int\int yz\, d\tau$$
$$n = \sum xzm = \int\int\int xz\, d\tau,$$

so folgt:

$$T = A \cos^2\alpha + B \cos^2\beta + C \cos^2\gamma$$
$$- 2\{l \cos\alpha \cos\beta + m \cos\beta \cos\gamma + n \cos\alpha \cos\gamma\}.$$

3) Denkt man sich vom Coordinatenursprung ein Strahlenbündel gelegt und für jeden Strahl das T berechnet und auf ihn die Länge

$$\varrho = \frac{1}{\sqrt{T}}$$

aufgetragen, dann liegen die Endpunkte auf dem sogenannten Central- oder Trägheitsellipsoid, dessen Gleichung

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 - 2\{lxy + myz + nxz\} - 1 = 0$$

ist. Seine Axen heissen Hauptträgheitsaxen, und die Trägheitsmomente bezüglich dieser Axen die Hauptträgheitsmomente.

(Poinsot, Liouville Journ., Tom. XVI, 1851.)

Dieses Ellipsoid heisst auch das erste Trägheitsellipsoid. Die Grössen l, m, n führen den Namen der Deviationsmomente.

Es gelten nun folgende Sätze:

4) Der grössten Hauptaxe entspricht das kleinste, der kleinsten das grösste, der mittleren das mittlere Trägheitsmoment.

5) Die Summe der Trägheitsmomente für drei zu einander senkrecht sich in einem Punkte schneidende Axen eines Systems ist constant und gleich der Summe der Hauptträgheitsmomente dieses Punktes.

6) Um die Hauptaxen des Trägheitsellipsoids zu bestimmen, berechne man die (stets reellen) Wurzeln der Gleichung:

$$\begin{vmatrix} T-A, & l, & n \\ l, & T-B, & m \\ n, & m, & T-C \end{vmatrix} = 0,$$

sodann liefern die Gleichungen

$$(T-A)\cos\alpha + l\cos\beta + n\cos\gamma = 0$$
$$l\cos\alpha + (T-B)\cos\beta + m\cos\gamma = 0$$
$$n\cos\alpha + m\cos\beta + (T-C)\cos\gamma = 0$$

die Verhältnisse

$$\cos\alpha : \cos\beta : \cos\gamma$$

und damit die Richtungen der Hauptaxen.

7) Sei T das Trägheitsmoment eines Systems in Bezug auf eine Axe, T' dasjenige in Bezug auf eine ihr parallele, in der Entfernung ε befindliche, so wird

$$T' = T + M\varepsilon^2 - 2\varepsilon\Sigma m x,$$

wobei $M = \Sigma m$. Geht die Axe mit dem Trägheitsmomente T durch den Schwerpunkt, so ist

$$T' = T + M\varepsilon^2.$$

Unter allen diesen parallelen Axen besitzt die Schwerpunktsaxe das kleinste Trägheitsmoment.

8) Das Ellipsoid, dessen Hauptaxen die drei Hauptträgheitsradien des Schwerpunktes sind, wird das zweite Centralellipsoid genannt.

(Clebsch, Crelle Journ., Bd. 57, S. 73.)

Man erhält es, indem man auf jeder Axe des Schwerpunktes die Länge ihres Trägheitsradius aufträgt.

Vergl. Schell, Theorie der Bewegung und der Kräfte.

9) Für ein rechtwinkliges homogenes Parallelepiped mit den Kanten a, b, c und Dichtigkeit $= 1$ wird

$$A = \frac{M}{12}(b^2 + c^2), \quad B = \frac{M}{12}(a^2 + c^2), \quad C = \frac{M}{12}(a^2 + b^2),$$

wobei M die Masse des Parallelepipeds bezeichnet, also

$$M = a\,b\,c$$

ist.

10) Für das homogene Ellipsoid mit der Gleichung

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$$

findet man

$$A = \frac{M}{5}(b^2 + c^2), \quad B = \frac{M}{5}(a^2 + c^2), \quad C = \frac{M}{5}(a^2 + b^2),$$

wobei

$$M = \frac{4}{3}\,a\,b\,c\,\pi.$$

11) Für einen Rotationskörper, der durch die Umdrehung der Curve

$$y = f(x)$$

um die x-Axe entstanden ist, von $x = x_0$ bis $x = x_1$, findet man:

$$A = \frac{\pi}{2}\int_{x_0}^{x_1} y^4\,d\,x$$

$$B = C = \frac{A}{2} + \pi\int_{x_0}^{x_1} y^2 x^2\,d\,x,$$

wobei die Dichte des Körpers gleich 1 angenommen wurde.

Weitere Probleme in: Kraft, Sammlung von Problemen der analytischen Mechanik, V. Thl., II. Cap., Stuttgart 1885, sowie in „Problèmes de méc. rationelle“, p. P. M. Jullien, Paris 1855 und in den „Aufgaben zur analytischen Mechanik von A. Fuhrmann“.

§. 193.

Bewegung eines festen Körpers.

A. Bewegung um einen festen Punkt.

1) Seien $x\,y\,z$ die drei festen Axen, x_1, y_1, z_1 jene, die fest mit dem Körper verbunden sind und beweglich sind in Bezug auf die $x\,y\,z$-Axen. Und es sei

$$
\begin{aligned}
x &= a\ x_1 + b\ y_1 + c\ z_1 \\
y &= a'\ x_1 + b'\ y_1 + c'\ z_1 \\
z &= a''x_1 + b''y_1 + c''z_1,
\end{aligned}
$$

wobei

$$
\begin{array}{lll}
a\ = \cos(x x_1) & b\ = \cos(x y_1) & c\ = \cos(x z_1) \\
a' = \cos(y x_1) & b' = \cos(y y_1) & c' = \cos(y z_1) \\
a'' = \cos(z x_1) & b'' = \cos(z y_1) & c'' = \cos(z z_1).
\end{array}
$$

Setzt man

$$
\begin{aligned}
c\frac{db}{dt} + c'\frac{db'}{dt} + c''\frac{db''}{dt} &= p \\
c\frac{da}{dt} + c'\frac{da'}{dt} + c''\frac{da''}{dt} &= -q \\
b\frac{da}{dt} + b'\frac{da'}{dt} + b''\frac{da''}{dt} &= r,
\end{aligned}
$$

so folgt:

$$
\begin{aligned}
p y_1 - q x_1 &= 0 \\
r x_1 - p z_1 &= 0 \\
q z_1 - r y_1 &= 0.
\end{aligned}
$$

Diese drei Grössen p, q, r sind nichts anderes als die Richtungscosinusse der Momentanaxe, sie ist der geometrische Ort aller jener Punkte, in welchen die Geschwindigkeit im Momente dt gleich Null ist.

2) Die Winkelgeschwindigkeit um die Momentanaxe ist in der Entfernung Eins gleich

$$\sqrt{p^2 + q^2 + r^2},$$

also sind p, q, r ihre Componenten nach den Hauptaxen.

3) Seien ABC die drei Trägheitsmomente in Bezug auf die Hauptaxen, welche wir zu Coordinatenaxen für x_1, y_1, z_1 wählen, so haben wir:

$$
\begin{aligned}
C\frac{dr}{dt} + (B - A)pq &= \sum (x_1 Y - y_1 X) \\
B\frac{dq}{dt} + (A - C)rp &= \sum (z_1 X - x_1 Z) \\
A\frac{dp}{dt} + (C - B)rq &= \sum (y_1 Z - z_1 Y).
\end{aligned}
$$

Dieses sind die Euler'schen Gleichungen.

Setzt man

$$a = \cos\vartheta \sin\psi \sin\varphi + \cos\psi \cos\varphi$$
$$b = \cos\vartheta \sin\psi \cos\varphi - \cos\psi \sin\varphi$$
$$c = \sin\vartheta \sin\psi$$
$$a' = \cos\vartheta \cos\psi \sin\varphi - \sin\psi \cos\varphi$$
$$b' = \cos\vartheta \cos\psi \cos\varphi + \sin\psi \sin\varphi$$
$$c' = \sin\vartheta \cos\psi$$
$$a'' = -\sin\vartheta \sin\varphi$$
$$b'' = -\sin\vartheta \cos\varphi$$
$$c'' = \cos\vartheta,$$

so folgt noch

$$p = \sin\varphi \sin\vartheta \frac{d\psi}{dt} - \cos\varphi \frac{d\vartheta}{dt}$$
$$q = \cos\varphi \sin\vartheta \frac{d\psi}{dt} + \sin\varphi \frac{d\vartheta}{dt}$$
$$r = \frac{d\varphi}{dt} - \cos\vartheta \frac{d\psi}{dt}.$$

Bestimmt man aus den ersten Gleichungen p, q, r, und aus den letzten φ, ϑ, ψ, so sind damit die Coefficienten

$$\begin{matrix} a, & b, & c \\ a', & b', & c' \\ a'', & b'', & c'' \end{matrix}$$

gegeben, und somit x, y, z als Functionen von t.

4) Sind keine äusseren Kräfte X, Y, Z vorhanden, so wird

$$C\frac{dr}{dt} + (B - A)pq = 0$$
$$B\frac{dq}{dt} + (A - C)rp = 0$$
$$A\frac{dp}{dt} + (C - B)rq = 0.$$

Ihre Integration giebt:

$$Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 = h.$$

Dabei ist h eine Constante, welche die Summe der lebendigen Kräfte des Systems darstellt.

Ausserdem ist

$$A^2p^2 + B^2q^2 + C^2r^2 = k^2.$$

Dabei ist die Constante k^2 das Moment des resultirenden Paares der Bewegungsquantitäten des Systems.

Ausserdem wird

$$dt = \frac{C\sqrt{AB}.dr}{\sqrt{[k^2 - Bh + C(B-C)r^2][Ah - k^2 + C(C-A)r^2]}}.$$

Diese Gleichung liefert r als Function von t, sodann folgt aus den beiden ersteren:

$$p^2 = \frac{k^2 - Bh + C(B - C)r^2}{A(A - B)}$$

$$q^2 = \frac{k^2 - Ah + C(A - C)r^2}{B(B - A)}.$$

Mit diesen Grössen kann man sodann die Winkel φ, ϑ, ψ berechnen. Man hat

$$tg\,\varphi = \frac{Ap}{Bq}$$

$$tg\,\vartheta = \frac{\sqrt{A^2p^2 + B^2q^2}}{Cr}$$

$$d\psi = k\frac{h - Cr^2}{k^2 - c^2r^2}dt.$$

Damit ist das Problem gelöst.

5) Im Specialfalle, wo $A = B$ ist, ist r eine Constante n. Sei

$$A - C = \mu A$$

und M und ε zwei Constanten, so wird

$$p = M\sin\{\mu nt + \varepsilon\}$$

$$q = M\cos\{\mu nt + \varepsilon\}$$

$$\varphi = \varphi_0 + \mu nt$$

$$\psi = \psi_0 + k\frac{h - cn^2}{k^2 - c^2n^2}\cdot t$$

$$\vartheta = const = arc\cos\frac{Cn}{k}.$$

B. Bewegung um eine Axe.

1) Sei P die Kraft, p ihr Abstand von der Axe, M die Masse des Körpers, Mk^2 das Trägheitsmoment, l die Entfernung des Schwerpunktes von der Axe, so wird:

$$\frac{d\vartheta^2}{dt^2} = -\frac{\Sigma P_p}{M(k^2 + l^2)},$$

wobei ϑ der Drehungswinkel ist, oder für einen schweren Körper

$$\frac{d^2\vartheta}{dt^2} = -\frac{gl}{k^2 + l^2}\sin\vartheta,$$

wobei g die Beschleunigung der Schwere ist. Wird $k = 0$, so erhalten wir die Bewegungsgleichung des mathematischen Pendels

$$\frac{d^2\vartheta}{dt^2} = -\frac{g}{L}\sin\vartheta.$$

Ist demnach

$$L = \frac{k^2 + l^2}{l},$$

so werden die Schwingungen des mathematischen Pendels und des Körpers dieselben sein, vorausgesetzt, dass die Anfangsbedingungen dieselben sind.

L wird die Länge des einfachen **äquivalenten Pendels** genannt. Sie bestimmt zugleich den Abstand des **Schwingungsmittelpunktes** von der Axe.

§. 194.

Der Stoss.

1) Seien m_1, m_2 die Massen, u_1, u_2 die Geschwindigkeiten vor, v_1, v_2 die Geschwindigkeiten nach dem Stosse, so wird beim geraden Centralstoss

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 u_1 + m_2 u_2.$$

2) Sind die Massen unelastisch, so werden sie sich nach dem Stoss mit der Geschwindigkeit $v = v_1 = v_2$

$$v = \frac{m_1 u_1 + m_2 u_2}{m_1 + m_2}$$

weiter bewegen. Bei dem Stoss ist eine mechanische Arbeit

$$A = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \frac{(u_1 - u_2)^2}{2}$$

verloren gegangen.

3) Sind die beiden Körper vollkommen elastisch, so tritt zu der Gleichung in 1) noch die Gleichung

$$m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2 = m_1 u_1^2 + m_2 u_2^2,$$

und wir erhalten

$$v_1 = \frac{2 m_2 u_2 + (m_1 - m_2) u_1}{m_1 + m_2}$$

$$v_2 = \frac{2 m_1 u_1 - (m_1 - m_2) u_2}{m_1 + m_2}.$$

Man hat ferner:

$$u_1 - v_1 = 2 \frac{m_2}{m_1 + m_2} (u_1 - u_2)$$

$$u_2 - v_2 = 2 \frac{m_1}{m_1 + m_2} (u_2 - u_1).$$

Diese Gleichungen bestimmen den Geschwindigkeitsverlust und den Geschwindigkeitsgewinn des stossenden und gestossenen Körpers.

4) Der schiefe Centralstoss. Seien α_1 und α_2 die Winkel, welche die Richtungen der Geschwindigkeiten u_1 und u_2 mit der gemeinschaftlichen Normalen der Oberflächen im Augenblicke des Stosses einschliessen.

Die Geschwindigkeiten nach dem Stosse v_1 und v_2 sind:

$$v_1 = u_1 \cos \alpha_1 - \frac{m_2}{m_1 + m_2} \{u_1 \cos \alpha_1 - u_2 \cos \alpha_2\} (1 + \varepsilon)$$

$$v_2 = u_2 \cos \alpha_2 + \frac{m_1}{m_1 + m_2} \{u_1 \cos \alpha_1 - u_2 \cos \alpha_2\} (1 + \varepsilon),$$

wobei ε ein von der Elasticität der Körper abhängiger Factor ist; bei vollkommen elastischen Kugeln ist $\varepsilon = 1$. Die resultirenden Geschwindigkeiten sind:

$$w_1 = \sqrt{u_1^2 \sin^2 \alpha_1 + v_1^2}$$

$$w_2 = \sqrt{u_2^2 \sin^2 \alpha_2 + v_2^2}$$

und die Winkel β_1 und β_2, welche sie mit der gemeinschaftlichen Normale beider Körper einschliessen:

$$tg\, \beta_1 = \frac{u_1 \sin \alpha_1}{v_1}$$

$$tg\, \beta_2 = \frac{u_2 \sin \alpha_2}{v_2}.$$

§. 195.

Das Pendel.

1) Die Schwingungsdauer eines mathematischen Pendels T ist gegeben für sehr kleine Schwingungen durch die Gleichung

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}},$$

wobei l seine Länge und g die Beschleunigung der Schwere bezeichnet.

Sind die Amplituden kleiner als 10^0, so wird

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \left\{1 + \frac{d}{8l}\right\}$$

oder

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \left\{1 + \frac{1}{4} \sin^2 \frac{\alpha}{2}\right\},$$

wobei α den Elongationswinkel und d die Höhe der Schwingung bezeichnet.

Die allgemeinere Formel lautet:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \left\{1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} + \left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2 \sin^4 \frac{\alpha}{2} + \cdots\right.$$

2) Die Bewegungsgleichung eines mathematischen Pendels hat die Form

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} + \frac{g}{l} \sin\alpha = 0,$$

aus ihr folgt

$$\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)^2 = \frac{2g}{l} (\cos\alpha - \cos\beta),$$

wobei β die Integrationsconstante ist. Setzt man noch

$$\sin \frac{1}{2} \beta = k,$$

so wird

$$\sin\alpha = 2k \, sn\, t \sqrt{\frac{g}{l}} \, \Delta n\, t \sqrt{\frac{g}{l}}$$

$$\cos\alpha = 1 - 2k^2 \, sn^2 t \sqrt{\frac{g}{l}}.$$

3) Die Schwingungsdauer eines physikalischen Pendels ist gegeben durch

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{1}{g} \cdot \frac{\Theta}{S}},$$

dabei ist Θ das Trägheitsmoment und S das statische Moment. Setzt man

$$l = \frac{\Theta}{S},$$

so ergiebt sich die Länge eines mathematischen Pendels, welches mit dem physikalischen gleich schwingt. l wird die reducirte Länge des physikalischen Pendels genannt.

Für eine Stange, die homogen ist und deren Länge L ist, wird

$$l = \frac{2}{3} L.$$

4) Um die Schwingungen T_1 auf den leeren Raum zu reduciren, hat man nach Bessel:

$$T = T_1 \left\{1 - \frac{1}{2} \frac{p}{P} (1 + \gamma)\right\}$$
$$\gamma = 0{,}9459.$$

Dabei ist P das Gewicht des Pendels, p das Gewicht der verdrängten Luft.

5) Die Beschleunigung g_φ für die geographische Breite φ ist bekanntlich

$$g_\varphi = g_0 (1 + 0{,}00511781 \sin^2 \varphi)$$
$$g_0 = 9{,}781029 \text{ m},$$

damit wird die Länge des Secundenpendels

$$l_\varphi = \frac{g_\varphi}{\pi^2}$$

oder

$$l_\varphi = l_0 \{1 + 0{,}00511781 \sin^2 \varphi\}$$
$$l_0 = 991{,}027015 \text{ mm}.$$

Ueber die Theorie des Pendels vergleiche: Durège, Theorie der elliptischen Functionen. F. Neumann, Einleitung in die theoretische Physik, herausgegeben von Pape. Kraft, Aufgabensammlung zur analytischen Mechanik, Bd. II.

6) Das ballistische Pendel. Wird das Pendel von einer Kugel mit dem Gewichte p und von einer Geschwindigkeit v getroffen, und zwar in der Entfernung ε von der Axe, und ist α der Ausschlagwinkel, so ist

$$v = 2\left(\varepsilon + \frac{A\,l}{p\,\varepsilon}\right)\sqrt{\frac{g}{l}} \cdot \sin\frac{\alpha}{2}.$$

Dabei ist A das statische Moment und l die Länge des Pendels. Dieselbe Formel lässt sich auch anders schreiben. Sei P die Masse des Pendels und T die Scwingungsdauer, so wird

$$v = \frac{2gT}{\pi} \cdot \frac{p+P}{p} \cdot \sin\frac{\alpha}{2}.$$

7) Trägt ein cylindrischer Stab vom Halbmesser r an seinem unteren Ende eine Kugel von der Masse M und dem Radius R, und am anderen Ende im Abstande c eine Schneide, um welche er drehbar ist, und beträgt über derselben seine Länge noch d, so ist die Länge l des correspondirenden einfachen Pendels

$$l = \frac{M'\left\{\frac{r^2}{4} + \frac{(c+d)^2}{12} + \frac{(c-d)^2}{4}\right\} + M\left\{\frac{2}{5}R^2 + (c+R)^2\right\}}{M'\frac{c-d}{2} + M(c+R)},$$

wobei M' die Masse des Cylinders bezeichnet.

Die Schwingungsdauer T ist also

$$T^2 = \pi^2\frac{l}{g},$$

oder genähert, wenn M'/M sehr klein ist:

$$T^2 = \pi^2\frac{c+R}{g}.$$

§. 196.

Das Potential.

A. Allgemeines.

1) Die Einwirkung der Punkte P_x mit den Massen m_x auf einen Punkt P mit der Masse 1 ist gegeben durch

$$V = \mp\,\varepsilon\sum\frac{m_x}{r_x},$$

wobei r_x die Entfernung des Punktes m_x von dem Punkte P bezeichnet. Bilden die Punkte ein Continuum, so wird

$$V = \mp\,\varepsilon\int\frac{dm}{r}$$

und es ist das obere Zeichen für die Anziehung, das untere für die Abstossung zu nehmen. {Gauss und Riemann haben die dieser jetzt üblichen entgegengesetzte Bezeichnungsweise.}

Der Factor ε hängt von dem Maasse ab, nach dem man die Einwirkung messen will und wird gewöhnlich gleich 1 gesetzt.

Die Kraftcomponenten nach den drei Axen sind

$$X = -\frac{\partial V}{\partial x}, \quad Y = -\frac{\partial V}{\partial y}, \quad Z = -\frac{\partial V}{\partial z}.$$

Die Kraftcomponente in der Richtung n

$$N = -\frac{\partial V}{\partial n}.$$

2) Die Flächen, in welchen V eine Constante ist, werden Niveauflächen genannt. Die Richtungscosinuse der Normalen dieser Flächen sind proportional den Grössen

$$\frac{\partial V}{\partial x}, \quad \frac{\partial V}{\partial y}, \quad \frac{\partial V}{\partial z},$$

und es kann die Kraft nur senkrecht auf diese Flächen wirken längs der sogenannten Kraftlinien, deren Gleichung

$$dx : dy : dz = \frac{\partial V}{\partial x} : \frac{\partial V}{\partial y} : \frac{\partial V}{\partial z}$$

ist.

3) Die Function V nennen wir nach Clausius die Potentialfunction. Sie wurde zuerst von Lagrange in die mathematische Physik eingeführt. Ihre wahre Bedeutung erkannte jedoch erst Green (1828, vergl. Crelle Journ. 39, 44, 47).

4) Die Arbeit, welche bei irgend einer Bewegung des Punktes P geleistet wird, ist gleich der Differenz derjenigen Werthe, welche die Potentialfunction in der End- und Anfangslage hat, wenn man anziehende Kräfte voraussetzt.

Daher können wir sagen, dass die Potentialfunction in einem Punkte jene Arbeit angiebt, welche nöthig ist, um diesen Punkt aus der Entfernung ∞ in seine gegenwärtige Lage zu bringen.

5) Gehört der Punkt P einem zweiten Körper an, so wird

$$W = \int \frac{dm\,dm'}{r} = \int V\,dm'$$

die Potentialfunction des ersten Körpers auf den zweiten genannt und es gilt nach Gauss der Satz

$$W = \int V\,dm' = \int V'\,dm,$$

d. h. die Potentialfunction eines Körpers auf einen zweiten ist gleich der Potentialfunction dieses zweiten Körpers auf den ersten.

Denken wir uns die beiden Körper gleich und vereinigt, so wird jeder Punkt zweimal vorkommen, daher wird

$$W = \frac{1}{2} \int \frac{dm\, dm'}{r}$$

das Potential eines Körpers auf sich selbst, also jene Arbeit, die nöthig war, die Massenpunkte aus der unendlichen Entfernung von einander in ihre gegenwärtige Configuration zu bringen.

6) Seien a, b, c die Coordinaten von dm, h die Dichtigkeit in dm, so wird

$$V = \int\int\int \frac{h\, da\, db\, dc}{r}$$
$$= \int\int\int \frac{h\, da\, db\, dc}{\sqrt{(a-x)^2 + (b-y)^2 + (c-z)^2}}$$

das Potential (des Systems, dem dm angehört) im Punkte x, y, z. Setzt man

$$a - x = r \sin\alpha \cos\beta$$
$$b - y = r \sin\alpha \sin\beta$$
$$c - z = r \cos\alpha,$$

so wird

$$V = \int\int\int h r \sin\alpha\, dr\, d\alpha\, d\beta,$$

oder wenn man allgemeiner

$$a - x = r \sin\alpha \cos\beta - \varrho \cos\psi \sin\varphi$$
$$b - y = r \sin\alpha \sin\beta - \varrho \sin\psi \sin\varphi$$
$$c - z = r \cos\alpha - \varrho \cos\varphi$$

setzt und

$$\cos w = \cos\alpha \cos\varphi + \sin\alpha \sin\varphi \cos(\beta - \psi)$$

macht

$$V = \int\int\int \frac{h r^2 \sin\alpha\, dr\, d\alpha\, d\beta}{\sqrt{r^2 - 2 r \varrho \cos w + \varrho^2}} = \int \frac{dm}{(r^2 - 2 r \varrho \cos w + \varrho^2)^{\frac{1}{2}}}.$$

Sei

$$R^2 = r^2 - 2 r \varrho \cos w + \varrho^2,$$

so wird:

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{\varrho} + \frac{r}{\varrho^2} P_1(\cos w) + \frac{r^2}{\varrho^3} P_2(\cos w) + \cdots \quad \varrho > r$$

oder

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{r} + \frac{\varrho}{r^2} P_1(\cos w) + \frac{\varrho^2}{r^3} P_2(\cos w) + \cdots \quad r > \varrho.$$

Vergl. §. 139,

und damit für $\varrho > r$

$$V = \frac{Y_0}{\varrho} + \frac{Y_1}{\varrho^2} + \frac{Y_2}{\varrho^3} + \cdots$$

wobei

$$Y_0 = \int dm, \quad Y_\varkappa = \int r^\varkappa P_\varkappa(\cos w)\, dm$$

oder für $r > \varrho$

$$V = X_0 + X_1 \varrho + X_2 \varrho^2 + \cdots,$$

wobei

$$X_0 = \int \frac{dm}{r}, \quad X_\varkappa = \int \frac{P_\varkappa(\cos w)}{r^{\varkappa+1}}\, dm.$$

7) Aus den beiden letzten Gleichungen folgt:

I. Das Potential eines Systems, welches ganz im Endlichen liegt, ist für unendlich entfernte Punkte $= 0$, aber so, dass

$$\lim V\varrho = \int dm \text{ für } \lim \varrho = \infty.$$

II. Sei V die Potentialfunction der Massen, welche sämmtlich ausserhalb eines geschlossenen Raumes liegen, und sei V in irgend einem Theile des Raumes constant $= V_0$, so muss V in diesem ganzen Raume $= V_0$ sein.

8) Die Functionen

$$V, \quad \frac{\partial V}{\partial x}, \quad \frac{\partial V}{\partial y}, \quad \frac{\partial V}{\partial z}$$

sind für den ganzen Raum endlich und stetig.

Ferner convergiren die Werthe

$$x V, \quad y V, \quad z V,$$

$$x^2 \frac{\partial V}{\partial x}, \quad y^2 \frac{\partial V}{\partial y}, \quad z^2 \frac{\partial V}{\partial z},$$

mit wachsenden Werthen der Coordinaten x, y, z gegen eine bestimmte endliche Grenze.

Dasselbe gilt auch für

$$r V, \quad r^2 \frac{\partial V}{\partial x}, \quad r^2 \frac{\partial V}{\partial y}, \quad r^2 \frac{\partial V}{\partial z},$$

und zwar wird $r V$ immer von Null verschieden sein, die übrigen Grössen nur im Allgemeinen.

9) Für einen Punkt, der ausserhalb der wirkenden Masse liegt, ist

$$\varDelta V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0.$$

(Gleichung von Laplace, Théorie des attractions, Hist. de l'Acad., 1772.)

Liegt der Punkt dagegen innerhalb der wirkenden Masse, so wird:

$$\varDelta V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = -4\pi k,$$

wobei k die Dichte in dx, dy, dz bezeichnet. (Gleichung von Poisson, Bull. de la sociét. Phil. III. Mém. de l'Acad., T. VI.)

10) Besitzen zwei Functionen die Eigenschaften 8) und 9), so sind sie identisch. Daher drücken diese Sätze die nothwendigen und hinreichenden Eigenschaften der Potentialfunction aus. (Satz von Dirichlet, Ueber die im umgekehrten Verhältnisse des Quadrates der Entfernung wirkenden Kräfte, 1876.)

Die Literatur der Theorie des Potentials findet man ziemlich vollständig in: Bacharach, Abriss der Geschichte der Potentialtheorie. Die Theorie selbst in: Clausius, Die Potentialfunction und das Potential, Leipzig 1885. Ferner fast in allen Lehrbüchern der Mechanik, insbesondere aber in: Thomson und Tait, Handbuch der theoretischen Physik, Braunschweig 1879. Vergl. auch: Heine, Handb. der Kugelfunctionen, Bd. II.

11) Seien U und V zwei Functionen der Raumcoordinaten, und sei

$$\sum \frac{\partial U}{\partial x}\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\partial U}{\partial x}\frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial y}\frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial U}{\partial z}\frac{\partial V}{\partial z},$$

ferner U und V, sowie ihre ersten und zweiten Differentialquotienten nirgends im betrachteten Raume unendlich gross, so gelten die Sätze:

$$\text{I.}\quad \int \sum \frac{\partial U}{\partial x}\frac{\partial V}{\partial x}\,d\tau = -\int U\frac{\partial V}{\partial n}\,dw - \int U \varDelta V d\tau$$

$$\text{II.}\quad \int \sum \frac{\partial U}{\partial x}\frac{\partial V}{\partial x}\,d\tau = -\int V\frac{\partial U}{\partial n}\,dw - \int V \varDelta U d\tau$$

$$\text{III.}\quad \int \left(U\frac{\partial V}{\partial n} - V\frac{\partial U}{\partial n}\right) dw = \int (V\varDelta U - U\varDelta V)\,d\tau,$$

dabei ist $d\tau$ ein Raumelement und die Integrale nach τ erstrecken sich über den ganzen gegebenen Raum; dw ist ein Element der Oberfläche und das Integral nach w erstreckt sich über die ganze Oberfläche; n ist die auf die Oberfläche errichtete, nach innen zu als positiv gerechnete Normale. (Satz von Green.)

12) Es giebt für einen beliebigen begrenzten Raum immer eine und nur eine Function V von x, y, z, die selbst und deren erste Differentialquotienten stetig sind und die der Gleichung

$$\Delta V = 0$$

innerhalb des ganzen Raumes erfüllt und die in jedem Punkte der Oberfläche einen vorgeschriebenen Werth hat.

Unter allen Functionen U, die diese Bedingungen erfüllen, jedoch so, dass

$$\Delta U \gtrless 0$$

ist, hat V die Eigenschaft, dass es das Integral

$$Q = \int \left\{\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)^2\right\} d\tau$$

zu einem Minimum macht, d. h.

$$\int \left\{\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)^2\right\} d\tau$$

ist unter allen Q ein Minimum.

(Das Dirichlet'sche Princip; vergl. Dirichlet, l. c. §. 32 bis 38. Früher und allgemeiner bewies Thomson die Existenz der Potentialfunction in Cambr. and Dublin Mathem. Journ. 1848.)

13) Bisher haben wir die wirkende Masse als dreidimensional betrachtet; die folgenden Theoreme beziehen sich auf solche Massen, die auf Flächen ausgebreitet sind.

Sei n die Richtung der Normalen, so wird

$$\left(\frac{\partial V}{\partial n}\right)_+ - \left(\frac{\partial V}{\partial n}\right)_- = -4\pi\varkappa,$$

wobei der Index $+$ oder $-$ anzeigen soll, dass $\partial V/\partial n$ unendlich nahe der Fläche in der positiven oder negativen Richtung von n zu nehmen ist. $\varkappa$ ist die Dichte des Oberflächenelementes um n herum.

14) Sei dw ein Element der mit einer Masse belegten Schicht, auf den Normalen denken wir uns unendlich kleine Längen ε aufgetragen. Dadurch entsteht eine zweite Fläche, die wir uns

mit einer eben so grossen Masse belegt denken, die jedoch von entgegengesetzten Vorzeichen ist, sodann ist

$$V = \int \varkappa\, \varepsilon \, \frac{\partial \left(\frac{1}{r}\right)}{n} \, dw$$

die Potentialfunction dieser **Doppelschicht** in Bezug auf einen Punkt in der Entfernung r. $\varkappa\,\varepsilon$ wird **das Moment** der Doppelbelegung genannt.

Die durch diese Gleichung definirte Potentialfunction erleidet sprungweise die Vergrösserung $4\pi\varkappa\varepsilon$, wenn der Punkt durch die Doppelschicht hindurchgeht, der Differentialquotient $\partial V / \partial n$ ist an ihr endlich und stetig.

Ist die Doppelschicht geschlossen, so wird ihr Potential

$$0, \quad 2\pi\varkappa\varepsilon, \quad 4\pi\varkappa\varepsilon,$$

je nachdem der Punkt, auf den sie einwirkt, ausserhalb, auf der Oberfläche oder innerhalb der Doppelschicht sich befindet. {Der Name der Doppelschicht: „Doppelbeleg" rührt von Helmholtz her. Pogg. Ann. 89 (1853). Ausführlicher behandelt in: C. Neumann, Untersuchungen über das logarithmische und Newton'sche Potential 1877, Cap. IV., VII.}

15) Wir wollen nun eine sehr wichtige Aufgabe lösen:

Ein Raum R ist begrenzt von einer Fläche S, und der Werth von

$$\Delta V = -4\pi k$$

ist im Innern von R gegeben, so wie die Werthe von V für alle Punkte von S. Es wird gesucht der Werth V_p von V für einen Punkt P innerhalb R.

Die Entfernung von P von irgend einem Punkte sei r.

Denken wir uns nun eine Function U', die in ganz R endlich und stetig, und deren Werth auf der Oberfläche von R, d. h. in S, gleich ist

$$-\frac{1}{r},$$

und die der Bedingung

$$\Delta U' = 0$$

genügt, sodann hat die Function

$$U = \frac{1}{r} + U'$$

olgende Eigenschaften: Sie ist in R, ausgenommen P, endlich ınd stetig, in S gleich Null und genügt innerhalb der Bedingung

$$\Delta U = 0.$$

Die Function U führt den Namen der Green'schen Function. Sodann wird

$$4\pi V_p = -\int U D V d R + \int V \frac{\partial U}{\partial n} d S.$$

Das erste Integral bezieht sich auf das Innere, das zweite ıuf die Oberfläche von S.

Durch diese Gleichung ist das obere Problem zurückgeführt ıuf die Aufsuchung einer Function U, die die bezeichneten Eigenıchaften hat.

B. Specielle Probleme.

I. Kugelschale. Der innere Halbmesser sei r_1, der äussere r_2, und die Dichte eine Function von r. Sei P_1, P_2, P_3 ein Punkt nnerhalb, in- oder ausserhalb der Kugelschale, V_1, V_2, V_3 die :ugehörige Potentialfunction, so wird

$$\frac{d^2 V_1}{d r^2} + \frac{2}{r} \frac{d V_1}{d r} = 0$$

$$\frac{d^2 V_2}{d r^2} + \frac{2}{r} \frac{d V_2}{d r} + 4\pi k = 0$$

$$\frac{d^2 V_3}{d r^2} + \frac{2}{r} \frac{d V_3}{d r} = 0,$$

lamit wird

$$V_1 = 4\pi \int_{r_1}^{r_2} k r\, d r$$

›der

$$\frac{\partial V_1}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial V_1}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial V_1}{\partial z} = 0, \quad \frac{d V}{d r} = 0,$$

vie schon Newton (Principia l. I., s. XII, prop. LXX) gezeigt.

Sei $f(r)$ die Masse innerhalb r, so wird

$$V_2 = \frac{f(r)}{r} + 4\pi \int_{r_1}^{r_2} k r\, d r$$

ınd demnach

$$\frac{d V_2}{d r} = -\frac{f(r)}{r^2}.$$

Endlich ist

$$V_3 = \frac{4\pi}{r} \int_{r_1}^{r_2} k r^2 dr = \frac{f(r_2)}{r}.$$

II. Ueber das Potential eines Ellipsoids vergl.: Schell Theorie der Bewegung und der Kräfte 1870, IV. Thl., IX. Cap.

Man findet für einen inneren Punkt:

$$V = \pi \int_0^\infty \frac{ds}{D} \left\{1 - \frac{x^2}{s + a^2} - \frac{y^2}{s + b^2} - \frac{z^2}{s + c^2}\right\},$$

wobei

$$D^2 = \left(1 + \frac{s}{a^2}\right)\left(1 + \frac{s}{b^2}\right)\left(1 + \frac{s}{c^2}\right)$$

und

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

die Gleichung des Ellipsoids ist.

Für einen äusseren Punkt findet man dagegen

$$V = \pi \int_\sigma^\infty \frac{ds}{D} \left\{1 - \frac{x^2}{s + a^2} - \frac{y^2}{s + b^2} - \frac{z^2}{s + c^2}\right\},$$

wobei σ die einzige reelle und positive Wurzel von

$$\frac{x^2}{\sigma + a^2} + \frac{y^2}{\sigma + b^2} + \frac{z^2}{\sigma + c^2} = 1$$

ist. Es gelten die Sätze:

Die Anziehungskräfte, welche von zwei homogenen confocalen Ellipsoiden auf denselben äusseren Punkt ausgeübt werden, haben dieselbe Richtung und sind den Massen der Ellipsoide proportional. (Satz von Maclaurin.)

Zwei innere Punkte, welche auf einer durch den Mittelpunkt des Ellipsoids gehenden Geraden liegen, werden mit Kräften angezogen, welche der Entfernung vom Mittelpunkte proportional und einander parallel sind.

Zwei ähnliche und ähnlich liegende homogene Ellipsoide von gleicher Dichte ziehen einen für beide inneren Punkte mit gleichen und gleich gerichteten Kräften an.

Bestimmt man auf zwei confocalen, conaxialen Ellipsoiden, welche homogen und von gleicher Dichte sind, zwei correspondirende Punkte, so verhalten sich die Attractionscomponenten nach den Hauptaxen, welche jedes Ellipsoid auf den festgesetzten Punkt des anderen ausübt, wie die Flächeninhalte ihrer Haupt-

schnitte, welche auf der Richtung der Componenten senkrecht stehen.

Satz von Iwory nach Poisson beim beliebigen Attractionsgesetz gültig.

Wendet man diesen letzteren Satz auf zwei concentrische Kugeln an, so ergiebt sich, dass das einzige Anziehungsgesetz, für welches eine homogene sphärische Schicht keine Wirkung auf die Punkte ihres Innern ausübt, das des umgekehrten Verhältnisses des Quadrates der Entfernung ist.

Zur Bestimmung der Potentialfunction hat man überhaupt folgende Wege:

1) Directe Auswerthung des Integrals A. 6).
2) Integration der Laplace-Poisson'schen Gleichung A. 9).
3) Integration dieser Gleichung vermittelst der Green'schen Function A. 15).
4) Näherungsintegrationen.

Beispiele: Beer, Einleitung in die Elektrostatik. Kölleritzsch, Lehrbuch der Elektrostatik.

5) Benutzung der Diagramme.

Beispiel: Maxwell, Treatise part. I., chapt. VII.

6) Transformation vermittelst der reciproken Radien.

Beispiel: Heine, Handbuch der Kugelfunctionen II., VI. Cap.

C. Das logarithmische Potential.

Das logarithmische Potential gründet sich auf die Thatsache, dass die Newton'sche Anziehung, der mit Masse von der Dichtigkeit σ belegten z-Axe, auf einen Punkt der xy-Ebene ersetzt werden kann durch die Anziehung proportional der ersten Potenz der Entfernung und ausgehend vom Nullpunkte, in dem man sich die doppelte Masse concentrirt denkt.

Das Potential wird sodann

$$V = \int dm \log r.$$

Das logarithmische Potential wird im Unendlichen unendlich, das Newton'sche verschwindet.

Sowohl die Laplace'sche, als auch die Poisson'sche Gleichung gilt für das logarithmische Potential.

Das logarithmische Potential leistet gute Dienste besonders dann, wenn sich ein Problem auf zwei Parameter zurückführen lässt.

Vergl. Neumann, Untersuchungen über das logarithmisch und Newton'sche Potential, 1877.

§. 197.

Elasticität.

1) Seien x, y, z die Coordinaten irgend eines Punktes im Zustande des Gleichgewichtes

$$x + u, \quad y + v, \quad z + w$$

jene zur Zeit t, und sei ϱ die Dichte des elastischen Körpers die wir constant voraussetzen, so werden

$$X - \varrho \frac{d^2 u}{d t^2} = \frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} + \frac{\partial X_z}{\partial z}$$

$$Y - \varrho \frac{d^2 v}{d t^2} = \frac{\partial Y_x}{\partial x} + \frac{\partial Y_y}{\partial y} + \frac{\partial Y_z}{\partial z}$$

$$Z - \varrho \frac{d^2 w}{d t^2} = \frac{\partial Z_x}{\partial x} + \frac{\partial Z_y}{\partial y} + \frac{\partial Z_z}{\partial z}$$

die allgemeinen Gleichungen für die Bewegung eines elastischen Mediums. Die Grössen $X_x \ldots Z_z$ sind die Druckcomponenten. Man hat allgemein

$$X_y = Y_x$$

$$Y_z = Z_y$$

$$Z_x = X_z.$$

2) Im Falle des Gleichgewichtes ist

$$X = \frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} + \frac{\partial X_z}{\partial z}$$

$$Y = \frac{\partial Y_x}{\partial x} + \frac{\partial Y_y}{\partial y} + \frac{\partial Y_z}{\partial z}$$

$$Z = \frac{\partial Z_x}{\partial x} + \frac{\partial Z_y}{\partial y} + \frac{\partial Z_z}{\partial z}.$$

3) Zu diesen Gleichungen kommen noch die Oberflächenbedingungen hinzu. Sei P_n der auf die Einheit der Oberfläche wirkende Druck und

$$X_n \; Y_n \; Z_n$$

seine Componenten, so sind die Grenzbedingungen:

$$X_n = X_x \cos(n, x) + X_y \cos(n, y) + X_z \cos(n, z)$$

$$Y_n = Y_x \cos(n, x) + Y_y \cos(n, y) + Y_z \cos(n, z)$$

$$Z_n = Z_x \cos(n, x) + Z_y \cos(n, y) + Z_z \cos(n, z).$$

4) Setzt man

$$x_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad x_y = y_x = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}$$

$$y_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad x_z = z_x = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}$$

$$z_z = \frac{\partial w}{\partial z}, \quad z_y = y_z = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}$$

und

$$f = a_{11} x_x^2 + a_{22} y_y^2 + a_{33} z_z^2 + 2 a_{12} x_x y_y + 2 a_{13} x_z z_z + \cdots + 2 a_{23} y_y z_z + \cdots$$

sodann wird

$$X_x = \frac{\partial f}{\partial x_x}, \quad Y_z = Z_y = \frac{\partial f}{\partial y_z}$$

$$Y_y = \frac{\partial f}{\partial y_y}, \quad Z_x = X_z = \frac{\partial f}{\partial z_x}$$

$$Z_z = \frac{\partial f}{\partial z_z}, \quad X_y = Y_x = \frac{\partial f}{\partial x_y},$$

f ist eine homogene Function zweiten Grades der sechs Argumente

$$x_x, \; x_y, \; y_y, \; y_z, \; z_z, \; z_x,$$

die Coefficienten

$$a_{11}, \; a_{12}, \; a_{13} \; \ldots \; a_{33}$$

werden Elasticitätscoefficienten genannt.

5) Die Grösse

$$\sigma = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z},$$

die vom Coordinatensystem unabhängig ist, wird die räumliche Dilatation genannt.

6) Ist der Körper homogen, so kann man schreiben:

$$\varrho \frac{d^2 u}{d t^2} = X + (\lambda + \mu) \frac{\partial \sigma}{\partial x} + \mu \Delta u$$

$$\varrho \frac{d^2 v}{d t^2} = Y + (\lambda + \mu) \frac{\partial \sigma}{\partial y} + \mu \Delta v$$

$$\varrho \frac{d^2 w}{d t^2} = Z + (\lambda + \mu) \frac{\partial \sigma}{\partial z} + \mu \Delta w,$$

wobei wie üblich

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

7) Die allgemeinen Gleichungen mit Rücksicht auf die Temperaturveränderungen sind:

$$X - \varrho \frac{d^2 u}{dt^2} = p \frac{\partial s}{\partial x} + \frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} + \frac{\partial X_z}{\partial z}$$

$$Y - \varrho \frac{d^2 v}{dt^2} = p \frac{\partial s}{\partial y} + \frac{\partial Y_x}{\partial x} + \frac{\partial Y_y}{\partial y} + \frac{\partial Y_z}{\partial z}$$

$$Z - \varrho \frac{d^2 w}{dt^2} = p \frac{\partial s}{\partial z} + \frac{\partial Z_x}{\partial x} + \frac{\partial Z_y}{\partial y} + \frac{\partial Z_z}{\partial z},$$

wobei s die Temperatur und p eine Constante bezeichnet. Es ist

$$p = M\alpha,$$

wobei M der Elasticitätsmodul, und α der lineare thermische Coefficient ist.

Die Gleichungen für die Oberfläche lauten nun

$$X_n = p\, s \cos(n,x) + X_x \cos(n,x) + X_y \cos(n,y) + X_z \cos(n,z)$$

$$Y_n = p\, s \cos(n,y) + Y_x \cos(n,x) + Y_y \cos(n,y) + Y_z \cos(n,z)$$

$$Z_n = p\, s \cos(n,z) + Z_x \cos(n,x) + Z_y \cos(n,y) + Z_z \cos(n,z).$$

8) Wird ein stabförmiger Körper vom Querschnitte F durch eine Kraft P gezogen, und sei l seine Länge, so wird

$$\lambda = l \frac{\sigma}{F}$$

die Gesammtdehnung dieses Körpers sein. σ wird die specifische Ausdehnung genannt und es wird

$$\sigma = \frac{\lambda}{l} = \frac{P}{FE},$$

wobei E der Elasticitätsmodul ist; es ist dieses diejenige Kraft, welche ein Prisma vom Querschnitte 1 um seine eigene Länge verlängern würde, wenn dies ohne Ueberschreitung der Elasticitätsgrenze möglich wäre.

9) Wird ein prismatischer Stab von der Länge l, der Breite b und der Höhe h gebogen, so werden gewisse Theile kürzer, gewisse länger, es wird aber immer eine Faser geben, die während der Biegung gleich bleibt. Diese wird die neutrale Faser genannt. Sei P das spannende Gewicht, E der Elasticitätsmodul, T das Trägheitsmoment, und es werde die Mitte der ursprünglichen Lage als die X-Axe, und die Senkrechte darauf als Y-Axe angenommen, so ist

$$y\, E\, T = P \left\{ \frac{l}{2} x^2 - \frac{x^3}{6} \right\}$$

ie Gleichung der elastischen Linie, d. h. jener Curve, welche ie neutrale Faser bei der Biegung macht.

Die Abweichung am Ende von der ursprünglichen Lage ist

$$4 \frac{P}{E} \frac{l^3}{b h^3}.$$

Die allgemeine Gleichgewichtsgleichung lässt sich schreiben rie folgt:

$$E T \frac{d^4 y}{d x^4} = \varrho q Y,$$

labei ist q der Querschnitt und ϱ die Dichte des Prismas. Die allgemeine Bewegungsgleichung lautet:

$$E T \frac{d^4 y}{d x^4} = \varrho q \left\{ Y - \frac{d^2 y}{d t^2} \right\}$$

10) Die Zugkraft, welche einen prismatischen Körper vom Querschnitte Eins bis zur Elasticitätsgrenze ausdehnt, wird der Tragmodul der Ausdehnung genannt und mit T_1 bezeichnet. Die Druckkraft, welche diesen Körper bis zur Grenze der Elasticität zusammendrückt, wird der Tragmodul der Zusammendrückung genannt und mit T_2 bezeichnet.

Unter dem Tragvermögen versteht man das Product aus dem Querschnitt in den Tragmodul. Man erhält, wenn man dasselbe mit P_1, resp. P_2 bezeichnet,

für den Zug $P_1 = F T_1$

für den Druck $P_2 = F T_2$.

Die Zugkraft, bei welcher ein prismatischer Körper vom Querschnitt 1 zerreisst, wird der Festigkeitsmodul genannt und mit K_1 und K_2 für den Zug, resp. den Druck bezeichnet.

11) Sei G das Gewicht des prismatischen Körpers von der Länge l und dem Querschnitte F, so ist seine Ausdehnung infolge der eigenen Schwere halb so gross als die, welche ein Gewicht G am Ende des Körpers hervorbringt, also

$$= \frac{\frac{1}{2} G}{E F} l.$$

Dasselbe Gesetz gilt auch für die Compression. Sei ϱ die Dichte des Prismas, und K sein Festigkeitsmodul, so zerreist dasselbe bei verticaler Aufhängung infolge eigener Schwere bei einer Länge $= (K : \varrho)$.

12) Man hat in Kilogrammen per 1 qmm Querschnitt

A. Für den Zug.

Namen der Körper	E	T_1	K_1
Gusseisen	10 000	6,67	13
Schmiedeeisen	20 000	13 — 20	41 — 62
Holz in der Richtung der Fasern .	1 100	1,8	6,5

B. Für den Druck.

Namen der Körper	E	T_2	K_2
Gusseisen	9 900	13,13	73
Schmiedeeisen	19 700	13,13	22
Holz in der Richtung der Fasern .	—	—	4,8

Ausserdem sind die Werthe von K_2 für Basalt = 20, Ziegelstein = 0,6, Mörtel = 0,4.

13) Man nennt die gerade Linie, in welcher die neutrale Faserschicht von der Ebene eines Querschnittes geschnitten wird, die neutrale Axe des Querschnittes.

Sodann definiren wir die Summe der Producte aus den einzelnen Elementen des Querschnittes in die Quadrate der Entfernungen von der neutralen Axe als das Maass des Biegungsmomentes und bezeichnen sie mit W. Diese Grösse multiplicirt mit dem Elasticitätsmodul nennt man das Biegungsmoment.

Für ein Prisma von der Breite b und Länge l ist für die durch den Schwerpunkt parallel zu b gehende Axe

$$W = \frac{1}{12} b h^3,$$

für einen Kreis vom Radius r

$$W = \frac{\pi}{4} r^4,$$

für einen beliebigen Querschnitt bezogen auf die X-Axe

$$W_x = \frac{1}{3} \int y^3 dx$$

und bezogen auf die Y-Axe

$$W_y = \int x^2 y\, dx.$$

Sei ϱ der Krümmungshalbmesser der elastischen Linie, und M das statische Moment aller auf den betreffenden Querschnitt wirkenden äusseren Kräfte, so wird

$$\varrho = \frac{WE}{M}.$$

Wir haben, wenn die Biegung gering ist, näherungsweise

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{d^2 y}{d x^2},$$

daraus folgt:

$$WE \frac{d^2 y}{d x^2} = M$$

als die Gleichung der elastischen Linie für diesen Fall. Es gelten ferner folgende Sätze:

Es ist das Maass W des Biegungsmomentes bezogen auf die neutrale Axe gleich dem Maasse W_1 bezogen auf irgend eine zur neutralen parallele Axe vermindert um das Product aus dem Querschnitte F in das Quadrat des Abstandes beider Axen. Die Grösse W ist also auf die neutrale Axe ein Minimum.

Seien W_x und W_y die Werthe von W bezogen auf die X- und Y-Axe, W_u und W_w die Werthe von W bezogen auf die U- und W-Axe, wobei $U \perp W$ denselben Anfangspunkt besitzt wie X und Y, so wird

$$W_x + W_y = W_u + W_w.$$

Vergl. Weisbach, Lehrb. der Ingenieur-Mechanik, Bd. I.

14) Unter dem Drehungsmoment der Torsion wird die Grösse

$$(W_x + W_y)\, C = W_z C$$

verstanden, wobei C das Modul der Torsionselasticität ist.

Sei P die tordirende Kraft und α der Torsionswinkel, so ist für einen Cylinder von der Länge l und dem Durchmesser a

$$\alpha = \frac{Pal}{C W_r}, \quad W_r = \frac{\pi}{2} a^4.$$

§. 198.

Hydrostatik.

1) Sei p der Druck, ϱ die Dichte, und seien X, Y, Z die Componenten der wirkenden Kräfte, so muss im Zustande des Gleichgewichtes

$$dp = \varrho\{Xdx + Ydy + Zdz\} = 0,$$

also auch

$$Xdx + Ydy + Zdz = 0.$$

Diese Gleichung stellt die Niveauflächen dar. Im Zustande des Gleichgewichtes steht die Resultirende

$$R = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}$$

auf den Niveauflächen senkrecht und es existirt nothwendigerweise eine Kräftefunction U, so dass

$$X = \frac{\partial U}{\partial x}, \quad Y = \frac{\partial U}{\partial y}, \quad Z = \frac{\partial U}{\partial z}.$$

2) Dreht sich eine Flüssigkeit gleichförmig um die Z-Axe mit einer Geschwindigkeit w, so ist

$$Xdx + Ydy + Zdz + w^2\{xdx + ydy\} = 0$$

die Gleichung der Niveauflächen und zugleich der Oberfläche der rotirenden Flüssigkeit.

3) In einem Cylinder von der Höhe h und dem Radius a wird, wenn g die Beschleunigung der Schwere bedeutet,

$$x^2 + y^2 = \frac{2g}{w^2}\left\{z + \frac{a^2w^2}{4g} - h\right\}.$$

Ferner ist der Druck, wenn p_0 den Druck auf der Oberfläche bezeichnet und

$$c = p_0 - \frac{a^2w^2\varrho}{4} + g\varrho h$$

gesetzt wird,

$$p = -g\varrho z + \varrho\frac{w^2}{2}(x^2 + y^2) + c.$$

4) Rotirt eine flüssige Masse mit einer constanten Geschwindigkeit um die z-Axe und werden hierbei ihre Theile von dem Anfangspunkte des Coordinatensystems nach dem Newton'schen

setze angezogen, so wird, wenn r die Entfernung eines Punktes
r Masse vom Coordinatenursprung und g die Grösse der An-
hung in der Entfernung a bezeichnet,

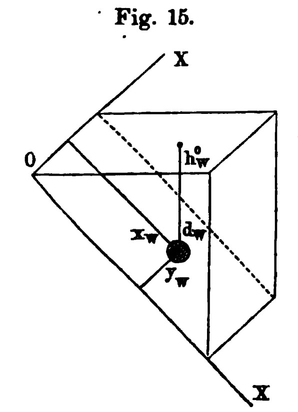
$$\frac{g a^2}{r} + \frac{w^2}{2}(x^2 + y^2) = Const.$$

Gleichung der gesuchten Oberfläche sein.

5) Versteht man unter Druckhöhe die Tiefe des Schwer-
nktes einer Fläche unter dem Wasserspiegel, so gilt allgemein
Regel:

Der Druck des Wassers normal gegen eine ebene Fläche ist
ich dem Gewichte einer Wassersäule, deren Basis die Fläche,
und deren Höhe die Druckhöhe ist.
Dieser Druck entspricht einer Kraft, deren Angriffspunkt der Mittelpunkt des Druckes genannt wird.

Fig. 15.



Sei z sein Abstand vom Niveau, so wird

$$z . h F = \int h_w^2 \, d w,$$

wobei F die ganze Fläche und h den Abstand des Schwerpunktes dieser Fläche vom Niveau bezeichnet.

Seien x und y die Coordinaten dieses Punktes in Bezug auf das Axensystem $Y O X$, so wird:

$$x . F h = \int x_w^2 \, d w,$$

o gleich dem Trägheitsmoment von F in Bezug auf die Axe
X und

$$y . F H = \int x_w y_w \, d w,$$

o gleich dem sogenannten Centrifugalmoment in Bezug
f die Axe $O Y$.

§. 199.

Hydrodynamik.

1) Es seien u, v, w die Componenten der Geschwindigkeit
rallel zu den Coordinatenaxen zur Zeit t im Punkte x, y, z. Sei
rner p der Druck, ϱ die Dichtigkeit, so wird

$$\left.\begin{aligned}\frac{d^2 x}{d t^2} &= X - \frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial x}\\ \frac{d^2 y}{d t^2} &= Y - \frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial y}\\ \frac{d^2 z}{d t^2} &= Z - \frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial x}\end{aligned}\right\}\ \text{(Euler'sche Gleichungen)}$$

oder auch

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z} = X - \frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial x}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + w\frac{\partial v}{\partial z} = Y - \frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial y}$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + u\frac{\partial w}{\partial x} + v\frac{\partial w}{\partial y} + w\frac{\partial w}{\partial z} = Z - \frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial z}.$$

Dazu kommt noch eine Relation zwischen p und ϱ. Die ist für Gase bei constanter Temperatur durch das Boyle'sc Gesetz gegeben

$$p = k\varrho.$$

Im Falle der incompressiblen Flüssigkeit ist

$$\varrho = const.$$

Bewegt sich ein Gas so, dass keine Wärme weder aufgenom men, noch abgegeben wird, so ist

$$p = k'\varrho^{\nu},$$

wobei $\nu = 1{,}41$ für atmosphärische Luft ist.

Ferner die sogenannte Continuitätsgleichung

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \frac{\partial \varrho u}{\partial x} + \frac{\partial \varrho v}{\partial y} + \frac{\partial \varrho w}{\partial z} = 0.$$

Diese Gleichungen bestimmen die fünf unbekannten Grös

$$u,\ v,\ w,\ p,\ \varrho.$$

Sei noch

$$F(x, y, z, t) = 0$$

die Begrenzung der Flüssigkeit, so muss jederzeit

$$\frac{\partial F}{\partial x}u + \frac{\partial F}{\partial y}v + \frac{\partial F}{\partial z}w + \frac{\partial F}{\partial t} = 0.$$

Diese Gleichung besagt, dass Theilchen, welche einmal a der Oberfläche waren, auf derselben bleiben.

2) Denkt man sich x, y, z als Functionen der Coordinat des Anfangszustandes a, b, c und der Zeit, welche dann die Ba des Theilchens x, y, z bestimmen, so folgt

$$\left(\frac{d^2 x}{d t^2} - X\right)\frac{\partial x}{\partial a} + \left(\frac{d^2 y}{d t^2} - Y\right)\frac{\partial y}{\partial a} + \left(\frac{d^2 z}{d t^2} - Z\right)\frac{\partial z}{\partial a} + \frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial a} = 0$$

$$\left(\frac{d^2 x}{d t^2} - X\right)\frac{\partial x}{\partial b} + \left(\frac{d^2 y}{d t^2} - Y\right)\frac{\partial y}{\partial b} + \left(\frac{d^2 z}{d t^2} - Z\right)\frac{\partial z}{\partial b} + \frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial b} = 0$$

$$\left(\frac{d^2 x}{d t^2} - X\right)\frac{\partial x}{\partial c} + \left(\frac{d^2 y}{d t^2} - Y\right)\frac{\partial y}{\partial c} + \left(\frac{d^2 z}{d t^2} - Z\right)\frac{\partial z}{\partial c} + \frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial c} = 0.$$

Dieses ist die sogenannte Lagrange'sche Form der Bewegungsgleichungen.

Die Continuitätsgleichung ist

$$\varrho = \varrho_0 \frac{d(x,y,z)}{d(a,b,c)},$$

wo ϱ_0 die Anfangsdichtigkeit und

$$\frac{d(x,y,z)}{d(a,b,c)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial a} & \frac{\partial y}{\partial a} & \frac{\partial z}{\partial a} \\ \frac{\partial x}{\partial b} & \frac{\partial y}{\partial b} & \frac{\partial z}{\partial b} \\ \frac{\partial x}{\partial c} & \frac{\partial y}{\partial c} & \frac{\partial z}{\partial c} \end{vmatrix}$$

die übliche Bezeichnung der Functionaldeterminante ist.

3) Sind die Geschwindigkeiten u, v, w so beschaffen, dass sie Ableitungen einer und derselben Function φ nach x, y, z sind, ist also

$$u = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad v = \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad w = \frac{\partial \varphi}{\partial z},$$

so wird φ das Geschwindigkeitspotential genannt, und es besteht der Satz:

Existirt für irgend einen Theil einer vollkommenen Flüssigkeit das Geschwindigkeitspotential unter dem Einflusse von Kräften, die ein Potential haben, so existirt für diesen Theil das Potential auch in jedem anderen Augenblicke, wenn nur der Druck eine Function der Dichte allein ist.

Die Flächen

$$\varphi = Const.$$

werden Niveauflächen genannt.

4) Man nennt Stromlinie eine Linie, deren Richtung in jedem Punkte die Richtung der Geschwindigkeit hat.

Ihre Differentialgleichungen sind

$$\frac{dx}{u} = \frac{dy}{v} = \frac{dz}{w}.$$

Ein Raum, der von sich stetig an einander schliessenden Stromlinien gebildet wird, wird ein Stromfaden genannt.

5) Ist für jeden Punkt die Geschwindigkeit unabhängig von der Zeit, so entsteht eine continuirliche Bewegung. Die Bedingung hierfür ist

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial t} = 0.$$

6) Alle diese Gleichungen haben die sogenannte innere Reibung nicht berücksichtigt.

Sei μ der Reibungscoefficient also für die Luft

$$\mu = 0{,}0001878\,(1 + 0{,}00366\,t).$$

t ist die Temperatur in Celsiusgraden, oder für Wasser

$$\mu = 0{,}014061$$

für eine Temperatur von 24,5° Celsius, und sei

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = D,$$

welcher Ausdruck den Volumzuwachs des Elementes misst und räumliche Dilatation genannt wird, ferner

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \Delta^2 u,$$

so wird

$$\varrho \frac{du}{dt} = \varrho X - \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{3}\mu \frac{\partial D}{\partial x} + \mu \Delta^2 u$$

$$\varrho \frac{dv}{dt} = \varrho Y - \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{1}{3}\mu \frac{\partial D}{\partial y} + \mu \Delta^2 v$$

$$\varrho \frac{dw}{dt} = \varrho Z - \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{1}{3}\mu \frac{\partial D}{\partial z} + \mu \Delta^2 w.$$

Für incompressible Flüssigkeiten ist D constant, also die Ableitungen nach x, y, z gleich Null.

In Bezug auf weitere Belehrung verweisen wir auf: Lamb, Einleitung in die Hydrodynamik, übersetzt von Reiff, 1884. Auerbach, Die theor. Hydrodynamik nach ihrer geschichtl. Entwickelung, 1881. Daselbst auch Literatur, desgl. auch: Thomson und Tait, Handbuch der theoretischen Physik.

7) Existirt ein Geschwindigkeitspotential φ, und haben die Kräfte ein Potential V, so lassen sich die Euler'schen Gleichungen integriren. Man hat dann nur eine Function φ zu bestimmen, welche der Gleichung

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0$$

genügt und diese in

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{2} q^2 = V - \frac{p}{\varrho} + F(t)$$

einzusetzen, so ergiebt sich der Druck p. Hier ist

$$q = \sqrt{u^2 + v^2 + w^2}$$

und $F(t)$ eine willkürliche Function. Um diese zu bestimmen, muss p in irgend einem Punkte der Flüssigkeit für alle Werthe von t bekannt sein.

Lamb-Reiff, l. c. p. 28.

8) Haben die Kräfte ein Potential, so können die Fundamentalgleichungen eine andere Form annehmen. Seien u_0, v_0, w_0 die anfänglichen Componenten der Geschwindigkeit und

$$\frac{\partial \chi}{\partial t} = V - \int \frac{dp}{\varrho} + \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2 \right\},$$

so lauten die sogenannten Weber'schen Gleichungen:

$$\frac{dx}{dt} \cdot \frac{\partial x}{\partial a} + \frac{dy}{dt} \cdot \frac{\partial y}{\partial a} + \frac{dz}{dt} \cdot \frac{\partial z}{\partial a} = u_0 + \frac{\partial \chi}{\partial a}$$

$$\frac{dx}{dt} \cdot \frac{\partial x}{\partial b} + \frac{dy}{dt} \cdot \frac{\partial y}{\partial b} + \frac{dz}{dt} \cdot \frac{\partial z}{\partial b} = v_0 + \frac{\partial \chi}{\partial b}$$

$$\frac{dx}{dt} \cdot \frac{\partial x}{\partial c} + \frac{dy}{dt} \cdot \frac{\partial y}{\partial c} + \frac{dz}{dt} \cdot \frac{\partial z}{\partial c} = w_0 + \frac{\partial \chi}{\partial c}.$$

Weber, Crelle Journ. Bd. 68.

9) Sei

$$\xi = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right)$$

$$\eta = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right)$$

$$\zeta = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right).$$

Sodann wollen wir eine von Punkt zu Punkt gezogene Linie, welche überall mit der Momentanaxe der Rotation der Flüssigkeit übereinstimmt, eine Wirbellinie nennen.

Die Differentialgleichungen dieses Systems von Linien sind:

$$\frac{dx}{\xi} = \frac{dy}{\eta} = \frac{dz}{\zeta}.$$

Ziehen wir durch jeden Punkt einer kleinen geschlossenen Curve die entsprechende Wirbellinie, so erhalten wir einen **Wirbelfaden** oder **Wirbel**. Diese Bezeichnung übertragen wir auch auf die im Wirbel befindliche Flüssigkeit.

Das Product aus der Winkelgeschwindigkeit und dem Querschnitte ist für alle Punkte des Wirbels dasselbe. Es führt den Namen der **Intensität des Wirbels**.

Die Wirbellinien sind geschlossene Curven, oder sie müssen sonst in den Grenzflächen anfangen und endigen.

Vergl. **Auerbach**, l. c. p. 94. **Lamb**, Cap. VII.

10) **Ausfluss durch eine Oeffnung.** Sei w der Flächeninhalt des Schnittes durch das Gefäss in der Entfernung x vom Anfangspunkte des Coordinatensystems, u die Geschwindigkeit, ferner Ω der Flächeninhalt der Oeffnung und U die Geschwindigkeit in der Oeffnung, h der Abstand des Niveau vom Anfange der x und b sein Abstand von der Oeffnung, ferner P der constante Druck auf der Oberfläche der Flüssigkeit, so wird unter der Voraussetzung, dass

$$wu = \Omega U \quad \text{(Parallelismus der Schichten)}$$

und wenn 0 den Werth von W am Niveau, ferner P' den Druck auf die Flüssigkeit, welche aus dem Gefässe heraustritt, bezeichnet, und

$$\int_h^{h+l} \frac{dx}{w} = m$$

$$P - P' = g\varrho\delta \quad (\delta \text{ sehr klein})$$

$$1 - \frac{\Omega^2}{0^2} = \alpha^2 \quad (\alpha \text{ nahe an } 1)$$

$$2g(l + \delta) = x^2$$

ist,

$$p = P + g\varrho(x - h) - \varrho\Omega\frac{dU}{dt}\int_h^x \frac{dx}{w} + \varrho\frac{\Omega^2 U^2}{2}\left(\frac{1}{w^2} - \frac{1}{0^2}\right).$$

wäre U constant, so würde folgen

$$p = P + \varrho g(x - h) - \varrho\frac{\Omega^2 U^2}{2}\left\{\frac{1}{w^2} - \frac{1}{0^2}\right\},$$

dies ist der **hydrodynamische Druck**. Der **hydrostatische** wäre

$$p' = P + \varrho g(x - h).$$

Es ist demnach

$$p \gtreqless p',$$

nachdem

$$w \gtreqless 0.$$

Man findet ferner, wenn zur Zeit $t = 0$ die Geschwindig-
ten gleich Null waren,

$$U = \frac{\varkappa}{\alpha} \frac{1 - e^{\vartheta}}{1 + e^{\vartheta}},$$

bei

$$\vartheta = -\frac{\varkappa \alpha t}{m \Omega}.$$

Der Werth U nähert sich, je kleiner Ω ist, in desto kürzerer
it der Grenze

$$\sqrt{\frac{2g(l + \delta)}{1 - \frac{\Omega^2}{0^2}}}.$$

Das Volumen V, nach dem Verlaufe der Zeit t aus dem
fässe getreten, ist gegeben durch

$$V = \frac{2m}{\frac{1}{\Omega^2} - \frac{1}{0^2}} \frac{e^{\vartheta} + e^{-\vartheta}}{2}$$

id nähert sich bei grossem t der Grenze

$$\frac{\sqrt{2g(l + \delta)}}{\sqrt{\frac{1}{\Omega^2} - \frac{1}{0^2}}} \cdot t - \frac{2m \log 2}{\frac{1}{\Omega^2} - \frac{1}{0^2}},$$

i allen diesen Formeln wurde vorausgesetzt, dass das Niveau
ch nicht ändert.

11) Diese Formeln gelten nur dann, wenn der Druck der
uft auf den Wasserspiegel ebenso gross ist, wie der gegen die
usmündung. Sei p der Druck im Niveau der Ausmündung, so
ird näherungsweise

$$v = \sqrt{2g \frac{p}{\varrho}}.$$

Vergl. Weisbach, Lehrbuch der Ingenieur-Mechanik, Bd. I.

§. 200.

Aerostatik.

1) Barometrische Höhenmessung. Seien b_0 und b_1 d beiden Barometerstände, t_0 und t_1 die Temperaturen, und h d gesuchte Höhendifferenz in Metern, ferner

$$t = \frac{1}{2}(t_0 + t_1),$$

so ist nahezu

$$h = 18\,420\,\{\log b_0 - \log b_1\}\,(1 + 0{,}0039\,t).$$

2) Ist b_t der bei der Temperatur t abgelesene Baromete stand, so ist der auf 0°C. und für $\varphi = 45^0$ reducirte

$$b_0 = b_t\,(1 - 0{,}000131\,t)\,(1 - 0{,}0026 \cos 2\,\varphi).$$

Vergl. Rühlmann, Barometrische Höhenmessungen, 1870.

3) Bedeutet t_0 die Temperatur auf der Oberfläche, t jene i der Höhe h, sowie g die Beschleunigung der Schwere, v_0 d Geschwindigkeit des Schalles an der Oberfläche der Erde, sow

$$\gamma = 1{,}3492, \ldots$$

so wird

$$t = t_0\left(1 - \frac{\gamma - 1}{v_0^2}\, g\, h\right).$$

4) Sei R der Halbmesser der Erdkugel und g die Beschle nigung der Schwere, r der Abstand irgend eines Punktes d Erdatmosphäre vom Erdcentrum, φ seine geographische Brei und T die Umdrehungszeit der Erde, so ist die Gestalt der Atm sphäre bestimmt durch

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{R}\left\{1 - \frac{2\,\pi^2}{T^2}\,\frac{r^2 \cos^2\varphi}{g\,R}\right\}.$$

Vergl. F. Neumann, Einleitung in die theoretische Phys

§. 201.

Aerodynamik.

A. Allgemeines.

1) Sei p der Druck der äusseren Luft, p_1 und ϱ_1 der Dru und das specifische Gewicht der inneren Luft, so ist, wenn d

uft während des Ausflusses ihre Dichtigkeit nicht ändern würde, ie Ausflussgeschwindigkeit gegeben durch

$$v_1 = \sqrt{2g\,\frac{p_1}{\varrho_1}\left(1 - \frac{p}{p_1}\right)}.$$

2) Nimmt man an, dass die Luft beim Ausströmen keine 'emperaturveränderung erleidet, dass sie sich also hierbei nach em **Mariotte**'schen Gesetze (S. 623) ausdehnt, so wird

$$v_2 = \sqrt{2g\,\frac{p}{\varrho}\,log\,nat\,\frac{p_1}{p}}$$

der

$$v_2 = 396\sqrt{(1 + 0{,}00367\,t)\,log\,nat\,\frac{b+h}{b}},$$

vobei b den Barometerstand der äusseren, und h den Manometer-tand der inneren Luft bezeichnet. 0,00367 ist der Ausdeh-ungscoefficient der Luft. Diese Formel genügt für lang-ame Volumveränderungen.

3) Allgemeine Formel, wenn langsame Bewegungen voraus-esetzt werden und die Temperaturveränderungen berücksichtigt verden, lautet:

$$v_3 = \sqrt{2g\,\frac{p_1}{\varrho_1}\,\frac{\varkappa}{\varkappa - 1}\left\{1 - \left(\frac{p}{p_1}\right)^{\frac{\varkappa-1}{\varkappa}}\right\}},$$

wobei

$$\varkappa = 1{,}41$$

gleich dem Quotienten aus den specifischen Wärmen beim constanten Druck und Volumen.

4) Fliesst die Luft aus einem Reservoir durch eine Röhre vom Querschnitte G, an deren Ende sich eine Oeffnung F befindet, so wird die Ausflussgeschwindigkeit

$$v_4 = \frac{v_3}{\sqrt{1 - \left(\frac{F}{G}\right)^2\left(\frac{p}{p_1}\right)^{\frac{2}{\varkappa}}}},$$

dabei wird jedoch vorausgesetzt, dass die Röhre keineswegs zu lang ist, denn sonst müsste noch die Reibung berücksichtigt werden. Bei allen diesen Formeln wurde der Manometerstand als constant vorausgesetzt.

B. Dynamik der Atmosphäre.

1) Ein jeder auf der Erdoberfläche sich bewegende Körper von der Masse m hat in Folge der Erdrotation die Tendenz, auf der nördlichen Hemisphäre nach rechts, auf der südlichen nach links von jeweiliger Bewegungsrichtung abzuweichen. Diese Tendenz entspricht der Kraft

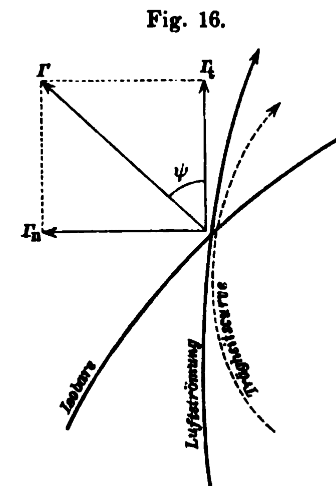
$$2\, m\, V w \sin\varphi,$$

wobei V die Geschwindigkeit des Körpers, w die Winkelgeschwindigkeit der Erde und φ die geographische Breite bezeichnet. Geschieht die Bewegung nun unter dem Einflusse dieser Kraft, so beschreibt der Punkt die sogenannte Trägheitscurve, deren Krümmungsradius R_t die Grösse

$$R_t = \frac{V}{2\, w \sin\varphi}$$

ist.

Fig. 16.



2) Sei Γ die sogenannte Gradientenkraft und wird

$$\Gamma_n = \Gamma \sin\psi$$
$$\Gamma_t = \Gamma \cos\psi$$

gesetzt, so folgt:

$$\Gamma_n = m\left\{2\, V w \sin\varphi - \frac{V^2}{R}\right\},$$

wobei R der Krümmungsradius der Luftströmung ist. Ferner

$$\Gamma_t = m\{k\, V + a\},$$

wobei k der Reibungscoefficient und a die Beschleunigung des Luftstromes ist.

3) Sei G die barometrische Differenz für eine horizontale Entfernung von 111 km, so wird

$$\Gamma = \mu\, G,$$

worin

$$\mu = G_{45}\,.\,0{,}00012237.$$

Sei noch ϱ die Dichte, so lassen sich die obigen Gleichungen auch schreiben wie folgt:

$$\frac{\mu}{\varrho}\,G \sin\psi = 2\,w \sin\varphi\, V - \frac{V^2}{R}$$

$$\frac{\mu}{\varrho}\,G \cos\psi = \varkappa\, V + a.$$

In diesen Gleichungen ist die Beziehung zwischen G (Luft-
ıck), V (Windgeschwindigkeit) und Reibung theoretisch nieder-
.egt.

Die Constante $\varkappa$ hat nach Mohn und Guldberg je nach
r Oberflächenbeschaffenheit verschiedene Werthe. Die Gren-
ı sind:

$\varkappa = 0{,}00002$ für Meeresoberfläche,

$\varkappa = 0{,}00012$ für sehr unebene Binnenländer.

4) Man kann noch andere Grundgleichungen ableiten: Seien
ınd v die Componenten der horizontalen Luftgeschwindigkeit V,
die Dichte der Luft, P der Luftdruck, t die Zeit, ferner $\varkappa$ der
ibungscoefficient und

$$\lambda = 2\,w \sin\varphi,$$

lauten die Grundgleichungen (siehe Hydrodynamik):

$$\frac{du}{dt} = -\lambda v - \varkappa u - \frac{1}{\varrho}\frac{\partial P}{\partial x}$$

$$\frac{dv}{dt} = +\lambda v - \varkappa u - \frac{1}{\varrho}\frac{\partial P}{\partial y},$$

ıbei

$$\frac{du}{dt} = \frac{d^2 x}{dt^2}$$

$$\frac{dv}{dt} = \frac{d^2 y}{dt^2}$$

. Setzt man noch

$$x = r \sin\vartheta, \quad y = r \cos\vartheta,$$

rner

$$\Phi_1 = -\frac{1}{\varrho}\left\{\frac{\partial P}{\partial x}\sin\vartheta + \frac{\partial P}{\partial y}\cos\vartheta\right\} = -\frac{1}{\varrho}\frac{\partial P}{\partial r}$$

$$\Phi_2 = -\frac{1}{\varrho}\left\{\frac{\partial P}{\partial x}\cos\vartheta - \frac{\partial P}{\partial y}\sin\vartheta\right\} = -\frac{1}{\varrho}\frac{\partial P}{\partial n},$$

folgt:

$$\frac{d^2 r}{dt^2} - r\left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2 - \lambda r \frac{d\vartheta}{dt} + \varkappa \frac{dr}{dt} = \Phi_1$$

$$r\frac{d^2\vartheta}{dt^2} + 2\frac{dr}{dt}\frac{d\vartheta}{dt} + \lambda\frac{dr}{dt} + \varkappa r \frac{d\vartheta}{dt} = \Phi_2,$$

wobei n die Normale des Radiusvector ist. Es sei noch an[illegible]
führt, dass

$$w = \frac{2\pi}{86164} = 0{,}00007292$$

$$\log w = 0{,}86285 - 5$$

gesetzt werden kann.

Vergleiche: Sprung, Lehrbuch der Meteorologie, Hamb[illegible]
1885.

§. 202.

Akustik.

1) Eine regelmässige Erschütterung kann unter Umständ[illegible]
einen Ton hervorbringen. Die Anzahl der Erschütterungen [illegible]
der Zeiteinheit wird die Tonhöhe genannt. Das Verhältn[illegible]
der Erschütterungszahlen zweier Töne heisst ihr Intervall. D[illegible]
wichtigsten Intervalle sind:

Octav	$c : c_1$	$= 1 : 2$
Quint	$c : g$	$= 2 : 3$
Quart	$g : c_1$	$= 3 : 4$
Grosse Terz	$c : e$	$= 4 : 5$
Kleine Terz	$e : g$	$= 5 : 6.$

Eine Erschütterung entspricht einer Schwingung, die Z[illegible]
der Erschütterungen wird die Schwingungszahl genannt.

Man hat für die gewöhnliche Dur-Scala:

Name	Prim	Seconde	Grosse Terz	Quart	Quinte	Grosse Sext	Grosse Septimo	[illegible]
Zeichen	*c* *ut, do*	*d* *re*	*e* *mi*	*f* *fa*	*g* *sol*	*a* *la*	*h* *si*	[illegible]
Relative Schwingungszahl	1	$9/8$	$5/4$	$4/3$	$3/2$	$5/3$	$15/8$	[illegible]
Intervall		$9/8$	$10/9$	$16/15$	$9/8$	$10/9$	$9/8$	[illegible]

Das Verhältniss $8/9 : 9/10 = 80 : 81$ heisst ein Komma.

In der Musik gebraucht man die Stimmung der gleic[illegible]
schwebenden Temperatur, indem man die relativen Schw[illegible]
gungszahlen vertheilt wie folgt:

c	*cis*	*d*	*dis*	*e*	*f*	*fis*
$2^{0/12}$	$2^{1/12}$	$2^{2/12}$	$2^{3/12}$	$2^{4/12}$	$2^{5/12}$	$2^{6/12}$

g	*gis*	*a*	*ais*	*h*	c_1
$2^{7/12}$	$2^{8/12}$	$2^{9/12}$	$2^{10/12}$	$2^{11/12}$	$2^{12/12}$.

Zur absoluten Bezeichnung der Tonhöhe benutzt man:
= 435 Schwingungen per Secunde (Pariser Stimmung)
= 426,6 „ „ „ (Akustische „).

Der natürlichen Zahlenreihe entsprechen durch ihre Schwin-
ngen folgende Töne:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
c	c_1	g_1	c_2	c_2	g_2		c_3	d_3	e_3.

(Harmonische Oberreihe.) Die die Klangfarbe aus-
chenden Partialtöne gehören der harmonischen Oberreihe an.

2) Sei E der Elasticitätsmodul und D die Dichte eines
diums, so ist die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Schal-
a gegeben durch

$$a = \sqrt{\frac{E}{D}}.$$

Für die Luft oder irgend ein Gas, wenn P den Anfangs-
ıck bezeichnet, geht diese Form über in

$$a = \sqrt{\gamma \frac{P}{D}},$$

bei $\gamma = 1{,}396$ für trockene Luft, Sauerstoff, Stickstoff und
asserstoff. Für die Luft hat man speciell

$$a = 330{,}70 \sqrt{1 + 0{,}00367\, t}\ \text{m},$$

t die Temperatur in Celsiusgraden bezeichnet. γ ist nichts
leres als das Verhältniss der specifischen Wärmen beim con-
nten Druck und Volumen. Für Wasser ist

$$a = 1435.$$

3) Das Geschwindigkeitspotential für die Luftbewegungen,
einem einfachen Tone entsprechen, ist, wenn n die Schwin-
ngszahl bezeichnet, und

$$\varkappa = \frac{2\pi n}{a}$$

etzt wird:

$$\varphi = A \cos \varkappa x \cos 2\pi n t + B \sin \varkappa x \sin 2\pi n t.$$

Sei nun 1) $B = 0$ oder ($A = 0$), so wird

$$\varphi = A \cos \varkappa x \cos 2 \pi n t,$$

und wenn ξ die Verrückung zur Zeit t in der Richtung der x-Ax bezeichnet,

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} = \frac{\partial \varphi}{\partial x},$$

also

$$\xi = - \frac{A}{a} \sin \varkappa x \sin 2 \pi n t.$$

Die Grösse

$$- \frac{A}{a} \sin \varkappa x$$

nennt man die **Amplitude**. Sei λ die Wellenlänge, so wir

$$\lambda = \frac{2 \pi}{\varkappa} = \frac{a}{n}$$

und

$$\text{Amplitude} = 0 \quad , \text{ wenn } x = 2 p \frac{\lambda}{2}$$

$$\text{„} \quad = \text{Max.}, \quad \text{„} \quad x = (2p + 1) \frac{\lambda}{2},$$

dabei ist p eine positive ganze Zahl.

Im ersteren Falle ist die Geschwindigkeitsänderung gleic Null, es entsteht ein **Knoten**, im letzteren ist die Druckänderun gleich Null, es entsteht ein **Bauch**.

Schwingungen dieser Art werden **stehende Schwingungen** genannt.

Sei nun $A = \pm B$, so entstehen die sogenannten **fortschreitenden Schwingungen**, es ist sodann

$$\varphi = A \cos \varkappa (x \mp a t)$$
$$\xi = \mp A \cos \varkappa (x \mp a t).$$

Ist die Luftmasse durch eine zur x-Axe senkrechte Ebe begrenzt, so wird

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0$$

und es entsteht an der Begrenzungsstelle ein Knoten. Daraus folgt, dass für zwei begrenzende Ebenen der Abstand ein Vielfaches der halben Wellenlänge sein muss.

4) Um die Gleichungen für die Wellenbewegung nach einer Dimension zu erhalten, hat man folgende Ueberlegung anzustellen:

Sei ξ die Verrückung jener Theilchen in der Zeit t, die sich rsprünglich in der Lage x befanden. Die Ebene, die früher urch

$$x \text{ und } x + dx$$

egrenzt war, ist nun von

$$x + \xi \quad \text{und} \quad x + \xi + \left(1 + \frac{\partial \xi}{\partial x}\right) dx$$

egrenzt, so dass die Continuitätsgleichung

$$\varrho \left\{1 + \frac{\partial \xi}{\partial x}\right\} = \varrho_0$$

ein wird, wo ϱ die Dichte bezeichnet. Die Bewegungsgleichung er Luftschicht ist nach den hydrodynamischen Grundgleichungen

$$\varrho \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = -\frac{\partial p}{\partial x}.$$

'indet kein Verlust noch Gewinn an Wärme statt, so wird

$$p = \varkappa' \varrho^{\gamma}.$$

:liminirt man p und ϱ, so folgt, wenn

$$a^2 = \varkappa' \gamma \varrho_0{}^{\gamma-1} = \left(\frac{\partial p}{\partial \varrho}\right)_{\varrho=\varrho_0} = \gamma \frac{p_0}{\varrho_0}$$

;esetzt wird,

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = a^2 \frac{\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}}{\left\{1 + \frac{\partial \xi}{\partial x}\right\}^{\gamma+1}}.$$

)a nun $\partial \xi / \partial x$ sehr klein ist, so ist nahezu

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}.$$

)as vollständige Integral dieser Gleichung ist

$$\xi = F(x - at) + f(x + at).$$

5) Für eine Kugelwelle, die symmetrisch um den Erchütterungspunkt sich fortpflanzt, lautet die Bewegungsgleichung:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}(r\varphi) = a^2 \cdot \frac{\partial^2}{\partial r^2}(r\varphi),$$

labei ist φ das Geschwindigkeitspotential und r der Radius der Welle, die Lösung dieser Gleichung lautet

$$\varphi = \frac{1}{r} F(r - at) + f(r + at).$$

6) Um die allgemeinen Gleichungen zu erhalten, setze man

$$\frac{\rho}{\rho_0} = 1 + \sigma,$$

wobei σ, je nachdem es positiv oder negativ ist, Condensation oder Dilatation genannt wird. ρ_0 ist die Dichte im Gleichgewichtszustande, sodann lauten dieselben

$$\frac{\partial^2 \sigma}{\partial t^2} = a^2 \left\{\frac{\partial^2 \sigma}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \sigma}{\partial z^2}\right\} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad \text{I)}$$

$$\sigma = f(x, y, z) \text{ für } t = 0 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad \text{II)}$$

$$\frac{\partial \sigma}{\partial t} = -\left\{\frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial v_0}{\partial y} + \frac{\partial w_0}{\partial z}\right\} = F(x, y, z) \text{ für } t = 0 \quad \text{III)}$$

Man hat zunächst eine allgemeine Lösung der ersten Gleichung I) aufzusuchen, sodann in ihr die willkürlichen Constanten so zu bestimmen, dass sie die Gleichungen II) und III) erfüllen. Sodann erhält man die Grössen u, v, w (die Componenten der Geschwindigkeit) nach den drei Axen aus den Gleichungen:

$$u_0 - u = a^2 \int_0^t \frac{\partial \sigma}{\partial x} dt$$

$$v_0 - v = a^2 \int_0^t \frac{\partial \sigma}{\partial y} dt$$

$$w_0 - w = a^2 \int_0^t \frac{\partial \sigma}{\partial z} dt.$$

7) Seien l und l' die natürliche und gespannte Seitenlänge bei einer spannenden Kraft p, so ist genähert (nach einem zuerst von Hooke aufgestellten Princip „ut tensio sic vis“) die Spannungszunahme

$$P' - P = q \cdot \frac{l' - l}{l},$$

wobei q eine vom Material und Querschnitt abhängige Constante bezeichnet.

8) Nehmen wir nun constante Spannung an und vernachlässigen wir die Quadrate der Neigungen gegen die ursprüngliche Lage, so liefert das D'Alembert'sche Princip folgende Gleichungen für die Bewegung einer vollkommen biegsamen Saite:

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \beta^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} \qquad \alpha^2 = \frac{p}{cgq}$$

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = \alpha^2 \frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2}$$

$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} = \alpha^2 \frac{\partial^2 \zeta}{\partial z^2} \qquad \beta^2 = \frac{p}{Pcg}.$$

Dabei sind x, y, z die Coordinaten der ursprünglichen Lage (parallel und senkrecht zur ruhenden Saite), ξ, η, ζ die der Verrückung, p ist das Gewicht der ganzen Saite, c ist ihre Länge und g die Beschleunigung der Schwere.

Dazu kommen noch die Bedingungsgleichungen.

Die erste Gleichung giebt die Longitudinal-, die beiden letzteren die Transversalschwingungen der Saite.

9) Nehmen wir die Transversalschwingungen als in der xy-Ebene vor sich gehend, so wird:

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = \alpha^2 \frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2}$$

mit den Bedingungen:

$$\eta = f(y),$$

$$\frac{\partial y}{\partial t} = F(y),$$

für $t = 0$, und

$$\eta = 0$$

für $y = 0$, und $y = c$.

Die Integration giebt:

$$\eta = \sum_1^\infty{}^{\varkappa} \left\{ A_\varkappa \cos \frac{\varkappa \alpha \pi}{c} t + B_\varkappa \sin \frac{\varkappa \alpha \pi}{c} t \right\} \sin \frac{\varkappa \pi}{c} y,$$

wobei A und B sich bestimmen aus

$$f(y) = \sum_1^\infty{}^{\varkappa} A_\varkappa \sin \frac{\varkappa \pi}{c} y$$

$$F(y) = \frac{\alpha \pi}{c} \sum_1^\infty{}^{\varkappa} B_\varkappa \sin \frac{\varkappa \pi}{c} y,$$

so dass

$$A_\varkappa = \frac{2}{c} \int_0^c f(\lambda) \sin \frac{\varkappa \pi}{c} \lambda . d\lambda$$

$$B_\varkappa = \frac{2}{\varkappa \alpha \pi} \int_0^c F(\lambda) \sin \frac{\varkappa \pi}{c} \lambda . d\lambda$$

wird. Für die tiefste Schwingung ($\varkappa = 1$) ergiebt sich als Periode

$$T = \frac{2c}{\alpha} = 2\sqrt{\frac{cp}{gq}}$$

und hieraus ergiebt sich die Schwingungszahl des Grundtones

$$n = \frac{1}{T} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{gq}{cp}}.$$

Diese Formeln enthalten die von Mersenne (1636) experimentell entdeckten Gesetze der Transversalschwingungen der Saiten.

10) Für longitudinale Schwingungen von Stäben gilt allgemein die Gleichung:

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \alpha^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2},$$

wobei ξ die Verrückung, x die ursprüngliche Lage eines Punktes charakterisirt. Sei τ die auf die Flächeneinheit senkrecht zum Querschnitt wirkende Spannung, so wird

$$\tau = q \frac{\partial \xi}{\partial x}, \quad q \text{ eine Constante}$$

und

$$\alpha^2 = \frac{q}{\varrho},$$

wo ϱ die ursprüngliche Dichte bezeichnet.

I. Nehmen wir nun an, der Stab sei an beiden Enden frei. Sodann haben wir die Gleichungen:

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \alpha^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = 0, \text{ für } x = 0, \text{ und } x = l,$$

wo l die Länge des Stabes bezeichnet.

Ausserdem ist

$$\left.\begin{aligned} \xi &= f(x), \\ \frac{\partial \xi}{\partial t} &= F(x), \end{aligned}\right\} \text{für } t = 0.$$

Man hat:

$$\xi = \sum_0^\infty{}^i \cos \frac{i\pi x}{l} \left\{ A_i \cos \frac{i\pi\alpha t}{l} + B_i \sin \frac{i\pi\alpha t}{l} \right\}.$$

wobei A und B auf dieselbe Weise wie in Nro. 9 zu bestimmen sind aus $f(x)$ und $F(x)$. Die Periode der tiefsten Schwingung ist

$$T = \frac{2l}{\alpha} = 2l\sqrt{\frac{\varrho}{q}}.$$

II. Ist das eine Ende fest, das andere frei, so sind die Schwingungen dieses Stabes identisch mit denen der einen Hälfte eines Stabes von doppelter Länge, dessen beide Enden frei sind, vorausgesetzt, dass derselbe nur in den Arten schwingt, für welche i eine ungerade ganze Zahl ist.

III. Sind beide Enden fest, so haben wir:

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \alpha^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2},$$

$$\text{für } x = 0, \text{ ist auch } \xi = 0$$
$$\text{„ } x = l, \text{ „ „ } \xi = \beta,$$

sowie

$$\left.\begin{aligned} \xi &= f(x), \\ \frac{\partial \xi}{\partial t} &= F(x), \end{aligned}\right\} \text{ für } t = 0.$$

Die Lösung lautet:

$$\xi = \beta \frac{x}{l} + \sum_1^\infty {}^i \sin \frac{i\pi x}{l} \left\{A_i \cos \frac{i\pi\alpha t}{l} + B_i \sin \frac{i\pi\alpha t}{l}\right\}.$$

A und B bestimmen sich wie früher.

11) Aehnlich gestalten sich die Gleichungen für Torsionsschwingungen. Sei n die Elasticitätsconstante und ϱ die Dichte, ϑ die Winkelverschiebung eines Querschnittes, der um x vom Anfangsquerschnitt entfernt ist, so wird

$$\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial t^2} = \alpha^2 \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2}, \quad \alpha^2 = \frac{n}{\varrho}.$$

Die Bedingungsgleichungen sind dieselben wie bei den Longitudinalschwingungen. Für ein freies Ende ist

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial x} = 0,$$

für ein festes $\vartheta = 0$.

Sei n die Schwingungszahl für longitudinale, N jene für Torsionsschwingungen, so wird

$$\sqrt{3} > \frac{n}{N} > \sqrt{2}.$$

12) Für transversale Schwingungen von Stäben hat man d
Fundamentalgleichung

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + \varkappa^2 b^2 \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = 0,$$

wobei $\varkappa$ den Trägheitsradius des Querschnittes, und wenn q de
Elasticitätsmodul und ϱ die Dichte bezeichnet,

$$b = \frac{q}{\varrho}.$$

Die Grenzbedingungen für ein freies Ende sind

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0, \quad \frac{\partial^3 y}{\partial x^3} = 0,$$

dagegen für ein festes:

$$y = 0, \quad \frac{\partial y}{\partial x} = 0.$$

Sei l die Länge des Stabes und m eine noch zu bestimmende
Zahl, so ist die allgemeine Lösung enthalten in

$$y = \sum cos\left\{\frac{\varkappa b}{l^2}\, m^2 t\right\} \cdot \left\{A\, cos\, \frac{m x}{l} + B\, sin\, \frac{m x}{l} + C l^{\frac{m x}{l}} + D l^{-\frac{m x}{l}}\right\}.$$

Dazu haben wir vier Endbedingungen, für jedes Ende zwei,
diese liefern das Verhältniss

$$A : B : C : D,$$

sowie eine Gleichung, der m genügen muss.

Die Theorie ergiebt eine Schwingungsdauer für cylindrische
Stäbe vom Radius r

$$n = 0{,}162\, \frac{r \sqrt{3}}{l^2} \sqrt{\frac{q}{\varrho}}$$

und für prismatische von der Höhe h

$$n = 0{,}162\, \frac{h}{l^2} \sqrt{\frac{q}{\varrho}},$$

bei den letzteren ist n von der Breite unabhängig.

Diese Schwingungen entsprechen dem Grundtone. Die Schwingungszahlen höherer Töne verhalten sich zum Grundton wie

$$1 : 6{,}26 : 17{,}54 : 34{,}78 : 56{,}84 \ldots$$

13) Sei T die Spannung einer Membran, sowie ϱ ihre Oberflächendichtigkeit, sowie φ die Verrückung, so lautet die Bewegungsgleichung

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = \alpha^2 \left\{\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}\right\},$$

obei

$$\alpha = \frac{T}{\varrho}.$$

Als Nebenbedingungen haben wir

$\varphi = 0$ in der Umgrenzung der Membran

$$\left.\begin{aligned}\varphi &= f(x, y)\\ \frac{\partial \varphi}{\partial t} &= F(x, y)\end{aligned}\right\} \text{ für } t = 0.$$

In Bezug auf die hier behandelten Schwingungstheoreme sei erwiesen auf: Strutt-Rayleigh, Theorie des Schalles, deutsch 'on Neesen. Riemann, Partielle Differentialgleichungen, h. '. Hattendorf. Kirchhoff, Mechanik. Clebsch, Theorie der Elasticität (1862). Beer, Einleitung in die mathematische Theorie ler Elasticität (1869). Lamé, Leçons sur la theorie math. de 'élasticité (1866).

§. 203.

Wärmeleitung.

1) Die Wärmemenge, welche ein Körper von der Masse m, der specifischen Wärme c und der Temperatur u enthält, ist

$$W = m c u.$$

2) Sei ein isotroper Körper gegeben, und sei

$$a^2 = \frac{\varkappa}{\varrho c},$$

wobei $\varkappa$ der innere Wärmeleitungscoefficient genannt wird und ϱ die Dichtigkeit ist, so wird

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)$$

dazu kommt noch die Bedingung an der Grenze

$$\frac{\partial u}{\partial n} + \frac{h}{\varkappa}(u - u_0) = 0,$$

wobei h der äussere Wärmeleitungscoefficient ist. Für den Fall, dass zwei Körper zusammenstossen, ist

$$\varkappa \frac{\partial u}{\partial n} = \varkappa' \frac{\partial u'}{\partial n}.$$

Dieses sind die Fundamentalgleichungen für die Wärmevertheilung in isotropen Körpern.

3) Sei

$$x = r \sin\theta \cos\varphi$$
$$y = r \sin\theta \sin\varphi$$
$$z = r \cos\theta,$$

so wird die erste Gleichung zu

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{a^2}{r^2}\left\{\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial u}{\partial t}\right) + \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta \frac{\partial u}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}\right\}.$$

4) Um die allgemeinen Gleichungen für die anisotropen Körper zu erhalten, seien $\alpha_{\varkappa\lambda}$ gewisse von der Natur des Körpers abhängige Constanten, so wird

$$\alpha_{11}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \alpha_{22}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \alpha_{33}\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$
$$+ (\alpha_{12} + \alpha_{21})\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} + (\alpha_{23} + \alpha_{32})\frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial z} + (\alpha_{13} + \alpha_{31})\frac{\partial^2 u}{\partial z\,\partial x}$$
$$= c\varrho\frac{\partial u}{\partial t} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \mathrm{I}$$

die allgemeine Gleichung sein.

Im holoedrischen System ist

$$\alpha_{\varkappa\lambda} = \alpha_{\lambda\varkappa}.$$

Wir haben demnach

$$\alpha\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \beta\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \gamma\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = c\varrho\frac{\partial u}{\partial t} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \mathrm{II.}$$

Ist u von der Zeit unabhängig, so entsteht ein Zustand des Wärmegleichgewichtes oder der sogenannte stationäre Zustand.

Die durch den Punkt xyz in der Richtung $\lambda\mu\nu$ fliessende Wärmemenge ist

$$A\frac{\partial u}{\partial x} + B\frac{\partial u}{\partial y} + C\frac{\partial u}{\partial z},$$

wobei im allgemeinen Falle:

$$A = \alpha_{11}\lambda + \alpha_{12}\mu + \alpha_{13}\nu$$
$$B = \alpha_{21}\lambda + \alpha_{22}\mu + \alpha_{23}\nu$$
$$C = \alpha_{31}\lambda + \alpha_{32}\mu + \alpha_{33}\nu.$$

Die Grösse

$$q = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}$$

wird auch der mittlere Wärmeleitungscoefficient genannt.

5) Im Falle eines holoedrischen Systems hat **Lamé** zwei zu n Problemen in enger Beziehung befindliche Ellipsoide eingehrt, das Hauptellipsoid

$$\frac{x^2}{a_1^2} + \frac{y^2}{b_1^2} + \frac{z^2}{c_1^2} = \frac{1}{a^2}$$

id das Leitungsellipsoid

$$\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} + \frac{z^2}{\gamma^2} = \frac{1}{a^4}.$$

Es giebt nämlich in jedem Körper ein einziges rechtwinkges Coordinatensystem, für welches die allgemeine Gleichung I) ı die holoedrische II) übergeht. Dieses System bildet die Axen es Hauptellipsoids.

Es giebt zugleich unendlich viele schiefwinklige Systeme, die las bewirken; ihre Axen sind conjugirte Durchmesser dieses Ellipoids. In der obigen Gleichung ist

$$\alpha = q a_1^2, \quad \beta = b_1^2 q, \quad \gamma = c_1^2 q$$

u setzen.

Wählen wir die Hauptaxen des Hauptellipsoids als Coorlinatenaxen und bestimmen für jede Richtung die Grösse von $\varkappa$ ınd tragen auf diese Richtung die Grösse

$$\varkappa \cdot \frac{c}{q} \cdot \varrho,$$

so liegen die Endpunkte auf dem Leitungsellipsoid.

Ueber die Theorie der Wärmeleitung handeln folgende Werke: Fourier, Analytische Theorie der Wärme, deutsch von Weinstein (Orig. 1822 erschienen). Lamé, Leçons sur la théorie analyt. de la chaleur, Paris 1861. Riemann, Partielle Differentialgleichungen, herausgegeben von Hattendorf, Braunschweig 1882. Heine, Handbuch der Kugelfunctionen, Bd. II. Dronke, Einleitung in die analytische Theorie der Wärmeverbreitung, 1882. Poisson, Theorie math. de la chaleur, Paris 1835—1837.

6) Nehmen wir einen isotropen Körper, der von einer unendlichen Ebene, die wir als die yz-Ebene nehmen, begrenzt ist.

Die zu integrirende Gleichung ist:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

wobei

$$u = f(x) \quad \text{für} \quad t = 0$$
$$u = \varphi(t) \quad „ \quad x = 0.$$

Man findet

$$u = \frac{1}{2a\sqrt{\pi}} \left\{ \frac{1}{\sqrt{t}} \int_0^\infty f(\lambda)\, d\lambda \left[e^{-\frac{(x-\lambda)^2}{4a^2t}} - e^{-\frac{(x+\lambda)^2}{4a^2t}} \right] \right.$$
$$\left. + x \int_0^t \varphi(\lambda)\, d\lambda . (t-\lambda)^{-\frac{3}{2}} \cdot e^{-\frac{x^2}{4a^2(t-\lambda)}} \right\}$$

oder

$$u = u_1 + u_2.$$

Sodann genügt u_1 den Nebenbedingungen

$$u = f(x) \quad \text{für} \quad t = 0$$
$$u = 0 \quad „ \quad x = 0$$

und u_2 den Nebenbedingungen:

$$u = 0 \quad \text{für} \quad t = 0$$
$$u = \varphi(t) \quad „ \quad x = 0.$$

Aus diesem Problem ergiebt sich in Bezug auf die Erde, wenn ϑ die Temperaturschwankung in der Tiefe x, dass

$$\vartheta = 2\varrho_1 e^{-\frac{x}{a}\sqrt{\frac{\alpha}{2}}}.$$

Dabei wird die Temperatur der Oberfläche gleich

$$\varphi(t) = \varrho_0 + \varrho_1 \cos(\alpha t - \lambda_1) + \varrho_2 \cos(2\alpha t - \lambda_2) + \cdots$$

angenommen, in welchem Ausdrucke ϱ_0 die mittlere Temperatur der Erdoberfläche, und ϱ_1 die halbe mittlere Schwankung (Maximum weniger Minimum) bezeichnet. Für zwei verschiedene Tiefen ergiebt sich:

$$\frac{\vartheta_1}{\vartheta_2} = e^{-\frac{x_1 - x_2}{a}\sqrt{\frac{\alpha}{2}}}.$$

Wachsen demnach die Tiefen in arithmetischer Progression. so nehmen die Schwankungen in geometrischer Progression ab.

7) Sei eine Kugel im diathermanen Mittel. Hier ist die allgemeine Gleichung

$$\frac{\partial u}{\partial t^2} = a^2 \left\{ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right\}.$$

Ersetzt man die Differentiationen nach den Coordinaten durch die Differentiation nach dem Radius r, so wird, wenn man noch $ru = v$ setzt,

$$\frac{\partial v}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 v}{\partial r^2}.$$

Sei nun c der Radius der Kugel, so lauten die Nebenbedingungen:

$$v = r\,F(r) \qquad \text{für} \quad t = 0$$

$$\frac{\partial v}{\partial r} + \left(H - \frac{1}{c}\right) v = 0 \qquad \text{„} \quad r = c$$

$$v = 0 \qquad \text{„} \quad r = 0.$$

Dabei ist

$$H = \frac{h}{\varkappa}.$$

Es ergiebt sich

$$v = \sum_1^\infty b_n\, e^{-a^2 \lambda_n^2}\, sin\, \lambda_n r,$$

wobei λ_n die Wurzeln der transcendenten Gleichung

$$c\lambda\, cos\, c\lambda + (hc - 1)\, sin\, c\lambda = 0$$

sind und b_n so bestimmt werden müssen, dass die erste Bedingungsgleichung

$$v = r\,F(r) \quad \text{für} \quad t = 0$$

befriedigt werde.

Vergl. Riemann, l. c. §. 44 bis §. 74.

8) Berücksichtigt man noch die Ausdehnung, so muss die allgemeine Gleichung anders geschrieben werden. Sei

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = \sigma$$

die sogenannte räumliche Dilatation (vide Elasticität), so wird:

$$\frac{\partial V}{\partial t} = a^2 \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}\right) - \frac{c_p - c_v}{c_v} \cdot \frac{1}{\alpha} \frac{\partial \sigma}{\partial t},$$

wobei V die Temperatur, c_p die specifische Wärme beim constanten Druck, und c_v jene beim constanten Volumen bezeichnen. α ist der lineare thermische Ausdehnungscoefficient.

Die Bedingung für die Oberfläche ändert sich nicht.

F. Neumann, Vorlesungen über Elasticität, §. 59.

Elektricität und Magnetismus.

---

§. 204.

Elektrostatik.

1) Wirkt auf einen Punkt von der Masse Eins, ein Massentheilchen von der Masse m, so wird der Ausdruck

$$V = \frac{m}{r}$$

die Potentialfunction von m auf den Punkt für die Entfernung r genannt.

Die Arbeit, welche nöthig war, um die Masse Eins aus der unendlichen Entfernung in jenen Punkt zu bringen, wird das Potential in diesem Punkt in Bezug auf die Masse m genannt.

Diese strenge Unterscheidung zwischen Potential und Potentialfunction wird nur von Clausius eingehalten.

2) Wirken mehrere Massen auf den Punkt, so wird

$$V = \sum \frac{m}{r}$$

oder für ein Continuum

$$V = \int \frac{dm}{r},$$

wobei das Integral über das ganze Continuum zu nehmen ist. Gehört der Punkt einem zweiten Körper an, so ist das Potential dieser beiden Körper auf einander gegeben durch

$$W = \int\int \frac{dm\, dm_1}{r} = \int V dm_1.$$

Fällt der zweite Körper mit dem ersten zusammen, so spricht ın von einem Potential des Körpers auf sich selbst

$$E = \frac{1}{2} \int V dm.$$

Es ist dieses die Arbeit, welche nöthig war, um ihn vom ›tential Null bis auf das Potential E zu bringen.

3) Die wichtigsten Eigenschaften des Potentials sind:

a) V ändert sich von Punkt zu Punkt ausser in den iveauflächen, wo $V =$ const.

b) Die Differentialgleichung der Kraftlinien ist

$$\frac{\frac{\partial x}{\partial s}}{X} = \frac{\frac{\partial y}{\partial s}}{Y} = \frac{\frac{\partial z}{\partial s}}{Z},$$

obei

$$X = -\frac{\partial V}{\partial x}, \quad Y = -\frac{\partial V}{\partial y}, \quad Z = -\frac{\partial V}{\partial z}.$$

Die Kraftlinien stehen auf den Niveauflächen senkrecht.

c) Die Kraftwirkung ist verkehrt proportional dem Abstande er Niveauflächen, diese können sich daher nicht schneiden, wenn icht das Potential unendlich sein soll.

Sei also dn eine unendlich kleine Strecke der Normalen iner Niveaufläche, und

$$R = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}$$

ie wirkende Kraft, so wird

$$R = \frac{\partial V}{\partial n} = \frac{d V}{d n},$$

' V wird das Gefälle des Potentials genannt.

4) Ist ein Punkt an einer Stelle, wo sich kein Agens beindet, so ist

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0,$$

›efindet sich dagegen an jener Stelle das Agens, dessen Menge ür Volumeinheit durch h gegeben ist, so wird

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = -4\pi h.$$

5) Befindet sich die Elektricität im Gleichgewicht, so ist

$$X = -\frac{\partial V}{\partial x} = 0$$

$$Y = -\frac{\partial V}{\partial y} = 0$$

$$Z = -\frac{\partial V}{\partial z} = 0,$$

also

$$V = \text{const.}$$

$$\Delta V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = -4\pi h = 0$$

und demzufolge

$$h = 0,$$

d. h. im Innern eines leitenden Körpers ist keine freie Elektricität vorhanden.

6) Sei Q die Menge eines von einer Fläche eingeschlossenen Agens, deren Element wir mit dw bezeichnen, sei ferner n die Normale auf dw und V die Potentialfunction, so ist nach dem Satze von Green

$$\int\int \frac{\partial V}{\partial n} dw = -4\pi Q,$$

wobei sich das Integral über die ganze Strecke erstreckt.

Ist die Oberfläche eines Körpers mit einer elektrischen Schicht bedeckt, die sich im Gleichgewichtszustande befindet, so dass also die Oberfläche eine Niveaufläche ist, und ist σ die Dichtigkeit des Flächenelementes dw, so geht die obige Gleichung über in

$$\frac{\partial V}{\partial n} = -4\pi\sigma.$$

7) Ist ein Körper auf seiner Oberfläche so geladen, dass in seinem Innern $V = 1$ wird, so bezeichnet man die auf ihm befindliche Elektricitätsmenge mit dem Namen der Capacität des Körpers. Bezeichnet man mit $\varkappa$ die Dicke der Schicht, so wird die genannte Elektricitätsmenge der Oberfläche oder die Ladung

$$Q = \int \varkappa\, dw,$$

das Potential auf einem Punkt im Innern

$$V = \int \frac{\varkappa\, dw}{r}.$$

Vergrössert man die Menge der Elektricität so, dass

$$Q_1 = m\, Q,$$

wird auch

$$V_1 = m\,V,$$

so

$$\frac{Q_1}{V_1} = \frac{Q}{V} = \text{const.}$$

So stellt dieses constante Verhältniss auch die Capacität des iters dar. Sie kann daher auch definirt werden als die Ladung r das Potential Eins.

Die Kraft, welche auf ein Oberflächenelement wirkt, ist

$$-\varkappa\,\frac{\partial V}{\partial n},$$

so die Gesammtkraft oder die Spannung

$$S = -\int \varkappa\,\frac{\partial V}{\partial \varkappa}\,d\,w.$$

Geht $\varkappa$ in $p\,\varkappa$, also V in $p\,V$ über, so wird S zu $p^2\,S$, also t die Spannung dem Quadrate der Ladung proportional.

8) Für eine Kugel vom Radius a, die mit der Elektricitäts-enge E geladen ist, wird die Dichtigkeit σ an allen Punkten er Oberfläche

$$\sigma = \frac{E}{4\,a^2\,\pi}.$$

Die Potentialfunction auf der Oberfläche V_0 und im In-ern V_i

$$V_0 = V_i = \frac{E}{a} = 4\,a\,\pi\,\sigma$$

ir einen äusseren Punkt in der Entfernung r

$$V_a = \frac{E}{r},$$

ir die resultirende elektrische Kraft findet man

$$R_0 = \frac{1}{2}\,\frac{E}{a^2},\quad R_i = 0,\quad R_a = \frac{E}{r^2}.$$

Der Druck, mit welchem die Elektricität nach aussen ge-rieben wird, ist

$$p = R_a\,\sigma = \frac{E^2}{8\,\pi\,a^4} = \frac{V_0^2}{8\,\pi\,a^2}.$$

9) Ein Ellipsoid sei durch die Gleichung

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

gegeben. Die Grössen seien wie früher bezeichnet. Man findet, wenn

$$q = \left[\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}\right]^{-\frac{1}{2}}$$

gesetzt wird,

$$\sigma = \frac{Eq}{4\pi abc},$$

ferner wird

$$p = \frac{1}{8\pi}\left(\frac{Eq}{abc}\right)^2.$$

10) Sind im Abstande e zwei unendliche Platten gleichförmig mit der Elektricität beladen und sind σ_1 und σ_2 die Dichtigkeiten, ferner V_1 und V_2 die Potentialfunctionen der Oberfläche (abgesehen von ihren Rändern), so wird für einen Punkt im Abstande z von der ersten Fläche

$$V = V_1 + \frac{V_2 - V_1}{e} z$$

$$R_0 = -\frac{V_2 - V_1}{e}.$$

Im Innern der Platten ist $R_i = 0$ auf der Oberfläche

$$R_0 = -\frac{1}{2}\frac{V_2 - V_1}{e},$$

ferner wird

$$\sigma_1 = \frac{4\pi e}{V_1 - V_2}, \quad \sigma_2 = \frac{4\pi e}{V_2 - V_1}.$$

Die Capacität C eines Plattenstücks S ist

$$C = \frac{S}{4\pi e}.$$

11) Sei eine Kugel vom Radius r_1 von einer concentrischen Kugelschale vom Radius r_2 umgeben, so ist für einen Punkt zwischen den Schalen im Abstande r

$$V = \frac{V_1 r_2 - V_2 r_1}{r_2 - r_1} + \frac{r_1 r_2}{r}\frac{V_1 - V_2}{r_2 - r_1}.$$

Ferner wird

$$\sigma_1 = \frac{r_2}{4\pi r_1}\frac{V_1 - V_2}{r_2 - r_1}$$

$$\sigma_2 = \frac{r_1}{4\pi r_2}\frac{V_1 - V_2}{r_2 - r_1}.$$

Für die Elektricitätsmengen E_1 und E_2 findet man

$$Q_1 = -Q_2 = 4\pi r_1^2 \sigma_1 = 4\pi r_2^2 \sigma_2 = \frac{V_1 - V_2}{r_2 - r_1} r_1 r_2.$$

Die Capacität des Systems

$$C = \frac{r_1 r_2}{r_2 - r_1} = \frac{r_1}{e}(r_1 + e).$$

12) Sind zwei coaxiale Cylinder von den Radien r_1 und r_2 gegeben, die auf der Länge l mit den Elektricitätsmengen Q_1 und Q_2 auf die Potentiale V_1 und V_2 geladen sind, so ist für einen Punkt in der Entfernung v zwischen den Cylinderflächen:

$$V = \frac{V_1 \log \frac{r_2}{r} + V_2 \log \frac{r}{r_1}}{\log \frac{r_2}{r_1}}$$

$$\sigma_1 = \frac{1}{4\pi} \frac{V_1 - V_2}{r_1 \log \frac{r_2}{r_1}}, \quad \sigma_2 = -\frac{1}{4\pi} \frac{V_1 - V_2}{r_2 \log \frac{r_2}{r_1}}$$

$$Q_1 = -Q_2 = 2\pi l r_1 \sigma_1 = -2\pi l r_2 \sigma_2 = \frac{l}{2} \frac{V_1 - V_2}{\log \frac{r_2}{r_1}}.$$

Die Capacität für die Länge l ist

$$C = \frac{1}{2} \frac{l}{\log \frac{r_2}{r_1}}.$$

13) Seien zwei leitende Flächen C_1 und C_2 mit den Potentialen V_1 und V_2 gegeben, die im Abstande e sich einander nahe genug befinden. Dieser Abstand wird durch die gemeinschaftliche Normale bestimmt, die die Flächen in den Punkten P_1 und P_2 schneidet. Seien ferner r_1 und ϱ_1 und analog r_1, ϱ_2 die Krümmungsradien von zwei auf einander senkrechten und durch die Normale gezogenen Schnitte in P_1 respective P_2, so wird

$$\sigma_1 = \frac{V_1 - V_2}{4\pi e} \left\{1 + \frac{e}{2}\left(\pm \frac{1}{r_1} \pm \frac{1}{\varrho_1}\right)\right\}$$

$$\sigma_2 = -\frac{V_1 - V_2}{4\pi e} \left\{1 + \frac{e}{2}\left(\pm \frac{1}{r_2} \pm \frac{1}{\varrho_2}\right)\right\}.$$

Vergl. Maxwell: Treatise, Vol. I, p. 172 (II. ed.). Clausius: Mechanische Behandlung der Elektricität, II. Abschnitt (1879). Wiedemann: Elektricität, I. Bd., II. Cap. (1882).

14) Sei irgend eine Anzahl leitender Körper $C_1\, C_2 \ldots$ gegeben, welche influenzirend auf einander wirken. Diese sollen in zwei verschiedenen Weisen geladen werden. Bei der ersten Ladung seien die auf den einzelnen Körpern befindlichen Elektricitätsmengen

$$Q_1,\, Q_2,\, Q_3 \ldots$$

und die dadurch entstehenden Potentialniveaux der Körper

$$V_1,\, V_2,\, V_3 \ldots$$

und bei der zweiten Ladung entsprechend

$$Q'_1,\, Q'_2,\, Q'_3 \ldots$$
$$V'_1,\, V'_2\, V'_3 \ldots$$

so gilt folgende Gleichung

$$\sum V Q = \sum V' Q'.$$

(Satz von Clausius).

15) Das allgemeine Problem des Gleichgewichtes für ein System von Leitern lässt sich folgendermaassen formuliren.

Sei $V_\varkappa$ die Potentialfunction des Leiters $A_\varkappa$, und $Q_\varkappa$ die Elektricitätsmenge in $A_\varkappa$, so ist

„eine Function V so zu bestimmen, dass sie auf der Oberfläche und im Innern die constanten Werthe $V_\varkappa$ annimmt, in der Entfernung unendlich gleich Null wird und im ganzen Raume die Laplace-Poisson'sche Gleichung erfüllt“.

Eine allgemeine Lösung ist derzeit noch nicht gegeben.

Das Princip der Superposition der elektrischen Gleichgewichtszustände lässt wenigstens die Gestalt von V bestimmen.

Es wird

$$V_j = \sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=n} p_{\varkappa j}\, Q_\varkappa + p_{0j},$$

wobei $p_\varkappa$ gewisse Functionen der Coordinaten sind. Die Grössen $p_{\varkappa j}$ werden Potentialcoefficienten genannt.

Ebenso wird

$$Q_j = \sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=n} q_{\varkappa j}\, V_\varkappa + q_{0j},$$

wobei $q_{\varkappa j}$ die Inductionscoefficienten darstellen. Endlich wird

$$V = \sum_{\varkappa=1}^{\varkappa=n} P_\varkappa\, V_\varkappa + P_0.$$

Vergl. Riemann: Schwere, Elektricität und Magnetismus. Maxwell: Treatise, Part. I, Chap. III.

16) Das Verhältniss der Capacität eines von abgeleiteten Leitern umgebenen elektrischen Körpers, zur Capacität desselben Körpers im freien Raume, bezeichnet man mit dem Namen der Verstärkungszahl oder condensirenden Kraft.

Diese Grösse ist für zwei Kugeln (Nr. 11)

$$\frac{r_2}{r_2 - r_1}$$

und für zwei Cylinderflächen (Nr. 12)

$$log \frac{1}{r_1} : log \frac{r_2}{r_1}.$$

§. 205.

Neuere Anschauung.

1) Diese wurde von Maxwell auf Grund der Faraday'schen Ansichten mathematisch ausgebildet und versetzt den Sitz der Elektrisation in den Isolator (dielektrisches Medium). In Vermeidung einer Einwirkung in die Ferne spricht sie von einer von Element zu Element sich fortpflanzenden Spannung (Polarisation) des Isolators. Diese Spannung verbreitet sich längs Inductionscurven (welche im Falle des elektrisch isotropen Mediums mit den Kraftlinien identisch sind). Daraus folgt zugleich, dass eine absolute Ladung unmöglich ist, d. h. es kann positive Elektricität ohne negative nicht bestehen. [Faraday: Exp. Rech. 1165, 1167, 1168.]

2) Sei K das Maass der Induction im Dielektricum [die sogenannte specifische inductive Capacität], so wird im Falle eines elektrisch isotropen Mediums K von der Richtung der wirkenden Kraft unabhängig und die der Laplace-Poisson'schen Gleichung analoge lautet

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(K \frac{\partial V}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(K \frac{\partial V}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(K \frac{\partial V}{\partial z}\right) + 4\pi h = 0.$$

Ist K constant, so geht diese Gleichung über in

$$K \Delta^2 V + 4\pi h = 0.$$

3) Ist dagegen das Medium ein elektrisch anisotropes, so wird K von der Richtung der Kraft abhängig. Seien

$$X \; Y \; Z$$

die Componenten der wirkenden Kraft, und setzt man

$$4\pi F = K_{xx} X + K_{yx} Y + K_{zx} Z$$
$$4\pi G = K_{xy} X + K_{yy} Y + K_{zy} Z$$
$$4\pi H = K_{xz} X + K_{yz} Y + K_{zz} Z,$$

so hat man zu schreiben

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} + \frac{\partial H}{\partial z} = h.$$

4) Wirkt an der Grenze zweier Medien eine Ladung von der Dicke k, so ist

$$K_1 \frac{\partial V}{\partial n_1} + K_2 \frac{\partial V}{\partial n_2} + 4\pi k = 0,$$

wobei K_1 und K_2 die Inductionsconstanten und n_1 und n_2 die Normalen nach innen bezeichnen.

Ueber die experimentelle Bestimmung von K vergl. Gordon: A phys. treat. on electr. 1880, I, 69. Boltzmann: Wien. Sitzber. 1874. Den Einfluss des Mediums erkannte schon Cavendish (1771 bis 1781). Mossotti (1836), Clausius (Mech. Wärmetheorie, II. Bd.), Helmholtz (Crelle's Journ. 70) behandeln sie auf Grund der älteren Anschauungen analog der magnetischen Induction, für welche Poisson die Gleichungen aufstellte. Ueber die Maxwell'sche Ableitung vergl. Maxwell: Lehrbuch der Elektricität, deutsch von Weinstein, und Wiedemann: Die Lehre von der Elektricität.

5) Der Unterschied zwischen der älteren und neueren Anschauung ist nicht so gross, wenn man von der Grösse k absieht.

Denn sei V das Potential im Punkte $x\,y\,z$,

$$V_1 \; V_2 \; V_3 \ldots V_m$$

constante Werthe desselben auf der Oberfläche des ersten, zweiten ... $m$ten Leiters, so wird die Elektricitätsmenge auf dem Leiterelement $d\sigma$

$$\frac{1}{4\pi} \frac{\partial V}{\partial n} d\sigma.$$

Die potentielle Energie des ganzen Systems ist

$$W = -\frac{1}{4\pi} \sum \int V \frac{\partial V}{\partial n} d\sigma \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \text{I)}$$

Setzt man aber im Green'schen Satze (vergl. Potential §. 196) $U = V$ und beachtet, dass $\Delta^2 V = 0$, so folgt

$$W = \frac{1}{8\pi} \int R^2 d\tau \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \text{II)}$$

wobei

$$R^2 = \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)^2.$$

Man kann demnach die elektrische Energie des ganzen Systems entweder so auffassen, dass sie bloss durch die auf der Oberfläche vorhandene Elektricität bestimmt wird (Integral I), oder so, dass ihr Sitz der ganze Raum wird ausserhalb der Leiter (Integral II).

6) Lassen wir in den Fundamentalgleichungen K die specifische Leitungsfähigkeit bedeuten, so ist für eine stationäre Strömung

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(K' \frac{\partial V}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(K' \frac{\partial V}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(K' \frac{\partial V}{\partial z}\right) = 0$$

$$k_1' \frac{\partial V}{\partial n_1} + k_2' \frac{\partial V}{\partial n_2} = 0,$$

wobei wir K' zum Unterschiede von K schreiben, weil diese Grösse hier eine andere Bedeutung hat.

7) Für dielektrische Medien lauten die Stromgleichungen:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(k' \frac{\partial V}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(k' \frac{\partial V}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(k' \frac{\partial V}{\partial z}\right) = \frac{dh}{dt}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(k \frac{\partial V}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(k \frac{\partial V}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(k \frac{\partial V}{\partial z}\right) + 4\pi h = 0.$$

Ist das Medium ein elektrisches isotropes und demnach k und k' constante Grössen, so folgt aus diesen beiden Gleichungen:

$$\frac{1}{k'} \frac{dh}{dt} = - \frac{4\pi}{k} h$$

oder

$$h = h_0 e^{-\frac{4\pi k'}{k} t}.$$

Demnach sinkt die elektrische Dichte an jeder Stelle geometrisch, wenn die Zeit arithmetisch wächst.

§. 206.

Elektrokinetik.

1) Sei dw ein Oberflächenelement im Innern eines Leiters, n die Richtung der Normalen, dJ die Stromintensität der Fläche dw und V die Potentialfunction, so wird:

$$dJ = -\,C\,dw\,\frac{\partial V}{\partial n}.$$

Die Grösse

$$i = \frac{dJ}{dw} = -\,C\,\frac{\partial V}{\partial n}$$

wird die **Stromintensität** genannt. Die Constante C misst die Leitungsfähigkeit.

2) Schreiben wir

$$dJ.dn = -\,C\,dV.dw$$

und nehmen C als constant an, so wird

$$J\,dn = -\,C\,w\,dV$$

oder

$$\frac{J}{C}\int\frac{dn}{w} = V_1 - V_2.$$

Die Grösse

$$R = \frac{1}{C}\int\frac{dn}{w}$$

wird der **Widerstand** des Leiters zwischen den Niveauflächen

$$V_1 = const.,\quad V_2 = const.$$

genannt. Die Differenz

$$V_1 - V_2$$

nennt man die **elektromotorische Kraft**. Man kann sodann schreiben

$$J = \frac{V_1 - V_2}{R},$$

welches die gewöhnliche Form des **Ohm'schen Gesetzes** ist.

3) Sei l die Länge eines Körpers vom constanten Querschnitt q, sowie r sein **specifischer Widerstand** (d. h. der Widerstand für $l = 1$ und $q = 1$), sowie R der **Gesammtwiderstand**, so ist

$$R = \frac{rl}{q}.$$

Aus der Formel

$$R = \frac{1}{C} \int \frac{dn}{w}$$

folgt, dass der Widerstand der Leitungsfähigkeit umgekehrt proportional ist.

4) Bezeichnen wir somit
die Stromintensität mit J,
die elektromotorischen Kräfte mit E,
die Widerstände mit R,
die Längen mit l,
die Querschnitte mit q,
die specifischen Widerstände mit r,
so wird für einen Stromkreis

$$J = \frac{\sum E}{\sum R} = \frac{\sum E}{\sum \frac{l}{q} r},$$

dieses ist die gewöhnliche Form des Ohm'schen Gesetzes.

5) A. Fliesst eine Anzahl von linearen Strömen in einem Punkte zusammen, so ist die algebraische Summe ihrer Stromintensitäten gleich Null. Also

$$\sum J = 0.$$

(Die Continuitätsgleichung.)

B. Bildet eine Anzahl von Stromleitern eine geschlossene Figur, so ist die Summe der Producte aus ihren Stromintensitäten und den zugehörigen Widerständen gleich der gesammten in dem Systeme vorhandenen elektromotorischen Kraft. Also

$$\sum RJ = \sum E.$$

(Die Leitungsgleichung.)
(Die Kirchhoff'schen Gesetze 1847.)

6) Einige Anwendungen.
Wir haben für die Fig. 17 (a. f. S.)

$$J_1 = \frac{E(R_2 + R_3)}{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_3 R_1}$$

$$J_2 = \frac{E R_3}{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_3 R_1}$$

$$J_3 = \frac{E R_2}{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_3 R_1}.$$

Der Widerstand des gesammten Schliessungskreises R ist

$$R = \frac{E}{J_1} = R_1 + \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3} = R_1 + R',$$

wobei R' den Widerstand der beiden Zweige $J_3 R_3$ und $J_2 R$ bezeichnet.

Fig. 17.

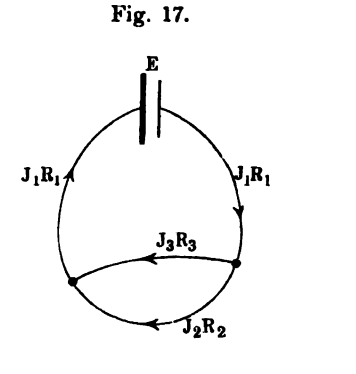
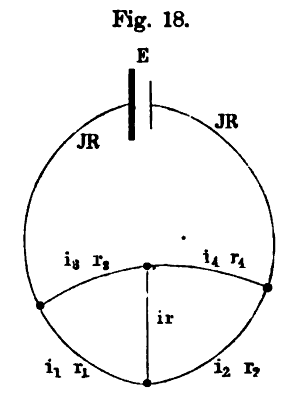


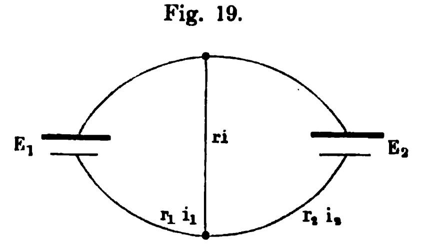
Fig. 18.



Für die Fig. 18 wird für die Brücke $(i\,r)$

$$i = \frac{(r_2 r_3 - r_1 r_4) J}{(r_1 + r_3)(r_2 + r_4) + r(r_1 + r_2 + r_3 + r_4)}.$$

Fig. 19.



Soll der Strom in der Brücke verschwinden, so muss

$$r_1 : r_2 = r_3 : r_4.$$

Für die Fig. 19 haben wir

$$i = \frac{E_1 r_2 + E_2 r_1}{r r_1 + r r_2 + r_1 r_2}.$$

Vergl.: Kempe: Handbuch der Elektricitätsmessungen, deutsch von Baumann, Braunschweig 1883. Kohlrausch: Praktische Physik, 1889.

7) Aus den Kirchhoff'schen Gesetzen folgt ferner: Wird ein Strom i zwischen zwei Punkten der unverzweigten Leitung in mehrere Widerstände $r_1, r_2, r_3 \ldots$ verzweigt, und sind $i_1, i_2, i_3 \ldots$ die den Zweigen entsprechenden Stromintensitäten, so ist:

$$i_1 + i_2 + i_3 + \cdots = i$$

$$i_1 : i_2 : i_3 : \ldots = \frac{1}{r_1} : \frac{1}{r_2} : \frac{1}{r_2} : \ldots$$

$$\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3} + \cdots = \frac{1}{r},$$

wo r der Widerstand der unverzweigten Leitung ist.

8) Setzt man

$$i = \sqrt{u^2 + v^2 + w^2} = -C\frac{\partial V}{\partial n},$$

so dass

$$u = CX = -C\frac{\partial V}{\partial x}$$

$$v = CY = -C\frac{\partial V}{\partial y}$$

$$w = CZ = -C\frac{\partial V}{\partial z}.$$

So kann man die Stromintensität für irgend eine Richtung m mit den Richtungscosinussen α, β, γ darstellen durch

$$i_m = u\alpha + v\beta + w\gamma.$$

Ist der Leiter nicht isotrop, so wird

$$u = C_1 X + c_3 Y + c_2 Z$$

$$v = c_3 X + C_2 Y + c_1 Z$$

$$w = c_2 X + c_1 Y + C_3 Z.$$

9) Die allgemeine Gleichung für stationäre Strömung lautet

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(C\frac{\partial V}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(C\frac{\partial V}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(C\frac{\partial V}{\partial z}\right) = 0.$$

An der Grenze der Leiter wird

$$C_1\frac{\partial V_1}{\partial n} = C_2\frac{\partial V_2}{\partial n},$$

wobei C_1 und C_2 die Leitungsfähigkeiten der beiden Medien und V_1 und V_2 ihre Potentialwerthe an der Grenze bezeichnen.

10) Sei C constant, so lautet die Gleichung der isoelektrischen Flächen

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0.$$

Demnach sind die freien Elektricitäten, wie beim Gleichgewichtszustande statischer Elektricitäten, auch während des Stromes auf der Oberfläche verbreitet.

Die Curven, welche die isoelektrischen Flächen senkrecht schneiden, werden Strömungscurven genannt. Ihre Differentialgleichung lautet

$$\frac{\partial V}{\partial x} : \frac{\partial V}{\partial y} : \frac{\partial V}{\partial z} = dx : dy : dz.$$

11) Ist die eine Dimension sehr klein, so haben wir eine Platte von verschwindender Dicke und es wird

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0.$$

Die allgemeine Lösung ist

$$V = f(x + iy) + F(x + iy), \quad i = \sqrt{-1},$$

wobei f und F beliebige Functionen sind.

Ist die Scheibe unbegrenzt und fliessen durch die n Punkte $A_1, A_2, \ldots A_n$ Elektricitäten $E_1, E_2, \ldots E_n$ ein und aus, so dass

$$E_1 + E_2 + E_3 + \cdots E_n = 0,$$

so wird

$$V = M - \frac{1}{2\pi C\delta} \sum_{x=1}^{x=n} E_x \log r_x,$$

dabei sind $r_1, r_2, \ldots r_n$ die Abstände irgend eines Punktes von den Einströmungspunkten, M eine Constante, C die specifische Leitungsfähigkeit und δ die Dicke der Scheibe.

Sind nur zwei Einströmungspunkte vorhanden, so wird

$$V = M + \frac{E_1}{2\pi C\delta} \log \frac{r_2}{r_1},$$

weil $E_1 = -E_2$. An die Stelle der isoelektrischen Flächen treten hier isoelektrische Curven, deren Gleichung

$$\frac{r_2}{r_1} = Const.$$

ist. Vergl. Kirchhoff: Gesamm. Abh., S. 1.

12) Ist der Strom nicht constant, so gilt die allgemeine Gleichung

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(C\frac{\partial V}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(C\frac{\partial V}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(C\frac{\partial V}{\partial z}\right) - \frac{dh}{dt} = 0,$$

wobei h die elektrische Dichte im Punkte (xyz) zur Zeit t bezeichnet.

Vergl. zum Ganzen auch noch Maxwell: Lehrbuch der Elektricität und des Magnetismus, deutsch von Weinstein. Wiedemann: Elektricität, Bd. I.

§. 207.

Elektrodynamik.

1) Die elektrodynamischen Kräfte zerfallen in zwei Gruppen:

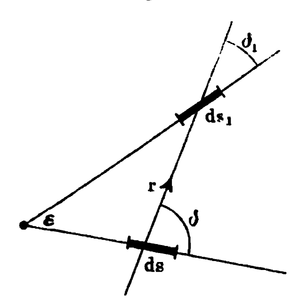
I. in die ponderomotorischen, d. h. jene, welche eine Aenderung der Configuration, und

II. in die elektromotorischen, die eine Veränderung des elektrischen, beziehungsweise magnetischen Zustandes bewirken.

2) Das ponderomotorische Elementargesetz (Ampère 1826) lautet:

$$R = \varkappa^2 \frac{J\,ds\,J_1\,ds_1}{r^2} \{\cos\varepsilon - {}^3/_2 \cos\vartheta \cos\vartheta_1\},$$

Fig. 20.



dabei ist $\varkappa^2$ ein constanter Factor, der von der Wahl der Einheiten abhängt, während $\vartheta\,\vartheta_1$ und ε jene Winkel bezeichnen, unter welchen die beiden Elemente gegen die Linie r $(ds \longrightarrow ds_1)$ und gegen einander geneigt sind.

Da

$$\cos\vartheta = \frac{dr}{ds}, \quad \cos\vartheta = -\frac{dr}{ds_1}$$

$$-\cos\varepsilon = r\frac{d^2r}{ds\,ds_1} + \frac{dr}{ds_1}\frac{dr}{ds},$$

so kann man auch schreiben:

$$R = \varkappa^2 \frac{J\,ds\,J_1\,ds_1}{r^2}\left\{\frac{1}{2}\frac{dr}{ds}\frac{dr}{ds_1} - r\frac{d^2r}{ds\,ds_1}\right\}$$

$$= \varkappa^2 \frac{J\,ds\,J_1\,ds_1}{\sqrt{r}}\frac{d}{ds_1}\left(\frac{1}{\sqrt{r}}\frac{dr}{ds}\right)$$

$$= \varkappa^2 \frac{J\,ds\,J_1\,ds_1}{\sqrt{r}}\frac{d}{ds_1}\left(\frac{\cos\vartheta}{\sqrt{r}}\right).$$

Liegen die beiden Elemente parallel zu einander, aber so, dass sie mit der Verbindungslinie einen Winkel

$$\cos\vartheta = \sqrt{\frac{2}{3}}$$

bilden, so wirken sie gar nicht auf einander.

3) Das ponderomotorische Integralgesetz. Befinden sich zwei gleichförmige Stromringe A und B in irgend welchen Bewegungen, befinden sich ferner die in ihnen vorhandenen Stromintensitäten J und J_1 in irgend welchen Zuständen der Veränderung, so wird für jeden Augenblick die von B auf A ausgeübte ponderomotorische Arbeit gleich sein dem negativ genommenen Differentialquotienten von P, genommen nach der räumlichen Lage von A. Es ist

$$V = \frac{1}{J J_1} \cdot P = -\frac{\varkappa}{2} \int\int \frac{\cos\varepsilon}{r}\, ds\, ds_1$$
$$= -\frac{\varkappa}{2} \int\int \frac{\cos\vartheta \cos\vartheta_1}{r}\, ds\, ds_1.$$

F. Neumann's elektrodynamisches Potential (1845. Abhandl. der Berliner Akademie).

4) Das elektromotorische Differentialgesetz ist zur Zeit noch nicht bekannt.

(Vergl. C. Neumann: Die elektrischen Kräfte, 1873, S. VIII.)

5) Das elektromotorische Integralgesetz (F. Neumann 1847).

Die Summe der vom Ringe B im Ringe A während der Zeit dt inducirten elektromotorischen Kräfte ist immer identisch mit dem totalen Differentialquotienten

$$\frac{P}{J},$$

multiplicirt mit einer Constanten ε (der sogenannten Inductionsconstanten). Dabei ist P das Potential der beiden Ringe auf einander und J die Stromstärke in A.

Sei also

$$V = -\frac{K}{2} \int\int \frac{\cos\varepsilon}{r}\, ds\, ds_1,$$

so wird

$$dt \sum E = -\varepsilon\, d(J_1 V) = -\varepsilon\, d\left(\frac{P}{J}\right).$$

6) Das Ampère'sche Elementargesetz ist nicht das einzig mögliche. Stefan (Wien. akad. Ber., LIX. Bd., II. Abth.) hat eine allgemeine Form aufgestellt, die alle möglichen Elementargesetze in sich begreift.

Er findet für die Componente der wirkenden Kraft in der Richtung der X-Axe den Ausdruck:

$$X = J\,d\,s\,J_1\,d\,s\left\{m\frac{d^2}{d\,s\,d\,s_1}\left(\frac{x_2 - x_1}{r}\right) + n\frac{d}{d\,s}\left(\frac{1}{r}\right)\frac{d\,x_2}{d\,s_1}\right.$$
$$\left. + p\frac{d}{d\,s_1}\left(\frac{1}{r}\right)\frac{d\,x_1}{d\,s} + q\frac{x_2 - x_1}{r^3}\cos\varepsilon\right\},$$

wo $x_1\,y_1\,z_1$ und $x_2\,y_2\,z_2$ die Coordinaten von $d\,s$ resp. $d\,s_1$ sind. Ersetzt man x durch y, z, so erhält man die Ausdrücke für Y, Z.

Von den vier Constanten

$$m,\ n,\ p,\ q$$

können nur zwei durch die Wahl der Constanten und durch Versuche bestimmt werden.

Wählt man die Einheit der Stromstärke so, dass das Potential zweier geschlossener Leiter ausgedrückt wird durch

$$V = -\frac{J J_1}{2}\int\!\!\int\frac{\cos\varepsilon}{r}\,d\,s\,d\,s_1,$$

so folgt

$$p = q = -\frac{1}{2}.$$

Die elektrodynamische Theorie bleibt also unbestimmt, insofern zwei von den Constanten willkürlich sind.

Da die drei ersten Glieder vollständige Differentialquotienten sind, so verschwinden sie bei einer Integration über eine geschlossene Curve. Daraus folgt, dass alle Elementargesetze für geschlossene Leiter zu demselben Resultate führen müssen.

Setzt man $m = n = 0$, so gelangt man zu einem von Grassmann, Clausius und Hankel entwickelten Elementargesetz.

Vergl. Wiedemann: Elektricität, IV. Bd., II. Abth.

7) Wirkt ein geschlossener Strom von der Intensität J_1 auf ein Element $d\,s$ eines Leiters, in welchem die Intensität J ist, so wird, wenn x, y, z die Coordinaten von $d\,s$ sind, ferner

$$\frac{d\,x}{d\,s} = \cos\lambda,\quad \frac{d\,y}{d\,s} = \cos\mu,\quad \frac{d\,z}{d\,s} = \cos\nu$$

gesetzt wird und ferner

$$A = \int\frac{x_1 - x}{r^3}\,d\,y_1 - \int\frac{y_1 - y}{r^3}\,d\,x_1$$
$$B = \int\frac{z_1 - z}{r^3}\,d\,x_1 - \int\frac{x_1 - x}{r^3}\,d\,z_1$$
$$C = \int\frac{y_1 - y}{r^3}\,d\,z_1 - \int\frac{z_1 - z}{r^3}\,d\,y_1,$$

welche Ausdrücke die Determinanten des Stromes genannt werden, die Componenten der Einwirkung

$$X = -\frac{1}{2} J J_1 \int [C \cos\mu - B \cos\nu] \, ds$$

$$Y = -\frac{1}{2} J J_1 \int [A \cos\nu - C \cos\lambda] \, ds$$

$$Z = -\frac{1}{2} J J_1 \int [B \cos\lambda - A \cos\mu] \, ds.$$

Und es ist

$$X dx + Y dy + Z dz = 0$$

$$XA + YB + ZC = 0.$$

Die gemeinschaftliche Resultante ist

$$R = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}.$$

Zieht man durch ds eine Linie, welche mit den Axen die Winkel ξ, η, ζ macht, so dass

$$\cos\xi = \frac{A}{D}, \quad \cos\eta = \frac{B}{D}, \quad \cos\zeta = \frac{C}{D},$$

wobei

$$D = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2},$$

so erhält man die sogenannte Directrix. Ihre Richtung ist unabhängig von der Richtung des Elementes ds. Die vom Strome ausgeübte Wirkung ist senkrecht gegen das Element selbst und senkrecht gegen die Directrix.

Sei w der Winkel zwischen dem Elemente und der Directrix, so wird

$$R = -\frac{1}{2} D J J_1 \, ds \sin w.$$

8) Ein Kreisstrom in der YZ-Ebene, dessen Mittelpunkt im Ursprung liegt und dessen Radius a ist, wirkt auf ein Element, dessen Mitte auf der X-Axe liegt im Abstande ϱ vom Ursprung, so, dass

$$X = 0$$

$$Y = J J_1 \, dz \frac{\pi a^2}{(a^2 + \varrho^2)^{3/2}}$$

$$Z = -J J_1 \, dy \frac{\pi a^2}{(a^2 + \varrho^2)^{3/2}}.$$

9) Ein Theil eines geradlinigen Stromes ($r_1 - r_0$) wirkt auf ein Element, welches der Stromebene angehört, mit der Kraft

$$\frac{J J_1}{\sin \alpha} \log \frac{r_1}{r_0}.$$

Dabei ist α der Winkel zwischen dem Element und dem Strome, und r_0 und r_1 sind die Abstände des Elementes von den Stromenden.

10) Sei ein kleiner Kreisstrom von der Fläche λ gegeben und das Element, auf welches er wirkt, sei im Anfange des Coordinatensystems gelegen. Die Ebene des Kreisstromes möge mit den Coordinatenebenen die Winkel ξ, η, ζ einschliessen und es sei q ihr kürzester Abstand von dem Coordinatenanfang. Seien ferner x, y, z die Coordinaten des Schwerpunktes des Kreisstromes und r seine Entfernung vom Coordinatenursprung, so wird:

$$A = \frac{\lambda}{r^3}\left\{\cos \xi - \frac{3q}{r^2} x\right\}$$

$$B = \frac{\lambda}{r^3}\left\{\cos \eta - \frac{3q}{r^2} y\right\}$$

$$C = \frac{\lambda}{r^3}\left\{\cos \zeta - \frac{3q}{r^2} z\right\}.$$

Diese Formeln lassen sich nach **Neumann** auch schreiben wie folgt:

$$A = \lambda \frac{d}{dq}\left(\frac{x}{r^3}\right), \quad B = \lambda \frac{d}{dq}\left(\frac{y}{r^3}\right)$$

$$C = \lambda \frac{d}{dq}\left(\frac{z}{r^3}\right).$$

Die Stromcomponenten sind sodann

$$X = -\frac{1}{2} J J_1 \lambda \frac{d}{dq}\left\{\frac{z\,dy_1 - y\,dz_1}{r^3}\right\}$$

$$Y = -\frac{1}{2} J J_1 \lambda \frac{d}{dq}\left\{\frac{x\,dz_1 - z\,dx}{r^3}\right\}$$

$$Z = -\frac{1}{2} J J_1 \lambda \frac{d}{dq}\left\{\frac{y\,dx_1 - x\,dy_1}{r^3}\right\}.$$

Gehört das Element ds_1 ebenfalls einem unendlich kleinen geschlossenen Strome von der Fläche λ_1 und der Senkrechten q_1 an, so wird:

$$X = -\frac{1}{2} J J_1 \lambda \lambda_1 \frac{d^2}{dq\,dq_1} \left\{\frac{x - x_1}{r^3}\right\}$$

$$Y = -\frac{1}{2} J J_1 \lambda \lambda_1 \frac{d^2}{dq\,dq_1} \left\{\frac{y - y_1}{r^3}\right\}$$

$$Z = -\frac{1}{2} J J_1 \lambda \lambda_1 \frac{d^2}{dq\,dq_1} \left\{\frac{z - z_1}{r^3}\right\}.$$

11) Unter einem Solenoid (σωλην die Rinne) versteht man den Inbegriff einer Anzahl unendlich kleiner Kreisströme von gleicher Intensität, senkrecht und in gleichen Zwischenräumen um eine beliebige Curve gelegen. Die Anzahl der Stromringe auf der Längeneinheit der Axe bestimmt die Dichtigkeit des Solenoids. Seine Endpunkte oder Endflächen nennt man Pole.

Sei λ die unendlich kleine Fläche eines Stromringes, α die Dichtigkeit des Solenoids von den Endpunkten $x_0 y_0 z_0$, $x_1 y_1 z_1$, denen die Entfernungen r_0 und r_1 vom Stromelement, auf welches das Solenoid wirkt, entsprechen, so wird:

$$A = \lambda \alpha \left(\frac{x_1}{r_1^3} - \frac{x_0}{r_0^3}\right)$$

$$B = \lambda \alpha \left(\frac{y_1}{r_1^3} - \frac{y_0}{r_0^3}\right)$$

$$C = \lambda \alpha \left(\frac{z_1}{r_1^3} - \frac{z_0}{r_0^3}\right).$$

Ist $r_0 = \infty$, so wird mit Unterdrückung der Indices

$$A_0 = \lambda \alpha \frac{x}{r^3}, \quad B_0 = \lambda \alpha \frac{y}{r^3}, \quad C_0 = \lambda \alpha \frac{z}{r^3}.$$

Die Directrix ist

$$D_0 = \frac{\lambda \alpha}{r^2},$$

und die Resultante

$$R = -\frac{1}{2} J J_1 \, ds \, \lambda \alpha \frac{\sin(r\,ds)}{r^2}.$$

Sie steht auf der durch das Element ds und seine Verbindungslinie r mit dem Endpunkte des Solenoids gelegten Ebene senkrecht.

Da nun die Einwirkung eines Stromelementes auf einen Magnetpol, der die Menge m des Magnetismus enthält, gegeben ist nach Biot-Savart durch

$$- J\, d s\, m \frac{\sin(r\, d s)}{r^2},$$

o sieht man, dass diese Formeln gleichwerthig sind, wenn

$$m = \frac{\lambda \alpha}{2} J_1$$

;esetzt wird. Ein Magnetpol kann also durch ein einseitig be-;renztes Solenoid ersetzt werden. (Ampère's Theorie des lagnetismus.)

12) Sei ein Magnet um eine verticale Axe drehbar und sei m die Menge des Magnetismus im Nordpol. Der Magnet wird sich in der Ruhelage befinden, wenn er im magnetischen Meridian ist. Sei ferner die Axe des Magnets in der Ruhelage gleich ler X-Axe, die Senkrechte auf X und die Ebene des Horizonts sei die Y-Axe und ein Kreisstrom vom Radius R gegeben, dessen Mittelpunkt in der Entfernung a vom Ursprung auf der Y-Axe liegt. Seien x und y die Coordinaten des Poles, so ist das Drehungsmoment für den Magnet

$$M = 2\pi m J \left\{ \frac{2 R^2 y}{r^3} - \frac{3}{2} \frac{R^2}{r^7} (R^2 - 4 a^2) \left\{ 2 x^2 y - \frac{1}{2} y^3 \right\} \cdots \right\},$$

wobei

$$r^2 = R^2 + a^2.$$

Daraus ergeben sich die Formeln für Bussolen.

Sei $a = 0$ {Tangentenbussole}, ferner l die Nadellänge und φ der Ablenkungswinkel, H die Horizontalintensität des Erdmagnetismus, so wird

$$J = \frac{HR}{2\pi} \operatorname{tg} \varphi \left\{ 1 - \frac{3}{8} \frac{l^2}{R^2} \left[\sin^2 \varphi - \frac{1}{4} \cos^2 \varphi \right] \cdots \right\}.$$

Ist $a = 0$, $x = 0$ {Sinusbussole}, so folgt:

$$J = \frac{HR}{2\pi} \left\{ 1 - \frac{3}{32} \frac{l^2}{R^2} \right\} \sin \varphi.$$

Vergl. Zech: Elektrisches Formelbuch. Kohlrausch: Leitfaden der praktischen Physik (1884).

13) Für die Theorie der Induction sind folgende Gesetze von fundamentaler Bedeutung:

I. Wenn ein Leiter A von der Stromstärke J eine Aenderung der Configuration gegen einen Leiter B erfährt, so entsteht in B ein Strom, der demjenigen gleich und entgegengesetzt ist,

welcher, wenn er in B wäre, diese Aenderung der Configuration elektrodynamisch zu bewirken im Stande wäre.

Lenz: Pogg. Ann. XXXI, S. 483 (1834).

II. Sind zwei Leiter A und B gegeben, dabei in B ein Strom von der Intensität J_B, so wird durch die Aenderung der Configuration und der Intensität J_B im Leiter A eine elektromotorische Kraft E inducirt, für welche die Formel gilt:

$$E = - c \frac{d}{dt} (J_B V),$$

dabei ist c die sogenannte Inductionsconstante und

$$V = - \frac{\varkappa}{2} \int\int \frac{\cos \varepsilon}{r} d s_A d s_B.$$

Sei R der Gesammtwiderstand von B, so wird die Grösse

$$\int_0^\tau J dt = \frac{c}{R} [J_1 V_1 - J_2 V_2]$$

der Integralstrom genannt, dabei ist V_1 die Grösse von V in der Endlage und V_2 jene in der Anfangslage.

Vergl. C. Neumann: Die elektrischen Kräfte.

§. 208.

Magnetismus.

1) Seien m und m' die Mengen des Magnetismus in einem Pole und r die gegenseitige Entfernung, so ist die wirkende Kraft P

$$P = \frac{m m'}{r^2}.$$

(Coulomb'sches Gesetz.) Diese Kraft hat im Allgemeinen ein Potential

$$V = \sum \frac{m}{r} = \int \frac{dm}{r}$$

mit den Componenten

$$\alpha = - \frac{\partial V}{\partial x}, \quad \beta = - \frac{\partial V}{\partial y}, \quad \gamma = - \frac{\partial V}{\partial z}.$$

2) Betrachten wir einen unendlich kleinen Elementarmagnet von der Länge p, so ist, wenn r und r' die Entfernungen der

beiden Pole von demjenigen Punkte, dessen Potential gesucht wird, bezeichnen,

$$V = \frac{m'}{r} - \frac{m'}{r'}.$$

Sei nun

$$r' = r + p \cos \varepsilon,$$

also ε der Winkel, den p mit r macht, so wird

$$V = \frac{m' p \cos \varepsilon}{r^2}.$$

Die Grösse $m'p$ wird das magnetische Moment des Elementenmagnets genannt.

3) Ein gewöhnlicher Magnet kann als ein Aggregat von bestimmt gelagerten Elementarmagneten aufgefasst werden. Man kann annehmen, dass im Elementarraume $d\xi\, d\eta\, d\zeta$ alle Elementarmagnete gleich gerichtet sind. Sodann wird das Gesammtmoment M durch Addition der Elementarmomente erhalten und wir haben

$$M = J d\xi\, d\eta\, d\zeta.$$

Die Bedeutung von J ergiebt sich, wenn wir $d\xi\, d\eta\, d\zeta = 1$ setzen. J wird die Intensität der Magnetisation genannt. J hat nicht nur einen bestimmten Werth, sondern auch eine bestimmte Richtung, deren Richtungscosinusse λ, μ, ν sein mögen. Es wird

$$A = J.\lambda, \quad B = J.\mu, \quad C = J.\nu$$
$$J^2 = A^2 + B^2 + C^2.$$

Bilden wir für einen Magnet

$$Kl = \int\int\int A\, d\xi\, d\eta\, d\zeta$$
$$Km = \int\int\int B\, d\xi\, d\eta\, d\zeta$$
$$Kn = \int\int\int C\, d\xi\, d\eta\, d\zeta,$$

so wird K das magnetische Moment dieses Systems darstellen. Die Grössen l, m, n sind die Richtungscosinusse der magnetischen Axe dieses Systems.

4) Das Potential in Bezug auf einen ausserhalb des Magnets liegenden Punktes x, y, z ist

$$V = \int\int\int \frac{A(x-\xi) + B(y-\eta) + C(z-\zeta)}{r^3}\, d\xi\, d\eta\, d\zeta.$$

5) Gehört dieser Punkt einem magnetischen System an, so ist das Potential dieses Systems im Bezug auf das erstere gegeben durch

$$W = \int\int\int \left\{ A \frac{\partial V}{\partial x} + B \frac{\partial V}{\partial y} + C \frac{\partial V}{\partial z} \right\} dx\, dy\, dz,$$

wobei V den in 4) entwickelten Werth darstellt.

6) Setzen wir

$$h = -\left(\frac{\partial A}{\partial \xi} + \frac{\partial B}{\partial \eta} + \frac{\partial C}{\partial \zeta}\right)$$

$$k = -(lA + mB + nC),$$

so ergiebt sich durch theilweise Integration

$$V = \int \frac{h}{r}\, d\tau + \int \frac{k}{r}\, d\sigma$$

$$W = \int V h\, d\tau + \int V k\, d\sigma,$$

dabei ist $d\tau$ ein Raumelement, $d\sigma$ ein Oberflächenelement. Die Potentialfunction eines Magnets besteht demnach aus zwei Theilen. Der erste stellt das Potential einer Masse dar, die mit der Dichte h einen Raum ausfüllt, der zweite ist das Potential einer Masse, die mit der Dichte k auf der Oberfläche des Magnets gelagert ist.

7) Entwickeln wir

$$\frac{1}{r} = [(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2]^{-\frac{1}{2}}$$

und setzen dieses Resultat in 4), so folgt

$$V = k\,\frac{lx + my + nz}{a^3} + \frac{P}{a^5} + \frac{Q}{a^7} + \cdots$$

Für grosse Entfernungen wird

$$V = \frac{k \cos \varepsilon}{a^2},$$

wobei ε derjenige Winkel ist, den die magnetische Axe mit der Richtung von a macht. Dieses ist aber der Ausdruck von 2), daher kann jeder Magnet bei grösserer Entfernung durch einen Elementarmagnet ersetzt werden.

8) Alle bisherigen Entwickelungen galten für permanente Magnete im weiteren Sinne des Wortes, wir haben noch die magnetische Induction zu berücksichtigen.

Es sei V das Potential der magnetisirenden Kräfte in Bezug auf einen Punkt mit den Coordinaten (x, y, z), seien ferner α, β, γ

die magnetischen Momente in diesem Punkte, bezogen auf Volumeinheit, so sind diese Grössen eindeutig bestimmt durch

$$\alpha = \varkappa \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad \beta = \varkappa \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad \gamma = \varkappa \frac{\partial \varphi}{\partial z},$$

wobei $\varkappa$ die Magnetisirungsconstante des Eisens bezeichnet. (Theorie von Poisson.) Ausserdem müssen folgende Gleichungen für alle Punkte der Eisenmasse erfüllt werden:

$$0 = V + \varphi + U$$

$$U = -\varkappa \int \frac{dw}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial n},$$

wobei dw ein Oberflächenelement des Eisens, n die nach innen gerichtete Normale auf dw und r die Entfernung dieses Elementes von jenem Punkte der Eisenmasse, auf welchen U sich bezieht.

Die Function φ bestimmt den magnetischen Zustand des Körpers und ist aus diesen Gleichungen zu bestimmen.

Indessen ist der Werth von $\varkappa$, den wir hier als constant betrachtet haben, von der Intensität der magnetisirenden Kraft abhängig. Die für diesen Fall veränderte Form der obigen Gleichungen findet man in: Kirchhoff's Gesamm. Abhandl., S. 217, entwickelt. Ueber die erweiterte Weber'sche Theorie siehe Maxwell: Treatise Nr. 444.

9) Da die Erde selbst magnetisch wirkt, so erzeugt sie ein magnetisches Feld. Wir nennen nun diejenige Kraft, welche an einem Orte auf den Magnetpol Eins ausgeübt wird, die magnetische Intensität oder die Intensität des magnetischen Feldes an diesem Orte. An den gewöhnlichen Magnetnadeln kommt nur die horizontale Componente dieser Kraft zur Wirkung, die sogenannte horizontale Intensität H.

Um sie zu bestimmen, beobachtet man die Schwingungsdauer einer Magnetnadel und die Ablenkung durch einen Magnet. Sei

t die auf unendlich kleine Bogen reducirte Schwingung in Secunden,

K das Trägheitsmoment des Magnets,

θ das Torsionsverhältniss des Fadens,

M das magnetische Moment des schwingenden Magnets,

so wird

$$MH = \frac{\pi^2 K}{t^2(1+\theta)}.$$

Seien φ, φ_1 die Ablenkungen in den Entfernungen r und r_1, so wird

$$\frac{M}{H} = \frac{1}{2} \frac{r^5 tg\,\varphi - r_1^5 tg\,\varphi_1}{r^2 - r_1^2}.$$

Näheres in Kohlrausch: Praktische Physik, V. Auflage, IX. Abschnitt.

Um die beobachtete Schwingungszeit T (wenn α der halbe Schwingungswinkel ist) auf unendlich kleine Bogen zu reduciren, hat man

$$t = \frac{T}{\left(1 + \frac{\alpha^2}{16}\right)} = T\left(1 - \frac{\alpha^2}{16}\right).$$

10) Sei H die horizontale Intensität des Erdmagnetismus, φ der Ablenkungswinkel, M das magnetische Moment des Stabes, r, r_1 die halben Längen des Stabes und der Nadel, sowie e die Entfernung ihrer Mitten. Wir nehmen ferner an, dass die Magnetnadel die Richtung der erdmagnetischen Kraft hat, so sind die einfachsten Ablenkungen folgende:

I. Stab senkrecht zum magnetischen Meridian, seine Richtung geht durch die Mitte der Nadel (Fig. 21):

$$tg\,\varphi = \frac{2M}{He^3}\left\{1 + \frac{2r^2 - (3 - 15 \sin^2\varphi) r_1^2}{e^2} + \cdots\right\}.$$

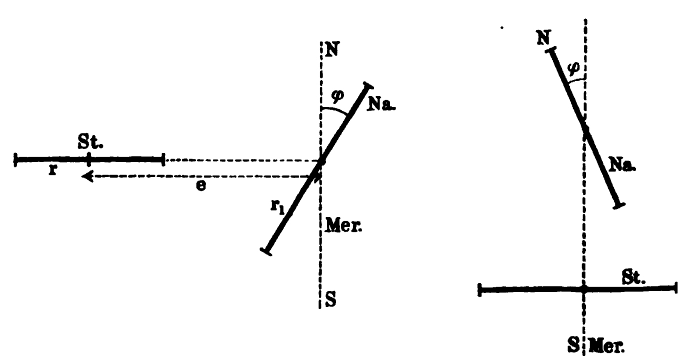


Fig. 21. Fig. 22.

II. Stab senkrecht zum magnetischen Meridian, sein Mittelloth durch die Mitte der Nadel gehend (Fig. 22):

$$tg\,\varphi = \frac{M}{He^3}\left\{1 - \frac{3}{2} \frac{r^2 - (4 - 15 \sin^2\varphi) r_1^2}{e^2} + \cdots\right\}.$$

III. Stab senkrecht zur abgelenkten Nadel auf ihrem Mittellothe liegend (Fig. 23):

$$\sin\varphi = \frac{2M}{He^3}\left\{1 + \frac{2r^2 - 3r_1^2}{e^2} + \dots\right\}.$$

Fig. 23.

Fig. 24.

IV. Nadel senkrecht zum Stab auf dessen Mittellothe liegend (Fig. 24):

$$\sin\varphi = \frac{M}{He^3}\left\{1 - \frac{3}{2}\frac{r^2 - 4r_1^2}{e^2} + \dots\right\}.$$

Vergl. Lamont: Handbuch des Erdmagnetismus (1849), III. und IV. Abschn. Vergl. auch dessen Handbuch des Magnetismus (1867). F. Neumann: Vorlesungen über die Theorie des Magnetismus (1881). Jenkin Fleeming: Elektricität und Magnetismus, d. v. Exner (1880). Für die Schwingungen die nöthigen Formeln in Zech: Elektrisches Formelbuch (1883).

§. 209.

Die Elektricität als Energie.

1) Die Summe aller durch eine elektrische Entladung hervorgebrachten Wirkungen ist gleich der dabei eingetretenen Abnahme des Potentials der gesammten Elektricität auf sich selbst.

Es ist also die Energie der Entladung gegeben durch

$$W = \frac{1}{2}\int V dm.$$

Sei V constant, so wird

$$W = \frac{1}{2} V Q = \frac{1}{2} C V^2 = \frac{Q^2}{2C},$$

wobei Q die Elektricitätsmenge bezeichnet und C die Capacität.

Für zwei parallele Ebenen wird für eine Fläche S, deren Dichte gleich $\varkappa$ ist

$$W = \frac{1}{2} S \varkappa (V_1 - V_2),$$

oder wenn $V_2 = 0$, also abgeleitet,

$$W = \frac{1}{2} S \varkappa V_1 = \frac{1}{2} Q_1 V_1$$

wie oben. Für zwei Kugelflächen bei kleinem Abstande e

$$W = \frac{1}{2} e \frac{Q_1^2}{r_1^2}.$$

Für zwei Cylinder bei der Länge l und dem ebenfalls kleinen Abstande e

$$W = e \frac{Q_1^2}{r_1 l}.$$

2) Die Arbeit W, welche in einem beliebigen Stücke eines vom stationären Strome durchflossenen Leiters während der Zeiteinheit gethan wird, ist

$$W = - \varkappa \int V \frac{\partial V}{\partial n} d w,$$

dabei ist $\varkappa$ das Leitungsvermögen des Körpers und die Normale n ist nach innen positiv. Die dabei entwickelte Wärmemenge H ist gegeben durch

$$H = \frac{W}{E},$$

wobei E das mechanische Aequivalent der Wärme bezeichnet.

3) Sei J die Stromintensität, R der Widerstand, t die Zeit. so wird

$$W = J(V_1 - V_2) t$$

oder

$$W = R J^2 t,$$

(das Gesetz von Joule: Phil. Mag., Vol. XIX, 1841).

Für einen Draht von der Länge l, dem Querschnitt q und dem specifischen Widerstand s

$$W = J^2 \frac{l s}{q} t.$$

4) Sei U diejenige Wärmemenge, die bei einer chemischen Action frei wird, E das mechanische Wärmeäquivalent, J die Stromintensität, so wird

$$E\,U = J(V_1 - V_2),$$

oder allgemeiner

$$E\,\Sigma\,U = J\,\Sigma\,V.$$

5) Durch denselben galvanischen Strom werden äquivalente Mengen der Elektrolyse zersetzt und die Quantitäten der aus ihnen an beiden Elektroden abgeschiedenen Stoffe stehen gleichfalls im Verhältnisse ihrer Aequivalentgewichte.

Faraday's elektrolytisches Gesetz, Exp. Res., §. 377, 732, 783 (1833).

O p t i k.

§. 210.

Fundamentalgleichungen der Lichttheorie.

1) Sei λ die Wellenlänge, V die Fortpflanzungsgeschwindigkeit, T die Schwingungsdauer, so wird

$$\lambda = VT.$$

Die Bewegung des leuchtenden Punktes ist gegeben durch

$$\xi = a \cos 2\pi \left\{\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right\}$$

und die Geschwindigkeit

$$u = -a\frac{2\pi}{T} \sin 2\pi \left\{\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right\}.$$

Das Argument der trigonometrischen Function heisst die Phase.

Die Intensität des Lichtes ist proportional dem Mittelwerth des Quadrates der Geschwindigkeit, also proportional dem Quadrate der Amplitude, denn es ist:

$$\frac{1}{T}\int_0^T u^2 dt = \frac{1}{2}\left(\frac{2\pi a}{T}\right)^2.$$

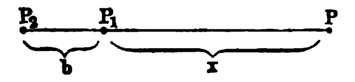
2) Schwingen

$$(P_1)\, \xi_1 = a_1 \cos 2\pi \left\{\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right\}$$

und

$$(P_2)\, \xi_2 = a_2 \cos 2\pi \left\{\frac{t}{T} - \frac{x+\delta}{\lambda}\right\}$$

Fig. 25.



derselben Richtung, so wird

$$(P)\,\xi = \xi_1 + \xi_2 = A \cos 2\pi \left\{\frac{t}{T} - \frac{x+D}{\lambda}\right\}$$

d

$$A^2 = a_1^2 + a_2^2 + 2\,a_1\,a_2 \cos 2\pi\,\frac{\delta}{\lambda}$$

$$A \cos \frac{D}{\lambda}\,2\pi = a_1 + a_2 \cos 2\pi\,\frac{\delta}{\lambda}$$

$$A \sin \frac{D}{\lambda}\,2\pi = a_2 \sin 2\pi\,\frac{\delta}{\lambda}.$$

Die Grösse $\frac{\delta}{\lambda}\,2\pi$ wird Verzögerungsphase genannt.

3) Seien ξ und η zwei Strahlen, deren Schwingungsrichtun-n auf einander senkrecht stehen und senkrecht zur gemein men Richtung $\xi\eta$. Sei

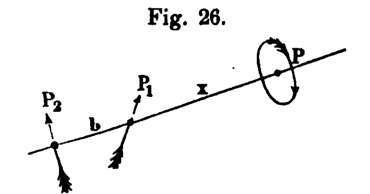


Fig. 26.

$$(P_1)\;\; \xi = a \cos 2\pi \left\{\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right\}$$

$$(P_2)\;\; \eta = b \cos 2\pi \left\{\frac{t}{T} - \frac{x+\delta}{\lambda}\right\},$$

so ist die vom Aethertheilchen beschriebene Curve

$$(P)\;\; \frac{\xi^2}{a^2} + \frac{\eta^2}{b^2} - \frac{2\,\xi\,\eta}{a\,b} \cos 2\pi\,\frac{\delta}{\lambda} = \sin^2 2\pi\,\frac{\delta}{\lambda}$$

lso eine Ellipse. Diese Curve geht in eine Gerade über, wenn

$$\delta = m\,\frac{\lambda}{2},$$

ınd in einen Kreis, wenn $a = b$ und ausserdem

$$\delta = (4\,m \pm 1)\,\frac{\lambda}{4}.$$

§. 211.

Interferenz.

Der Punkt in P' empfängt eine Erschütterung von

$$(P_1) = a \cos 2\pi \left\{\frac{t}{T} - \frac{E_1}{\lambda}\right\}$$

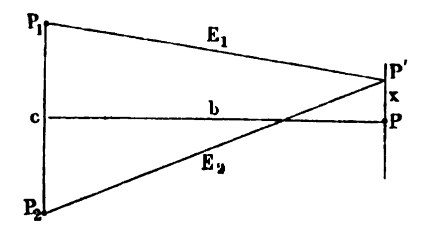
ron

$$(P_2) = a \cos 2\pi \left\{\frac{t}{T} - \frac{E_2}{\lambda}\right\}.$$

Daraus ergiebt sich die resultirende Intensität

$$4\,a^2 \cos^2 \frac{E_2 - E_1}{\lambda}\,\pi.$$

Fig. 27.



Es wird demnach für

$$E_2 - E_1 = 2\,n\,\frac{\lambda}{2} \text{ ein Maximum}$$

$$E_2 - E_1 = (2\,n + 1)\,\frac{\lambda}{2} \text{ ein Minimum}$$

der Helligkeit sein. Man hat aber

$$E_1^2 = b^2 + \left(\frac{1}{2}\,c - x\right)^2$$

$$E_2^2 = b^2 + \left(\frac{1}{2}\,c + x\right)^2,$$

also

$$E_1 - E_2 = \frac{c}{b}\,x$$

mit genügender Annäherung. Die Entfernung zweier Frangen ist:

$$d = \frac{b}{c}\,\lambda = \frac{\lambda}{tgn\,i}.$$

Sei λ_1 die Wellenlänge einer Farbe an einer Stelle, wo ein Maximum der Helligkeit auftritt, so ist die dieser Stelle entsprechende Wegdifferenz

$$\delta = 2\,n\,\frac{\lambda_1}{2}.$$

An dieser Stelle kann aber für eine Wellenlänge λ_2 ein Minimum sein, also

$$\delta = (2\,n + 1)\,\frac{\lambda_2}{2}.$$

Wir finden

$$\lambda_1 - \lambda_2 = \frac{\lambda_1}{2\,n + 1}.$$

Diese Differenz wird kleiner, je grösser n ist. Es werden viele Farben an jenen Stellen ein Maximum und viele ein Minimum geben, ihre Vermischung giebt weisses Licht, welches aber, prismatisch zerlegt, ein Spectrum mit dunklen Streifen giebt. Es fehlen jene Strahlengattungen, für welche

$$\delta = (2n + 1)\frac{\lambda}{2},$$

d. h. die Wegdifferenz gleich einem ungeraden Vielfachen der halben Wellenlänge ist.

Wird die eine Oeffnung mit einer Platte von der Dicke Δ und der Wellenlänge λ_1 bedeckt, so werden, wenn r die Entfernung der beiden Punkte von der gemeinschaftlichen Lichtquelle bezeichnet, die Impulse sein:

$$a \cos 2\pi \left\{\frac{t}{T} - \frac{r + E_2}{\lambda}\right\}$$

$$a \cos 2\pi \left\{\frac{t}{T} - \frac{r - \Delta + E_1}{\lambda} - \frac{\Delta}{\lambda_1}\right\}.$$

Demnach treten Maxima auf für

$$E_2 - E_1 - \Delta\left\{\frac{\lambda}{\lambda_1} - 1\right\} = 2m\frac{\lambda}{2}$$

und Minima für

$$E_2 - E_1 - \Delta\left\{\frac{\lambda}{\lambda_1} - 1\right\} = (2m + 1)\frac{\lambda}{2}.$$

Daraus ergiebt sich als Verschiebung des centralen Streifens:

$$x_0 = \frac{b}{c}\Delta\left\{\frac{\lambda}{\lambda_1} - 1\right\}$$

oder

$$x_0 = \frac{d\Delta}{\lambda}\left\{\frac{n_1}{n} - 1\right\}.$$

Diese Gleichungen liefern uns ein Mittel zur Bestimmung einer geringen Aenderung des Brechungsquotienten.

Mit Hülfe der Interferenz lassen sich die sogenannten Newton'schen Farbenringe erklären. Es besitze der einfallende Strahl die Amplitude a, der reflectirte $a r$, der hineingehende $a d$, der von der Unterseite reflectirte $a d \varrho$, endlich der an der Oberseite austretende $a d \varrho \delta$. Sei ferner Δ die Dicke der Platte, sowie λ_1 die der Platte entsprechende Wellenlänge, so wird, wenn wir die Strahlen von einer Ebene parallel der Lamelle und in der Entfernung x rechnen und die Länge der austretenden Strah-

len bis zu dieser Ebene mit y bezeichnen, der Impuls eines oben austretenden Strahles

$$= a\,d\,\varrho\,\delta \cos 2\pi \left\{\frac{t}{T} - \frac{x+y}{\lambda} - \frac{2\varDelta}{\lambda_1}\right\}$$

und des mit ihm zusammenfallenden oben reflectirten

$$= a\,r \cos 2\pi \left\{\frac{t}{T} - \frac{x+y}{\lambda}\right\}.$$

Die Intensität des resultirenden Strahles wird

$$A^2 = a^2 \left\{r^2 + (d\,\varrho\,\delta)^2 + 2\,r\,d\,\varrho\,\delta \cos 2\pi \frac{2\varDelta}{\lambda_1}\right\}.$$

Nun ist aber (vergl. Neumann: Vorles. über theor. Optik, Vorl. IX):

$$r = -\varrho$$
$$r^2 + d\,\delta = 1,$$

also unter Vernachlässigung von r^4 (für Glas und Luft ist r = etwa $^1/_5$), so folgt:

$$A^2 = 4\,a^2\,r^2 \sin^2 2\pi \frac{\varDelta}{\lambda_1}.$$

Diese Formel gilt selbstverständlich nur für homogenes Licht. Es zeigen sich daher Lichtminima für

$$\varDelta = 2\,m \frac{\lambda_1}{4}, \quad m = 0, 1, 2, \ldots,$$

Lichtmaxima für

$$\varDelta = (2\,m + 1) \frac{\lambda_1}{4}, \quad m = 0, 1, 2, \ldots$$

Ebenso ist die schiefe Incidenz zu behandeln. Sei ψ der Incidenzwinkel, so werden für

$$\varDelta = \frac{2\,m}{\cos\psi} \frac{\lambda_1}{4}$$

Intensitätsminima, für

$$\varDelta = \frac{2\,m + 1}{\cos\psi} \cdot \frac{\lambda_1}{4}$$

Intensitätsmaxima auftreten. (Newton's Secantengesetz.)

Sei ϱ der Radius des Ringes, R der des Newton'schen Glases, so ist die Dicke

$$\varDelta = \frac{\varrho^2}{2\,R}.$$

§. 212.

Beugungserscheinungen.

A. Fraunhofer'sche oder teleskopische Diffractionserscheinungen. {Diffractionspunkt und Lichtpunkt auf derselben Seite des Schirmes.}

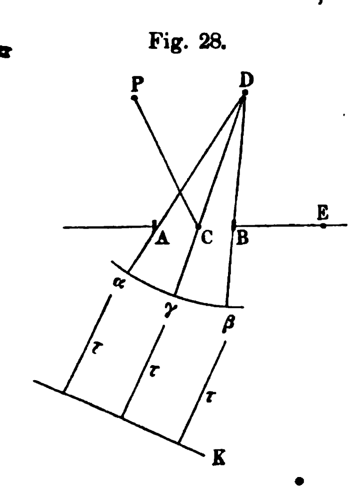


Fig. 28.

Sei D der Diffractionspunkt, P der Lichtpunkt, AB die Oeffnung. Ein Oeffnungselement $d\,a$ in C empfängt einen Lichtimpuls proportional mit

$$\cos 2\pi \left\{\frac{t}{T} - \frac{PC}{\lambda}\right\} d\,w$$

und sendet in der Richtung DC

$$\cos 2\pi \left\{\frac{t}{T} - \frac{PC}{\lambda} - \frac{C\gamma}{\lambda}\right\} d\,w.$$

Sei τ die Zeit, welche das Licht braucht, um von $\alpha\,\beta\,\gamma$ nach K zu gelangen, so wird die gesammte Bewegung

$$= k \int d\,w \cos 2\pi \left\{\frac{t - \tau}{T} - \frac{PC}{\lambda} - \frac{C\gamma}{\lambda}\right\}.$$

Sei E ein willkürlich angenommener Punkt um

$$PE = R, \quad PE - PC = \varDelta R$$
$$DE = R', \quad DE - DC = \varDelta R',$$

so wird, wenn wir die constanten Glieder mit ϑ bezeichnen, das Integral

$$k \int d\,w \cos 2\pi \left\{\vartheta + \frac{\varDelta R}{\lambda} - \frac{\varDelta R'}{\lambda}\right\}.$$

Sei E der Anfangspunkt des rechtwinkligen Coordinatensystems, dessen X- und Y-Axe im Beugungsschirm liegen, und seien die Coordinaten von

$$P : a,\ b,\ c$$
$$D : a',\ b',\ c'$$
$$C : x,\ y,\ 0,$$

sowie

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} = \cos A, \quad \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} = \cos B$$

$$\frac{a'}{\sqrt{a'^2+b'^2+c'^2}} = \cos A', \quad \frac{b'}{\sqrt{a'^2+b'^2+c'^2}} = \cos B',$$

so lässt sich das Integral schreiben

$$J = k^2(c^2+s^2),$$

wobei

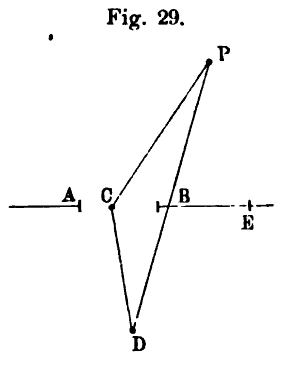
$$c = \int d\,w \cos 2\pi \left\{\frac{x[\cos A - \cos A'] + y[\cos B - \cos B']}{\lambda}\right\}$$

$$s = \int d\,w \sin 2\pi \left\{\frac{x[\cos A - \cos A'] + y[\cos B - \cos B']}{\lambda}\right\}.$$

B. Fresnel'sche Beugungserscheinungen oder die mikroskopischen Diffractionserscheinungen. {Diffractionspunkt und der leuchtende Punkt auf verschiedenen Seiten des Schirmes.}

Auf gleiche Weise wie früher ergiebt sich

Fig. 29.



$$I = k \int d\,w \cos 2\pi \left\{\frac{t}{T} - \frac{PC}{\lambda} - \frac{CD}{\lambda}\right\}$$

oder

$$PE - PC = \varDelta R$$
$$ED - CD = \varDelta R',$$

und die constanten Glieder gleich ϑ gesetzt:

$$I = k \int d\,w \cos 2\pi \left\{\vartheta + \frac{\varDelta R}{\lambda} + \frac{\varDelta R'}{\lambda}\right\}$$
$$= \varkappa \cos\vartheta \,.\, P - \varkappa \sin\vartheta \,.\, Q,$$

wobei

$$P = \int d\,w \cos 2\pi \left\{\frac{\varDelta R}{\lambda} + \frac{\varDelta R'}{\lambda}\right\}$$

$$Q = \int d\,w \sin 2\pi \left\{\frac{\varDelta R}{\lambda} - \frac{\varDelta R'}{\lambda}\right\}.$$

Die Intensität wird

$$J = \varkappa^2 \{P^2 + Q^2\}.$$

Sei die X-Axe die Projection von PE auf den Schirm. Y im Schirm senkrecht darauf, Z die Verticale auf die Schirmebene und die Coordinaten von

$$P : a \; 0 \; c$$
$$D : a' \; 0 \; c'$$
$$C : x \; y \; 0,$$

so wird, wenn

$$\frac{a}{\sqrt{a^2 + c^2}} = \cos A$$

gesetzt wird:

$$J = k^2 \{P^2 + Q^2\}$$

und

$$P = \int d w \cos \frac{\pi}{\lambda} (x^2 \sin^2 A + y^2) \left\{\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}\right\}$$

$$Q = \int d w \sin \frac{\pi}{\lambda} (x^2 \sin^2 A + y^2) \left\{\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}\right\}$$

$$R^2 = a^2 + c^2, \quad R'^2 = a'^2 + c'^2.$$

Damit sind die zwei Fundamental-Integrale für die zwei Arten der Beugungserscheinungen gegeben.

§. 213.

Die Wellenfläche.

1) Seien X, Y, Z die Componenten der durch die Verschiebung eines Molecüls erregten Elektricitätskraft und α, β, γ die Richtungswinkel der Verschiebung, so wird:

$$X = A \cos\alpha + F \cos\beta + E \cos\gamma$$
$$Y = F \cos\alpha + B \cos\beta + D \cos\gamma$$
$$Z = E \cos\alpha + D \cos\beta + C \cos\gamma.$$

Die Bedeutung der Grössen A, B, C, D, E, F giebt die Theorie der Elasticität.

2) Die Projection der Elasticitätskraft auf die Richtung der Verschiebung ist

$$- P = A \cos^2\alpha + B \cos^2\beta + C \cos^2\gamma$$
$$+ 2 D \cos\beta \cos\gamma + 2 E \cos\alpha \cos\gamma + 2 F \cos\alpha \cos\beta.$$

Denkt man sich von der Ruhelage des Molecüls auf die Richtung der verschiedenen Verschiebungen die Strecken

$$u = \frac{1}{\sqrt{P}}$$

aufgetragen, so wird der geometrische Ort der Endpunkte das Elasticitätsellipsoid genannt. Sei

$$\cos\alpha = \frac{x}{u}, \quad \cos\beta = \frac{y}{u}, \quad \cos\gamma = \frac{z}{u},$$

so ist seine Gleichung

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Dyz + 2Exz + 2Fxy + 1 = 0$$

Seien nun die Axen des Ellipsoids zugleich Axen des Coordinatensystems, so ist seine Gleichung

$$a^2x^2 + b^2y^2 + c^2z^2 = 1.$$

In der Lichttheorie Fresnel's sind a, b, c die Fortpflanzungsgeschwindigkeiten jener Schwingungen, welche parallel den drei Axen vor sich gehen.

3) Unter der Elasticitätsfläche wollen wir den Ort der Fusspunkte der Lothe vom Mittelpunkte auf die Tangentialebene des Elasticitätsellipsoids nennen.

Ihre Gleichung lautet

$$(x^2 + y^2 + z^2)^2 = a^2x^2 + b^2y^2 + c^2z^2.$$

4) Das Ellipsoid, dessen Gleichung durch

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

dargestellt ist, wird das zweite oder Ergänzungsellipsoid genannt. Legt man eine beliebige Ebene durch den Mittelpunkt dieses Ellipsoids, und trägt man vom Mittelpunkte aus auf der Normale dieser Ebene zwei Strecken ab proportional den Axen der Schnittellipse, so ist der geometrische Ort dieser Endpunkte die sogenannte Wellenfläche, eine Fläche vom vierten Grade und vierter Classe. Ihre Gleichung ist

$$(x^2 + y^2 + z^2)\,[a^2x^2 + b^2y^2 + c^2z^2] + a^2b^2c^2$$
$$= x^2a^2(b^2 + c^2) + y^2b^2(a^2 + c^2) + z^2c^2\,(a^2 + b^2).$$

Ist $a = b = c$, so wird

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2.$$

Ist $b = c$, so zerfällt die Fläche in

$$x^2 + y^2 + z^2 = b^2$$
$$a^2x^2 + b^2\,(y^2 + z^2) = a^2b^2,$$

d. h. in eine Kugel und ein Ellipsoid.

Man kann die obige Gleichung auch übersichtlicher schreiben wie folgt:

$$\frac{x^2a^2}{r^2 - a^2} + \frac{y^2b^2}{r^2 - b^2} + \frac{z^2c^2}{r^2 - c^2} = 0.$$

5) Man erhält für irgend einen Punkt der Wellenfläche die Schwingungsrichtung, wenn man den Radiusvector dieses Punktes auf die Tangentenebene desselben Punktes projicirt. Die Ebene, die den Radiusvector und die Schwingungsrichtung enthält, wird die Schwingungsebene genannt.

Nimmt man an, dass die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Lichtes gegeben ist durch

$$v = \sqrt{\frac{e}{d}},$$

wobei e die Elasticitätsconstante und d die Dichte des Aethers bezeichnet, so kann man folgende Annahmen machen: Es ist für verschiedene Medien

e variabel und d constant (Neumann)

oder

e constant und d variabel (Fresnel).

Im ersteren Falle fällt die Polarisationsebene mit der Schwingungsebene zusammen, im letzteren steht sie auf derselben senkrecht.

6) Sei die x-Axe der Axe eines einaxigen Krystalls parallel, so lautet die Gleichung der Wellenflächen für diesen Körper:

$$x^2 + y^2 + z^2 = b^2$$
$$a^2 x^2 + b^2(y^2 + z^2) = a^2 b^2.$$

Dabei ist b die Fortpflanzungsgeschwindigkeit des ordentlichen, a jene des ausserordentlichen Strahles. Seien n und n' die zugehörigen Brechungsexponenten, so wird

$$b = \frac{1}{n}, \quad a = \frac{1}{n'}.$$

Ist $b > a$ also $n < n'$, so nennt man die Krystalle attractiv (nach Biot) oder positiv (nach Fresnel), im anderen Falle repulsiv oder negativ.

Sei ϱ die Fortpflanzungsgeschwindigkeit eines ausserordentlichen Strahles, der um den Winkel λ gegen die Hauptaxe geneigt ist, so besteht die Beziehung

$$\frac{1}{b^2} - \frac{1}{\varrho^2} = \frac{a^2 - b^2}{a^2 b^2} \sin^2 \lambda.$$

Bezeichnet man mit α den Winkel zwischen der Polarisationsebene des einfallenden Strahles und dem Hauptschnitte, und mit

I, O, E die Intensitäten des einfallenden, ordentlich und ausserordentlich gebrochenen Strahles, so wird

$$O = I\cos^2\alpha$$
$$E = I\sin^2\alpha.$$

(Das Gesetz von Malus oder das Gesetz des Cosinusquadrates.)

7) Sei ein zweiaxiger Krystall gegeben. Die Wellenfläche ist dann von der allgemeinsten Form. Sei noch

$$a > b > c,$$

so wird x die Axe der grössten, y die der mittleren und z die der kleinsten Elasticität.

Die drei Grössen

$$\frac{1}{a}, \ \frac{1}{b}, \ \frac{1}{c}$$

heissen die Hauptbrechungsexponenten des Krystalls.

8) Es giebt vier Tangentenebenen, die die Wellenfläche in einer Curve berühren, diese sind gegeben durch die Gleichung

$$z = \pm \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{b^2 - c^2}}\, x \pm b \sqrt{\frac{a^2 - c^2}{b^2 - c^2}}.$$

Diese Curve ist ein Kreis und seine Ebene steht auf der optischen Axe des Krystalls senkrecht. (Innere conische Refraction). Die Wellenfläche besitzt vier singuläre Punkte, für welche, wenn ξ, η, ζ ihre Coordinaten sind,

$$\xi = \pm c \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2 - c^2}}, \quad \eta = 0, \quad \zeta = \pm a \sqrt{\frac{b^2 - c^2}{a^2 - c^2}}.$$

Die Tangenten in den Doppelpunkten bilden einen Kegel zweiter Ordnung, dessen Gleichung

$$\frac{\xi^2}{b^2 - c^2} - \frac{a^2 - c^2}{4a^2c^2}\eta^2 + \frac{\zeta^2}{a^2 - b^2} + \frac{(a^2 + c^2)\xi\zeta}{ac\sqrt{a^2 - b^2}\sqrt{b^2 - c^2}} = 0$$

ist, wenn die Coordinaten parallel mit sich selbst in den betreffenden Doppelpunkt verschoben angenommen werden (Aeussere conische Refraction).

Literatur. Beer: Einleitung in die höhere Optik, II. Aufl.. von V. v. Lang, 1882. Verdet: Vorlesungen über die Wellentheorie des Lichtes, deutsch von Exner, 1881 bis 1887. Ausführliche Literatur. Neumann: Vorlesungen über theor. Optik, herausgegeben von Dorn, 1885. Neumann: Vorlesungen über Elasticität, herausgegeben von Meyer, 1885.

§. 214.

Die Fehlerrechnung.

1) Kommt ein Fehler von der Grösse Δ gesetzlich p mal vor bei n Beobachtungen, so ist

$$\frac{p}{n}$$

die Wahrscheinlichkeit dieses Fehlers und man bezeichnet sie mit $\varphi(\Delta)$. Man hat

$$\varphi(\Delta) = \frac{h}{\sqrt{\pi}} e^{-h^2 \Delta^2},$$

wobei h das Maass der Präcision bezeichnet. Diejenigen ganzen Zahlen g, welche den Quadraten der Grössen h proportional sind, werden Gewichte der Beobachtungen genannt, und man hat

$$h_1^2 : h_2^2 = g_1 : g_2.$$

2) Die Wahrscheinlichkeit, dass der Beobachtungsfehler, absolut genommen, den Fehler x nicht überschreite, ist

$$w = \frac{2h}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-h^2 \Delta^2} d\Delta,$$

setzt man hier $h\Delta = t$, so wird

$$w = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^t e^{-t^2} dt.$$

3) Der Fehler, für welchen $w = \frac{1}{2}$ ist, wird der wahrscheinliche Fehler genannt, sei r dieser Fehler und

$$hr = \varrho,$$

so ist ϱ zu bestimmen aus

$$\frac{1}{2} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\varrho e^{-t^2} dt.$$

Man findet

$$hr = \varrho = 0{,}476936276$$

und es wird

$$t = \varrho \frac{\Delta}{r}.$$

4) Die Wahrscheinlichkeit, dass die Fehler

$$\Delta_1, \Delta_{2\,3} \ldots, \Delta_n$$

bei einer Beobachtungsreihe vollkommen, ist

$$W = h^n \left(\frac{d\Delta}{\sqrt{\pi}}\right)^n e^{-h^2 \Sigma \Delta^2 n}$$

bei gleichem h. Es ist nun dasjenige h das wahrscheinlichste, für welches W ein Maximum wird. Setzt man

$$\varepsilon = \sqrt{\frac{\Sigma \Delta_n^2}{n}},$$

so folgt:

$$\frac{1}{h} = \varepsilon \sqrt{2},$$

also

$$r = 0{,}6744897 \,.\, \varepsilon, \quad h = 0{,}7071068 \cdot \frac{1}{\varepsilon}.$$

Die Grösse ε wird der **mittlere Fehler** genannt. Es ist dieses derjenige Fehler, welcher, wenn derselbe bei allen Beobachtungen begangen wäre, dieselbe Summe der Fehlerquadrate gegeben hätte, als die wirklich stattfindende.

5) Die Anzahl der Fehler, welche zwischen

$$\frac{\Delta}{r} \text{ und } \frac{\Delta}{r+1}$$

liegen, ist bei n Beobachtungen nach der Theorie

$$n \left\{ w_{\frac{\Delta}{r}} - w_{\frac{\Delta}{r+1}} \right\}.$$

Sollen die Beobachtungen und die ihnen zugetheilten Voraussetzungen verwendbar sein, so muss dieselbe Zahl auch nahezu durch die Beobachtung erreicht werden, sonst sind die Beobachtungen zu verwerfen, was auch dann geschehen muss, wenn

$$\frac{\Delta}{r} > 5.$$

Eine Tafel für w mit dem Argumente $\frac{\Delta}{r}$ findet sich am Schlusse dieses Paragraphs.

6) Seien α_x die n Werthe der Messung einer Grösse x, so wird

$$x - \alpha_x = \Delta_x.$$

Seien ferner h_x die Präcisionen und g_x die Gewichte, so folgt

$$x = \frac{\Sigma \alpha h^2}{\Sigma h^2} = \frac{\Sigma \alpha g}{\Sigma g}.$$

Das Maass der Präcision ist

$$H = \sqrt{\Sigma h^2}$$

nd der wahrscheinliche Fehler von x

$$R = \frac{\varrho}{\sqrt{\Sigma h^2}}.$$

Für Beobachtungen von gleicher Güte ist

$$R = \frac{\varrho}{h\sqrt{n}} = \frac{r}{\sqrt{n}} = \frac{0{,}6744897}{\sqrt{n}} \cdot \varepsilon.$$

Um die wahrscheinlichen Grenzen von R, H und ε zu erialten, hat man diese Grössen mit

$$\left(1 - \frac{\varrho}{\sqrt{n}}\right) \text{ und } \left(1 + \frac{\varrho}{\sqrt{n}}\right)$$

u multipliciren.

7) Sind drei Winkel α, β, γ zu messen, für welche die Belingung

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^0$$

esteht, und man hat durch Beobachtung die Werthe

$$m,\ m',\ m''$$

rmittelt, so dass

$$\sigma = m + m' + m'' \gtrless 180^0,$$

o sind die wahrscheinlichsten Werthe

$$\alpha = m + \frac{180^0 - \sigma}{3},$$

$$\beta = m' + \frac{180^0 - \sigma}{3},$$

$$\gamma = m' + \frac{180^0 - \sigma}{3}.$$

8) Seien zwei Constanten a und b zu bestimmen, also

$$f = au + bv.$$

Man hat zur Bestimmung von a und b

$$a\Sigma u^2 + b\Sigma uv = \Sigma uf$$
$$a\Sigma uv + b\Sigma v^2 = \Sigma fv,$$

woraus

$$a = \frac{\Sigma v^2 . \Sigma uf - \Sigma uv . \Sigma vf}{\Sigma u^2 . \Sigma v^2 - (\Sigma uv)^2}$$

$$b = \frac{\Sigma u^2 . \Sigma vf - \Sigma uv . \Sigma uf}{\Sigma u^2 . \Sigma v^2 - (\Sigma uv)^2}.$$

Sei h die Präcision der Beobachtungen und H und H' die Präcisionsmaasse der Constanten a und b, so wird

$$H = h\sqrt{\frac{\Sigma u^2 . \Sigma v^2 - (\Sigma u v)^2}{\Sigma v^2}}$$

$$H' = h\sqrt{\frac{\Sigma u^2 . \Sigma v^2 - (\Sigma u v)^2}{\Sigma u^2}}.$$

Sei r der wahrscheinliche Fehler der Beobachtungen, und R, R' die wahrscheinlichen Fehler in der Bestimmung von a und b, so wird

$$R = r\sqrt{\frac{\Sigma v^2}{\Sigma u^2 . \Sigma v^2 - (\Sigma u v)^2}}$$

$$R' = r\sqrt{\frac{\Sigma u^2}{\Sigma u^2 . \Sigma v^2 - (\Sigma u v)^2}}.$$

9) Seien $N_1, N_2, N_3, \dots N_n$ beobachtete Werthe einer Function von s Variablen $x_1, x_2, \dots x_s$, also

$$N_x = f_x(x_1, x_2, x_3, \dots x_s),$$

und nehmen wir an, es sei $n > s$, so sind jene Werthe von $x_1, x_2, \dots x_s$ die wahrscheinlichsten, die, in die obigen Gleichungen eingesetzt, gewisse Werthe $M_1, M_2, M_3, \dots$ liefern, wobei

$$M_x = f_x(x_1, x_2, \dots x_s)$$

ist, für welche der Ausdruck

$$\Sigma (M_x - N_x)^2$$

ein Minimum wird. Dieses wird der Fall sein, wenn wir die unbekannten Werthe $x_1 x_2 \dots x_s$ bestimmen aus

$$\Sigma (M_x - N_x) \frac{d M_x}{d x_1} = 0$$

$$\dots\dots\dots\dots$$

$$\Sigma (M_x - N_x) \frac{d M_x}{d x_s} = 0.$$

Wir erhalten als den wahrscheinlichen Werth des mittleren Fehlers die Grösse

$$\pm\sqrt{\frac{\Sigma (M_x - N_x)^2}{n - s}}$$

und als den wahrscheinlichen Werth einer Beobachtung

$$\pm\, 0{,}67449\sqrt{\frac{\Sigma (M_x - N_x)^2}{n - s}}.$$

Für den mittleren zu befürchtenden Fehler ergiebt sich

$$\pm \sqrt{\frac{\Sigma (M_x - N_x)^2}{n(n-s)}}$$

und für den wahrscheinlichen Fehler des Resultates

$$\pm 0{,}67449 \sqrt{\frac{\Sigma (M_x - N_x)^2}{n(n-s)}}.$$

Man vergleiche Encke: Berliner Jahrbuch 1834, 35, 36. Oppolzer: Lehrbuch zur Bahnbestimmung. Gauss: Theoria motus, p. 205 etc.

$\frac{\Delta}{r}$	W	$\frac{\Delta}{r}$	W
0,1	0,054	2,6	0,921
0,2	0,107	2,7	0,931
0,3	0,160	2,8	0,941
0,4	0,213	2,9	0,950
0,5	0,264	3,0	0,957
0,6	0,314	3,1	0,963
0,7	0,363	3,2	0,969
0,8	0,411	3,3	0,974
0,9	0,456	3,4	0,978
1,0	0,500	3,5	0,982
1,1	0,542	3,6	0,985
1,2	0,582	3,7	0,987
1,3	0,619	3,8	0,990
1,4	0,655	3,9	0,991
1,5	0,688	4,0	0,993
1,6	0,719	4,1	0,994
1,7	0,748	4,2	0,995
1,8	0,775	4,3	0,996
1,9	0,800	4,4	0,997
2,0	0,823	4,5	0,998
2,1	0,843	4,6	0,998
2,2	0,862	4,7	0,998
2,3	0,879	4,8	0,999
2,4	0,895	4,9	0,999
2,5	0,908	5,0	0,999

§. 215.

Allgemeine Bezeichnungen und Abkürzungen.

d Tag.
h Stunde.
m Minute.
s Secunde.
° Grad.
′ Minute.
″ Secunde.
☊ Aufsteigender } Knoten.
☋ Niedersteigender } Knoten.
☌ Conjunction.
□ Quadratur.
☍ Opposition.
♈ Widder.
♉ Stier.
♊ Zwillinge.
♋ Krebs.
♌ Löwe.
♍ Jungfrau.
♎ Wage.
♏ Scorpion.
♐ Schütze.
♑ Steinbock.
♒ Wassermann.
♓ Fische.

Wochentage:
☉ Sonntag.
☾ Montag.
♂ Dienstag.
☿ Mittwoch.
♃ Donnerstag.
♀ Freitag.
♄ Samstag.

● Neumond.
☽ Erstes Viertel.
○ Vollmond.
☾ Letztes Viertel.

☉ Sonne.
☾ Mond.
☿ Mercur.
♀ Venus.
♁ Erde.
♂ Mars.
♃ Jupiter.
♄ Saturn.
♅ Uranus.
♆ Neptun.

Das Zeichen ♈ des Widders wird auch für den Frühlingspunkt (Aequinoctialpunkt) benutzt, d. h. für denjenigen Durchschnittspunkt der Ekliptik mit dem Himmelsäquator, in welchen die Sonne im Frühlingsanfang gelangt.

Ist die Bezeichnung eines Sternes nöthig, so gilt
✱ für Stern,

☄ für Komet (oft auch für einen Planeten überhaupt).

Kleinere Planeten pflegt man einfach zu zählen und mit

① ② ③ . . .

zu bezeichnen. Das Namensverzeichniss findet man im Berliner Jahrbuche.

Es bezeichne

h die Höhe des Sternes,

z die Zenithdistanz, $z = 90^0 - h$,

a das Azimuth (vom Südpunkte über West von 0^h bis 24^h oder 0^0 bis 360^0 zu zählen),

φ die Polhöhe (geographische Breite),

$\varphi + \psi = 90^0$,

φ' die geocentrische Polhöhe,

δ die Declination,

P, ND die Nordpoldistanz (vom Nordpol aus von 0^0 bis 180^0 zu zählen),

AR, α die Rectascension (vom Frühlingspunkte aus von West gegen Ost zu zählen),

t den Stundenwinkel (d. h. den Aequatorbogen zwischen dem Meridian und dem Declinationskreise; vom Meridian aus im Sinne der täglichen Bewegung, d. h. von Süd über West zu zählen),

θ die Sternzeit (d. h. den Stundenwinkel des Frühlingspunktes),

p den parallaktischen Winkel (d. h. den Winkel zwischen dem Höhen- und Declinationskreise),

η den Winkel zwischen dem Declinations- und Breitekreise im Dreiecke. Pol des Aequators, Pol der Ekliptik, Stern,

$E = 90 - \eta$,

ε die Schiefe der Ekliptik,

β die geocentrische Breite,

λ die geocentrische Länge (d. h. den Winkel zwischen dem Breitekreise und dem Frühlingspunkte), von 0^0 bis 360^0 von West gegen Ost zu zählen.

b die heliocentrische Breite,

l „ „ Länge.

Für die Sonne schreibt man

$$\delta_{\odot},\ \alpha_{\odot},\ h_{\odot}\ \ldots \text{ oder auch } \odot AR.$$

§. 216.

rundformeln für die Verwandlung der äquatorealen Coordinaten, in horizontale und umgekehrt.

$$t = \theta - \alpha$$
$$h + z = 90^0$$
$$\sin\delta = \sin\varphi \sin h - \cos\varphi \cos h \cos a$$
$$\cos\delta \sin t = \cos h \sin a$$
$$\cos\delta \cos t = \sin h \cos\varphi + \cos h \sin\varphi \cos a,$$

ir logarithmische Rechnung:

$$\sin h = m \cos M$$
$$\cos h \cos a = m \sin M$$
$$\sin\delta = m \sin(\varphi - M)$$
$$\cos\delta \sin t = \cos h \sin a$$
$$\cos\delta \cos t = m \cos(\varphi - M)$$
$$tg\, M = ctg\, h \,.\, \cos a$$
$$tg\, t = \frac{\sin M}{\cos(\varphi - M)}\, tg\, a$$
$$tg\, \delta = \cos t \,.\, tg(\varphi - M).$$

Umkehrung der Grundformeln:

$$\sin h = \sin\varphi \sin\delta + \cos\varphi \cos\delta \cos t$$
$$\cos h \sin a = \cos\delta \sin t$$
$$\cos h \cos a = -\cos\varphi \sin\delta + \sin\varphi \cos\delta \cos t,$$

der für die logarithmische Rechnung:

$$\sin\delta = n \sin N$$
$$\cos\delta \cos t = n \cos N$$
$$\sin h = n \cos(\varphi - N)$$
$$\cos h \sin a = \cos\delta \sin t$$
$$\cos h \cos a = n \sin(\varphi - N)$$
$$tg\, N = tg\, \delta \sec t$$
$$tg\, a = \frac{\cos N}{\sin(\varphi - N)}\, tg\, t$$
$$tg\, h = \cos a \,.\, ctg\,(\varphi - N).$$

Gauss'sche Formeln.

$$\cos {}^1\!/_2 z \sin {}^1\!/_2 (a - p) = \sin {}^1\!/_2 t \sin {}^1\!/_2 (\varphi + \delta)$$
$$\cos {}^1\!/_2 z \cos {}^1\!/_2 (a - p) = \cos {}^1\!/_2 t \cos {}^1\!/_2 (\varphi - \delta)$$
$$\sin {}^1\!/_2 z \sin {}^1\!/_2 (a + p) = \sin {}^1\!/_2 t \cos {}^1\!/_2 (\varphi + \delta)$$
$$\sin {}^1\!/_2 z \cos {}^1\!/_2 (a + p) = \cos {}^1\!/_2 t \sin {}^1\!/_2 (\varphi - \delta).$$

Differentialausdrücke.

$$dh = \cos p \,.\, d\delta - \cos a \,.\, d\varphi - \cos\delta \sin p \,.\, dt$$
$$\cos h \, da = \sin p \,.\, d\delta - \sin a \sin h \,.\, d\varphi + \cos\delta \cos p \, dt$$
$$d\delta = \cos p \,.\, dh + \cos t \,.\, d\varphi + \cos h \sin p \,.\, da$$
$$\cos\delta \, dt = - \sin p \,.\, dh + \sin t \sin\delta \,.\, d\varphi + \cos h \cos p \,.\, da.$$

Führt man z statt h, und P statt δ, so wird:

$$\cos z = \cos P \cos\psi + \sin P \sin\psi \cos t$$
$$\sin z \cos a = - \cos P \sin\psi + \sin P \cos\psi \cos t$$
$$\sin z \sin a = \sin P \sin t.$$

Führt man den parallaktischen Winkel p ein, so wird:

$$\cos z = \cos P \cos\psi + \sin P \sin\psi \cos t$$
$$\sin z \cos p = \sin P \cos\psi - \cos P \sin\psi \cos t$$
$$\sin z \sin p = \sin\psi \sin t.$$

Man hat die Differentialformel:

$$dz = - \cos a \, d\psi + \cos p \, dP + \sin\psi \sin P \, dt$$
$$\sin z \, dp = \sin a \, d\psi - \sin p \cos z \, dP + \sin\psi \cos a \, dt$$
$$\sin z \, da = \sin a \cos z \, d\psi - \sin p \, dP + \sin P \cos p \, dt$$

Ferner wird:

$$\sin P \sin\psi + \cos P \cos\varphi \cos t = \sin a \sin p + \cos a \cos p \cos z$$
$$\cos p = \cos a \cos t + \sin a \sin t \cos\psi$$
$$\cos z \sin p = \sin a \cos t - \cos a \sin t \cos\psi$$
$$\sin t \cos P = - \cos a \sin p + \sin a \cos p \cos z$$
$$\sin^2 z \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = \sin P \cos p \sin\psi \cos a$$
$$\sin^2 z \frac{\partial^2 a}{\partial t^2} = - \sin P \sin p \,\{2 \sin\psi \cos\alpha + \cos P \sin z\}$$
$$\sin^2 z \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = - \sin\psi \sin a \,\{2 \sin P \cos p - \cos\psi \sin z\}$$
$$\frac{\partial^2 t}{\partial z^2} = - \frac{\cot a \cot p}{\sin a \sin z} \operatorname{cosec}\psi = - \frac{\cot a \cot p}{\sin\psi \sin P \sin t}.$$

Hat man für eine **bestimmte** Polhöhe viele Declinationen und Rectascensionen in Höhen und Azimuthe zu verwandeln oder umgekehrt, so rechnet man mit dem Argument t die Hülfsgrössen:

$$\sin\varphi \; tg\, t = tg\, A$$
$$ctg\,\varphi \cos t = tg\, B$$
$$\sin B \; tg\, t = ctg\,\varphi \sin A = E$$
$$E = tg\,\vartheta$$
$$C = \sin\vartheta$$
$$D = \cos\vartheta.$$

Diese werden folgender Gestalt in Tafel gebracht:

t in Zeit	A als Winkel	B als Winkel	$\log C$	$\log D$	$\log E$

In dieser Tafel sind die Azimuthe immer kleiner als 180° zu nehmen, indem sie vom Südpunkte entweder über West oder Ost gerechnet werden. Für t gelten bei dieser Zählweise folgende Beziehungen:

$$t < 6^h \qquad A, \quad B,\ C,\ D,\ E$$
$$12^h - t < 6^h \quad 180 - A, \ -B,\ C,\ D,\ E.$$

Mit Hülfe dieser Tafel lassen sich sofort folgende Aufgaben lösen:

I. **Aus α und δ ist h und a zu rechnen.**

Man bestimmt sich t aus

$$t = \theta - \alpha.$$

Sodann ist:

$$tg\, u = C\, tg\,(B + \delta)$$
$$\sin h = D \sin(B + \delta)$$
$$a = A + u.$$

Man hat ferner:

$$tg\, h = \frac{1}{E} \sin u$$
$$tg\, p = \frac{E}{\cos(B + \delta)}$$
$$tg\, h = \cos p \; tg\,(B + \delta).$$

II. Das umgekehrte Problem. Als Argument der Tafel wird nicht mehr der Stundenwinkel, sondern das in Zeit verwandelte Azimuth genommen.

Es ist

$$\begin{aligned} \sin\delta &= D\sin(h - B) \\ tg\, u' &= C\, tg(h - B) \\ t &= A - u' \\ \alpha &= \theta - A + u' \\ tg\,\delta &= \frac{1}{E}\sin u'. \end{aligned}$$

(Formeln von Gauss, mitgetheilt in Schumachers Hülfstafeln 1845, S. 135.)

§. 217.

Abgeleitete Formeln für horizontale und äquatoriale Coordinaten.

Azimuth.

$$tg\, a = \frac{\cos N\, tg\, t}{\sin(\varphi - N)} = \frac{\sin t}{\sin\varphi\cos t - \cos\varphi\, tg\,\delta}$$

$$= -\frac{ctg\,\delta\sec\varphi\sin t}{1 - ctg\,\delta\, tg\,\varphi\cos t}$$

$$\sin a = \frac{\cos\delta\sin t}{\sin z}$$

$$\cos a = \frac{\sin\varphi\cos z - \sin\delta}{\cos\varphi\sin z} = tg\,\varphi\, ctg\, z - \frac{\sin\delta}{\cos\varphi\sin z}$$

$$tg\,{}^1\!/_2\, a = \sqrt{\frac{\sin(S-\varphi)\cos(S-z)}{\cos S\sin(S-\delta)}},\ \text{wobei } 2S = \varphi + \delta + z$$

$$\sin{}^1\!/_2\, a = \sqrt{\frac{\sin(S-\varphi)\cos(S-z)}{\cos\varphi\sin z}}$$

$$\cos{}^1\!/_2\, a = \sqrt{\frac{\cos S\sin(S-\delta)}{\cos\varphi\sin z}}.$$

Zenithdistanz.

$$tg\, z = \frac{tg(\varphi - N)}{\cos a}$$

$$\sin z = \frac{\cos\delta\sin t}{\sin a}$$

$$\cos z = \cos(\varphi \backsim \delta) - 2\cos\varphi\cos\delta\sin^2{}^1\!/_2\, t$$

$$\sin^2{}^1\!/_2\, z = \sin^2{}^1\!/_2(\varphi \backsim \delta) + \cos\varphi\cos\delta\sin^2{}^1\!/_2\, t.$$

Setzt man

$$n = \sin {}^1/_2 (\varphi \sim \delta)$$

$$tg\,\lambda = \frac{\sqrt{\cos\varphi\ bos\,\delta}}{n} \sin {}^1/_2 t,$$

› wird

$$\sin {}^1/_2 z = \frac{n}{\cos\lambda}$$

$$\sin {}^1/_2 z = \frac{\sqrt{\cos\varphi \cos\delta}}{\sin\lambda} \sin {}^1/_2 t.$$

Stundenwinkel.

$$tg\,t = \frac{\cos h \sin a}{m \cos(\varphi - M)}$$

$$\sin t = \frac{\cos h \sin a}{\cos\delta}$$

$$\cos t = \frac{m\cos(\varphi - M)}{\cos\delta} = \frac{\sin h - \sin\varphi \sin\delta}{\cos\varphi \cos\delta}$$

$$tg\,{}^1/_2 t = \sqrt{\frac{\sin(S-\varphi)\sin(S-\delta)}{\cos S \cos(S-z)}}, \text{ wenn } 2S = \varphi + \delta + z$$

$$\sin {}^1/_2 t = \sqrt{\frac{\sin(S-\varphi)\sin(S-\delta)}{\cos\varphi\cos\delta}}$$

$$= \sqrt{\frac{\sin {}^1/_2 (H-h) \cos {}^1/_2 (H+h)}{\cos\varphi\cos\delta}}, \text{ wenn } \varphi - \delta = 90 - H$$

$$\cos {}^1/_2 t = \sqrt{\frac{\cos S \cos(S-z)}{\cos\varphi\cos\delta}}$$

$$in^2\,{}^1/_2 t = \frac{\cos(\delta - \varphi) - \cos z}{\cos\varphi\cos\delta}.$$

Parallaktischer Winkel.

Ist

$$\cos\varphi \cos t = s \sin S$$
$$\sin\varphi = s \cos S,$$

o wird

$$tg\,p = \frac{\cos\varphi \sin t}{s\cos(\delta + S)}$$

$$\sin p = \frac{\cos\varphi \sin t}{\cos h} = \frac{\cos\varphi \sin a}{\cos\delta}$$

$$\cos p = \frac{s\cos(\delta + S)}{\cos h} = \frac{\cos\delta \sin\varphi - \sin\delta\cos\varphi\cos t}{\cos h}$$

$$= \frac{\sin\varphi - \sin\delta\cos z}{\cos\delta \sin z} = \sin\varphi \sin a \sin t + \cos a \cos t.$$

§. 218.

Grundformeln für die Verwandlung der äquatoreal Coordinaten in ekliptische und umgekehrt.

$$\sin\beta = -\cos\delta\sin\alpha\sin\varepsilon + \sin\delta\cos\varepsilon$$
$$\cos\beta\sin\lambda = \cos\delta\sin\alpha\cos\varepsilon + \sin\delta\sin\varepsilon$$
$$\cos\beta\cos\lambda = \cos\delta\cos\alpha.$$

Für logarithmische Rechnung:

$$\sin\delta = q\sin Q$$
$$\cos\delta\sin\alpha = q\cos Q$$
$$\sin\beta = q\sin(Q-\varepsilon)$$
$$\cos\beta\sin\lambda = q\cos(Q-\varepsilon)$$
$$\cos\beta\cos\lambda = \cos\delta\cos\alpha$$

Aus diesen folgt:

$$tg\,Q = \frac{tg\,\delta}{\sin\alpha}$$
$$tg\,\lambda = \frac{\cos(Q-\varepsilon)}{\cos Q}\,tg\,\alpha$$
$$tg\,\beta = tg(Q-\varepsilon)\sin\lambda$$

Hierzu kommen noch folgende Proben (Tietjen, Berl. Astr. Jahrb. 1879, S. 2):

$$\frac{\cos(Q-\varepsilon)}{\cos Q} = \frac{\cos\beta\sin\lambda}{\cos\delta\sin\alpha}$$
$$\cos\beta\sin(\lambda-\alpha) = 2q\cos\alpha\sin\frac{\varepsilon}{2}\sin\left(Q-\frac{\varepsilon}{2}\right)$$
$$\sin\frac{\delta-\beta}{2} = q\sec\frac{\delta+\beta}{2}\sin\frac{\varepsilon}{2}\cos\left(Q-\frac{\varepsilon}{2}\right)$$

Umkehrung der Grundformeln.

$$\sin\delta = \cos\beta\sin\lambda\sin\varepsilon + \sin\beta\cos\varepsilon$$
$$\cos\delta\sin\alpha = \cos\beta\sin\lambda\cos\varepsilon - \sin\beta\sin\varepsilon$$
$$\cos\delta\cos\alpha = \cos\beta\cos\lambda.$$

Für logarithmische Rechnung:

$$\cos\beta\sin\lambda = r\cos R$$
$$\sin\beta = r\sin R$$
$$\sin\delta = r\sin(R+\varepsilon)$$

$$\cos\delta\sin\alpha = r\cos(R+\varepsilon)$$
$$\cos\delta\cos\alpha = \cos\beta\cos\lambda,$$

ler:

$$tg\,R = \frac{tg\,\beta}{\sin\lambda}$$
$$tg\,\alpha = \frac{\cos(R+\varepsilon)}{\cos R}\,tg\,\lambda$$
$$tg\,\delta = \sin\alpha\,tg(R+\varepsilon).$$

Man hat ausserdem:

$$tg\,\alpha = \cos\varepsilon\,tg\,\lambda - \frac{\sin\varepsilon}{\cos\lambda}\,tg\,\beta$$
$$tg\,\lambda = \cos\varepsilon\,tg\,\alpha + \frac{\sin\varepsilon}{\cos\alpha}\,tg\,\delta.$$

Dazu kommen noch die Differentialformeln:

$$\frac{\partial\alpha}{\partial\lambda} = \cos\varepsilon + \sin\varepsilon\,tg\,\delta\sin\alpha = \frac{\cos\beta}{\cos\delta}\cos S$$
$$\frac{\partial\alpha}{\partial\beta} = -\frac{\sin\varepsilon}{co\,\beta\cos\delta}\cos\alpha = -\frac{\sin S}{\cos\delta}$$
$$\frac{\partial\alpha}{\partial\varepsilon} = -\,tg\,\delta\cos\alpha$$
$$\frac{\partial\delta}{\partial\lambda} = \sin\varepsilon\cos\alpha = \cos\beta\sin S$$
$$\frac{\partial\delta}{\partial\beta} = \frac{\cos\varepsilon\cos\delta}{\cos\beta} + \frac{\sin\varepsilon\sin\delta}{\cos\beta}\sin\alpha = \cos S$$
$$\frac{\partial\delta}{\partial\varepsilon} = \sin\alpha,$$

wobei

$$\sin S = \sin\varepsilon\frac{\cos\alpha}{\cos\beta} = \sin\varepsilon\frac{\cos\lambda}{\cos\delta}$$
$$\frac{\partial\lambda}{\partial\alpha} = \cos\varepsilon - \sin\varepsilon\,tg\,\beta\sin\lambda = \frac{\cos\delta}{\cos\beta}\cos S$$
$$\frac{\partial\lambda}{\partial\delta} = \frac{\sin\varepsilon}{\cos\beta\cos\delta}\cos\lambda = \frac{\sin S}{\cos\beta}$$
$$\frac{\partial\lambda}{\partial\varepsilon} = tg\,\beta\cos\lambda$$
$$\frac{\partial\beta}{\partial\alpha} = -\sin\varepsilon\cos\lambda = -\cos\delta\sin S$$
$$\frac{\partial\beta}{\partial\delta} = \frac{\cos\varepsilon\cos\beta}{\cos\delta} - \frac{\sin\varepsilon\sin\beta}{\cos\delta}\sin\lambda = \cos S$$
$$\frac{\partial\beta}{\partial\varepsilon} = -\sin\lambda.$$

§. 219.

Formeln für den Meridian.

$z = \delta - \varphi$ Polarsterne. Obere Culmination
$z = 180 - (\varphi + \delta)$ „ Untere „
$z = \varphi - \delta$ Südsterne.
$a = t = 0$ Obere Culmination
$a = t = 180^0 = 12^h$ Untere „
$\alpha = \theta$ Obere „
$\alpha = \theta - 12^h$ Untere „
$\delta > \varphi$ Sterne culminiren nördlich vom Zenith
$\delta = \varphi$ „ „ im „
$\delta < \varphi$ „ „ südlich vom „
$P = \varphi - z$ Obere Culmination
$P = z - \varphi$ Untere „

§. 220.

Formeln für die Polhöhe (im Meridian).

$\varphi = \delta + z$ südlich vom Zenith
$\varphi = \delta - z$ obere Culm. } nördlich vom Zenith
$\varphi = (180 - \delta) - z$ untere „ }
$\varphi = {}^1/_2 (z - z_1) + {}^1/_2 (\delta + \delta_1)$ für zwei Sterne, von denen der eine südlich und der andere nördlich vom Zenith culminirt.

$\varphi = {}^1/_2 (h + h_1) + {}^1/_2 (P_1 - P)$

h, h_1 die Höhen eines Circumpolarsterns bei unterer und oberer Culmination, P_1 und P die Poldistanzen zu diesen Zeiten.

§. 221.

Culmination.

Es bezeichne Δt die Differenz zwischen dem Zeitpunkte des Durchganges durch den Meridian und dem Augenblicke, wo ein Gestirn mit veränderlicher Declination culminirt, so ist

$$\Delta t^s = \frac{d\delta}{dt} \cdot \frac{\sin(\varphi - \delta)}{\cos\varphi \cos\delta \,.\, 13\,500 \sin 1''},$$

$\frac{\delta}{t}$ ist die Declinationsänderung in der Minute.

Für einen Fixstern ist α die Sternzeit der Culmination und
es Meridiandurchganges.

§. 222.

Formeln für I. Vertical.

Setzt man

$$\sqrt{\sin(\varphi + \delta)} = \mu$$
$$\sqrt{\sin(\varphi - \delta)} = \nu,$$

o wird:

$$tg\, t = \frac{\mu\nu}{\cos\varphi \sin\delta} \qquad tg\, z = \frac{\mu\nu}{\sin\delta}$$

$$\sin t = \frac{\mu\nu}{\sin\varphi \cos\delta} \qquad \sin z = \frac{\mu\nu}{\sin\varphi}$$

$$\cos t = \frac{tg\,\delta}{tg\,\varphi} \qquad \cos z = \frac{\sin\delta}{\sin\varphi}$$

$$tg\,{}^1\!/_2 t = \frac{\nu}{\mu} \qquad tg\,{}^1\!/_2 z = \sqrt{\frac{tg\,{}^1\!/_2(\varphi - \delta)}{tg\,{}^1\!/_2(\varphi + \delta)}}$$

$$tg\, p = \frac{\cos\varphi}{\mu\nu}$$

$$\sin p = \frac{\cos\varphi}{\cos\delta}$$

$$\cos p = \frac{\mu\nu}{\cos\delta}$$

§. 223.

Formeln für die grösste Digression.

Setzt man

$$\sqrt{\sin(\delta + \varphi)} = \mu$$
$$\sqrt{\sin(\delta - \varphi)} = \varrho,$$

so wird:

$$tg\,t = \frac{\mu\,\varrho}{sin\,\varphi\,cos\,\delta} \qquad tg\,a = \frac{cos\,\delta}{\mu\,\varrho}$$

$$sin\,t = \frac{\mu\,\varrho}{cos\,\varphi\,sin\,\delta} \qquad cos\,a = -\frac{\mu\,\varrho}{cos\,\varphi}$$

$$cos\,t = \frac{tg\,\varphi}{tg\,\delta} \qquad sin\,a = -\frac{cos\,\delta}{cos\,\varphi}$$

$$tg\,z = \frac{\mu\,\varrho}{sin\,\varphi}$$

$$sin\,z = \frac{\mu\,\varrho}{sin\,\delta}$$

$$cos\,z = \frac{sin\,\varphi}{sin\,\delta}.$$

Die grösste Digression wird auch der stationäre Azimu
genannt.

Das Gestirn kommt in $\left\{\begin{array}{l}\text{ersten Vertical}\\ \text{Zenith}\\ \text{grösste Digression}\end{array}\right\}$ wenn $\left\{\begin{array}{l}\delta < \varphi\\ \delta = \varphi\\ \delta > \varphi\end{array}\right\}$ ist

§. 224.

Formeln für den Auf- und Untergang.

(Vergleiche Tafeln am Ende.)

A. Fixsterne (δ und α constant).

$$cos\,t_0 = -\,tg\,\varphi\;tg\,\delta \qquad cos\,a_0 = -\frac{sin\,\delta}{cos\,\varphi}$$

$$tg\,{}^1/_2\,t_0 = \sqrt{\frac{cos\,(\varphi - \delta)}{cos\,(\varphi + \delta)}} \qquad tg\,{}^1/_2\,a_0 = \sqrt{\frac{tg\,{}^1/_2\,(90 - \varphi + \delta}{tg\,{}^1/_2\,(90 - \varphi - \delta}}$$

Der Stundenwinkel und das Azimuth sind wegen Refracti
noch um

$$\varDelta\,t_0 = \frac{R}{cos\,\varphi\;cos\,\delta\;sin\,t_0},$$

$$\varDelta\,a_0 = \frac{tg\,\varphi}{sin\,a}\cdot R \quad (R \text{ genähert} = 140 \text{ Sec.}),$$

wo R die Refraction am Horizont bezeichnet, zu corrigiren.

Der absolute Werth von t_0 wird der halbe Tagebog
genannt.

Sei α die Rectascension des Sternes, so wird

$$\left.\begin{array}{l}\alpha - t_0\\ \alpha + t_0\end{array}\right\} \text{ die Sternzeit des } \left\{\begin{array}{l}\text{Aufganges}\\ \text{Unterganges.}\end{array}\right.$$

Ist $-\delta > 90 - \varphi$, so gehen die Sterne nie auf,
$+\delta > 90 - \varphi$, „ „ „ „ „ unter.

Die Entfernung der Sterne vom Ost- resp. Westpunkte im ugenblicke des Auf- resp. Unterganges pflegt man die Morgen- sp. Abendweite zu nennen.

In der älteren Zeit unterschied man folgende Aufgänge:

A. Den kosmischen, wenn der Stern zugleich mit der onne aufgeht.

B. Den akroniktischen, wenn der Stern beim Ein- ritt der Nacht aufgeht.

C. Den heliakischen, wenn der Stern etwas früher auf- eht als die Sonne, so dass er eben noch in der Sonnennähe esehen werden kann.

D. Den hesperischen, wenn der Aufgang beim Unter- ang der Sonne stattfindet.

Für die Beurtheilung resp. Berechnung der historischen Auf- nd Untergänge hat man zu nehmen:

Aus φ und δ des Sternes den halben Tagebogen τ, dann wird

$$\theta_1 = \alpha - \tau$$
$$\theta = \alpha + \tau$$

ie Sternzeit des Auf- resp. Unterganges.

Mit

$$\theta,\ \varphi \text{ und } \varepsilon$$

ε Schiefe der Ekliptik) berechne man die Länge und Breite des eniths (θ ist = Rectascension, φ der Declination des Zeniths).

Seien diese

L und B für Aufgang
l „ b „ Untergang,

ınd bestimme für den Sehbogen h (d. h. die Anzahl der Grade, vie tief die Sonne unter dem Horizonte stehen muss, damit ein Stern bestimmter Grösse gesehen wird) d. h. für

$$h = 11^0 + x \,.\, 1^0,$$

vobei x die Sternklasse bezeichnet, die Correctionen

$$\sin \Delta L = \sin h \sec B$$
$$\sin \Delta l = \sin h \sec b.$$

Dann wird der Grad der Ekliptik, in welchem die Sonne stehen muss, um die verschiedenen Arten der Auf- und Unter- gänge zu bewirken:

Beim wahren Aufgang.

$\odot = L + 90^0$: für Ortus cosmicus, bei (Petav Uranol. Lib. I., can. XV) ἑῴα συναvατc ἀληθινή (bei Ptolomaeus Sonne im wa ren östlichen Horizont).

$\odot = L + 90^0 + \Delta L$: für ortus heliacus ἑῴα προαναv φαινομενή (Sonne h^0 unter dem ö lichen Horizont).

$\odot = L - 90^0$: für ortus acronychus ἑσπερια συ νατολή ἀληθινή (Sonne im wahı westlichen Horizont).

$\odot = L - 90^0 - \Delta L$: ἑσπερια επανατολή φαινομενή (Sonne unter dem westlichen Horizont).

Beim wahren Untergang des Sternes.

$\odot = l - 90^0$: Occasus acronychus ἑσπερια συγκα δυσις ἀληθινή (Sonne im wahren we lichen Horizont).

$\odot = l - 90^0 - \Delta l$: Occasus heliacus ἑσπερια επικα δυσις φαινομενή (Sonne h^0 unter de westlichen Horizont).

$\odot = l + 90^0$: Occasus cosmicus ἑῴα συγκατα δυ ἀληθινή (Sonne im wahren östlich Horizont).

$\odot = l + 90^0 + \Delta l$: ἑῴα προδυσις φαινομενή (Sonne h^0 unt dem östlichen Horizont).

Für die Uebertragung der auf 1800 bezogenen α und δ ein Sternes auf eine Zeit t zwischen den Jahren + 1700 bis — 20 entnehme man der Tafel VI die Argumente

$$A \quad A' \quad \vartheta$$

für das betreffende Jahr und rechne:

$$tg\, N = \frac{tg\, \delta}{cos(\alpha + A)}$$

$$tg(\alpha' + A) = tg(\alpha + A)\, \frac{cos\, N}{cos(N + \vartheta)}$$

$$tg\, \delta' = tg(N + \vartheta)\, cos(\alpha' + A').$$

α' und δ' sind die Rectascension und Declination des treffenden Sternes zur Zeit t.

Zur Controlle diene:

$$\frac{\cos\delta}{\cos\delta'}\cdot\frac{\cos(\alpha + A)}{\cos(\alpha' + A')} = \frac{\cos N}{\cos(N + \vartheta)}.$$

Für jeden Stern S, dessen Declination kleiner ist als die eequatorhöhe des Ortes, giebt es im Horizonte zwei Punkte $o\,o'$ on der Beschaffenheit, dass der Flächeninhalt des Dreieckes $o\,s\,o'$ onstant bleibt. (Lexell, Acta Acad. Petrop. 1781, p. 125.) iese constante Fläche F ist gleich

$$tg\,{}^1/_4 F = \sqrt{\frac{tg\,{}^1/_2(90 - \varphi - \delta)}{tg\,{}^1/_2(90 + \varphi - \delta)}}.$$

§. 225.

Die Dämmerung.

Sei

τ die Dauer der Dämmerung,

$90 + c$ die Zenithdistanz der Sonne am Anfang oder Ende,

t_0 der Stundenwinkel der Sonne beim Auf- oder Untergang, so ist

$$-\sin c = \sin\varphi\,\sin\delta + \cos\varphi\,\cos\delta\,\cos(t_0 + \tau).$$

Setzt man also

$$H = 90^0 - \varphi + \delta,$$

o wird

$$\sin{}^1/_2(\tau + t_0) = \sqrt{\frac{\sin{}^1/_2(H + c)\cos{}^1/_2(H - c)}{\cos\varphi\,\cos\delta}}.$$

Die Dauer der kürzesten Dämmerung ist gegeben durch

$$\sin{}^1/_2\tau = \frac{\sin{}^1/_2 c}{\cos\varphi}.$$

Man hat für diesen Fall

$$\sin\delta = -tg\,{}^1/_2 c\,.\,\sin\varphi$$

$$\sin(t_0 + {}^1/_2\tau) = \frac{\cos{}^1/_2 c}{\cos\delta}.$$

Man pflegt für gewöhnlich folgende Dämmerungen zu unterheiden:

a) Die bürgerliche Dämmerung endigt, wenn die Sonne ch 6° unter dem Horizont befindet. Zu dieser Zeit erscheinen ie Sterne I. Grösse. Also $c = 6^0$.

Nachstehende Tafel giebt Monat für Monat die Dauer der ürgerlichen Dämmerung für die Breite φ.

φ	Januar	Februar	März	April	Mai	Juni	Juli	August	September	October	November	D[illegible]
0	m	m	m	m	m	m	m	m	m	m	m	[illegible]
42	33	31	30	31	34	36	35	32	30	30	32	[illegible]
43	33	31	30	31	35	37	36	32	30	30	33	[illegible]
44	34	32	31	32	35	38	37	33	31	31	33	[illegible]
45	35	32	31	33	36	39	38	34	32	32	34	[illegible]
46	35	33	32	33	37	40	38	35	32	32	34	[illegible]
47	36	34	32	34	38	41	39	36	33	34	35	[illegible]
48	37	34	33	35	39	43	41	36	33	34	36	[illegible]
49	38	35	34	36	40	44	42	37	34	34	37	[illegible]
50	39	36	34	36	41	45	43	38	35	35	38	[illegible]
51	40	37	35	37	43	47	44	39	36	36	39	[illegible]

b) Die **astronomische Dämmerung** endigt, wenn sic[illegible] die Sonne 18° unter dem Horizonte befindet. Also $c = 18°$.

Datum	φ	35°	40°	45°	50°	55°	60°	65°
		h m	h m	h m	h m	h m	h m	h m
Januar	1	1,32	1,39	1,48	2,01	2,19	2,48	3,42
"	16	1,30	1,37	1,46	1,58	2,14	2,39	3,22
"	31	1,28	1,34	1,43	1,54	2,09	2,30	3,03
Februar	15	1,26	1,32	1,40	1,50	2,04	2,23	2,51
März	2	1,25	1,31	1,39	1,49	2,03	2,21	2,49
"	17	1,26	1,32	1,40	1,51	2,05	2,25	2,58
April	1	1,27	1,34	1,43	1,55	2,13	2,41	3,35
"	16	1,31	1,39	1,49	2,05	2,30	3,22	—
Mai	1	1,35	1,45	1,59	2,21	3,07	—	—
"	16	1,41	1,53	2,11	2,47	—	—	—
"	31	1,45	2,00	2,25	3,45	—	—	—
Juni	15	1,48	2,05	2,35	—	—	—	—
"	30	1,48	2,04	2,34	—	—	—	—
Juli	15	1,45	1,59	2,23	3,25	—	—	—
"	30	1,40	1,51	2,09	2,41	—	—	—
August	14	1,34	1,44	1,57	2,18	2,58	—	—
"	29	1,30	1,38	1,49	2,04	2,27	3,12	—
September . . .	13	1,27	1,34	1,43	1,55	2,12	2,38	3,26
" . . .	28	1,25	1,32	1,40	1,50	2,05	2,25	2,56
October	13	1,25	1,31	1,39	1,49	2,03	2,21	2,48
"	28	1,26	1,33	1,40	1,51	2,05	2,24	2,52
November . . .	12	1,28	1,35	1,43	1,54	2,09	2,31	3,04
" . . .	27	1,30	1,37	1,46	1,58	2,15	2,40	3,24
December . . .	12	1,32	1,39	1,48	2,01	2,19	2,48	3,44
" . . .	27	1,32	1,39	1,49	2,01	2,20	2,49	3,47

§. 226.

Berechnung der kleinsten scheinbaren Distanz zweier Himmelskörper.

Man rechne Stunde für Stunde die Distanzen s aus

$$tg\,\chi = \frac{\alpha_1 - \alpha}{\delta_1 - \delta} \sqrt{\cos\delta \cos\delta_1}$$

$$s = \frac{\delta_1 - \delta}{\cos\chi}.$$

Denkt man sich die so erhaltenen Werthe in der Form

$$s = s_0 + t\,\Delta s + \frac{t(t-1)}{1 \,.\, 2}\,\Delta^2 s$$

dargestellt, so wird s Minimum für

$$t = -\frac{\Delta s - {}^1\!/_2\,\Delta^2 s}{\Delta^2 s}$$

Für dieses t kann man aus der vorhergehenden Formel das zugehörige s berechnen.

Berechnung der Distanz überhaupt.

Man hat

$$\cos\Delta = \cos P \cos P' + \sin P \sin P' \cos(\alpha - \alpha')$$

oder auch

$$tg\,\frac{\Delta}{2} = \sqrt{\frac{\sin^2 m \sin^2 n + \sin^2 q \cos^2 n}{\cos^2 m \sin^2 n + \cos^2 q \cos^2 n}}$$

wobei

$$2m = P + P'$$
$$2q = P' - P$$
$$2n = \alpha' - \alpha$$

P ist die Poldistanz, α die Rectascension, oder

$$\cos\Delta = \sin h \sin h' + \cos h \cos h' \cos(a' - a).$$

§. 227.

Bestimmung von Poldistanz und Rectascension eines Gestirnes durch Messung der Abstände von anderen.

Seien

$$\Delta_3 \quad \Delta_2 \quad \Delta_3 \,\ldots\,.$$

die gemessenen Abstände der Sterne,

$$\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \alpha_3 \ldots .$$
$$P_1 \quad P_2 \quad P_3 \ldots .$$

von dem Stern, dessen

$$\alpha \text{ und } P$$

bestimmt werden soll.

Setzt man

$$x = \cos P$$
$$y = \sin P \cos \alpha$$
$$z = \sin P \sin \alpha$$

so wird:

$$\cos \Delta_k = x \, . \cos P_k + y \, . \sin P_k \cos \alpha_k + z \, . \sin P_k \sin \alpha_k.$$

Für $k = 2$, muss man zur Bestimmung von x, y, z noch die Relation

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

hinzufügen, sonst bei vielen Unbekannten wird die Methode der kleinsten Quadrate angewendet.

Diese Formel leistet wichtige Dienste bei der Bestimmung der Aequatorealcoordinaten aus den Beobachtungen alter Astronomen, die zumeist nur Distanzmessungen bestanden.

Bei drei Distanzen kann man rechnen wie folgt: Sei

$$A_1 = \sin P_3 \sin P_2 \sin(\alpha_3 - \alpha_2)$$
$$A_2 = \sin P_1 \sin P_3 \sin(\alpha_1 - \alpha_3)$$
$$A_3 = \sin P_2 \sin P_1 \sin(\alpha_2 - \alpha_1)$$
$$B_1 = \sin P_1 \{\cos \Delta_3 \cos P_2 - \cos \Delta_2 \cos P_3\}$$
$$B_2 = \sin P_2 \{\cos \Delta_1 \cos P_3 - \cos \Delta_3 \cos P_1\}$$
$$B_3 = \sin P_3 \{\cos \Delta_2 \cos P_1 - \cos \Delta_1 \cos P_2\}$$
$$L = \Sigma A_k \cos \Delta_k \qquad k = 1, 2, 3$$
$$M = \Sigma B_k \sin \alpha_k$$
$$N = \Sigma B_k \cos \alpha_k$$

so wird

$$tg \, \alpha = \frac{N}{M}$$
$$tg \, P = \pm \frac{\sqrt{M^2 + N^2}}{L}.$$

§. 228.

Berechnung des Ortes eines Gestirnes durch Allignements.

(Berl. Jahrb. 1821, S. 170, Bessel.)

Fundamentalgleichungen (Theoria Motus 113, Gauss):

$$0 = -tg\,\delta\,\sin(\alpha_2 - \alpha_1) + tg\,\delta_1\,\sin(\alpha - \alpha_2) + tg\,\delta_2\,\sin(\alpha_1 - \alpha)$$
$$0 = -tg\,\delta\,\sin(\alpha_4 - \alpha_3) + tg\,\delta_3\,\sin(\alpha - \alpha_4) + tg\,\delta_4\,\sin(\alpha_3 - \alpha)$$

oder wenn man

$$\alpha_1 + \alpha_2 = 2\,s \qquad \alpha_2 - \alpha_1 = 2\,d$$
$$\alpha_3 + \alpha_4 = 2\,s' \qquad \alpha_4 - \alpha_3 = 2\,d'$$

setzt

$$0 = tg\,\delta_1\,\sin(s - \alpha + d) - tg\,\delta\,\sin 2\,d + tg\,\delta_2\,\sin(\alpha - s + d)$$
$$0 = tg\,\delta_3\,\sin(s' - \alpha + d') - tg\,\delta\,\sin 2\,d' + tg\,\delta_4\,\sin(\alpha - s' + d').$$

Setzt man nun

$$u\,\sin v\,\sin w = \frac{\sin(\delta_1 - \delta_2)}{2\,\sin d\,\cos\delta_1\,\cos\delta_2}$$
$$u\,\cos v\,\sin w' = \frac{\sin(\delta_3 - \delta_4)}{2\,\sin d'\,\cos\delta_3\,\cos\delta_4}$$
$$u\,\sin v\,\cos w = \frac{\sin(\delta_1 + \delta_2)}{2\,\cos d\,\cos\delta_1\,\cos\delta_2}$$
$$u\,\cos v\,\cos w' = \frac{\sin(\delta_3 - \delta_4)}{2\,\cos d'\,\cos\delta_3\,\cos\delta_4}$$

so wird

$$tg\,\delta = u\,\sin v\,\cos(\alpha - s + w)$$
$$= u\,\cos v\,\cos(\alpha - s' + w')$$

und weiter

$$tg\,\{\alpha - {}^1/_2(s - w + s' - w')\} = ctg\,{}^1/_2(s - w - s' + w')\,tg\,(45^0 - v).$$

Hiermit ist $tg\,\alpha$ bestimmt. δ ergiebt sich aus den vorhergehenden Gleichungen. Hall giebt im astron. Journ. Bd. VIII, S. 143 für α einen anderen Ausdruck:

$$tg\,\alpha = \frac{(tg\,\delta_1\,\sin\alpha_2 - tg\,\delta_2\,\sin\alpha_1)\,\sin(\alpha_4 - \alpha_3)}{(tg\,\delta_1\,\cos\alpha_2 - tg\,\delta_2\,\cos\alpha_1)\,\sin(\alpha_4 - \alpha_3)}$$
$$+ \frac{(tg\,\delta_4\,\sin\alpha_3 - tg\,\delta_3\,\sin\alpha_4)\,\sin(\alpha_2 - \alpha_1)}{(tg\,\delta_4\,\cos\alpha_3 - tg\,\delta_3\,\cos\alpha_4)\,\sin(\alpha_2 - \alpha_1)}.$$

§. 229.

Die Zeit.

Es sind

$$366\,.\,24\,2201 \text{ Sterntage} = 365\,.\,24\,2201 \text{ mittlere Sonnentage},$$

$$\begin{aligned} 1 \text{ Sterntag} &= \frac{365\,.\,24\,2201}{366\,.\,24\,2201} \text{ Sonnentage} \\ &= 0{,}99726957 \quad " \\ &= 1^d - 3^m\,55^s{,}909 \text{ Sonnenzeit} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 1 \text{ Sonnentag} &= \frac{366\,.\,24\,2201}{365\,.\,24\,2201} \text{ Sterntage} \\ &= 1{,}00273791 \quad " \\ &= 1^d + 3^m\,56^s{,}555 \text{ Sternzeit} \end{aligned}$$

Sei

$$\mu = 1{,}00273791$$

und I^S ein Sternzeitintervall, I^M ein mittlerer Zeitintervall, so ist

$$I^S = \mu\, I^M = I^M + 0{,}00273791\; I^M$$

$$I^M = \frac{1}{\mu} I^S = I^S - 0{,}00273043\; I^S.$$

Für die Verwandlung der Zeitintervalle kann man sich am besten der Tafeln I und II bedienen.

Man unterscheidet

θ Sternzeit,
M Mittlere (Sonnenzeit),
W Wahre Sonnenzeit.

Sei θ^m die Sternzeit im mittleren Mittag, so ist

$$M = \{\theta - \theta^m\}\, \frac{24^h - 3^m\,55^s{,}909}{24^h}$$

$$\theta = \theta^m + M\, \frac{24^h + 3^m\,56^s{,}555}{24^h}$$

oder

$$M = (\theta - \theta^m)\,\frac{1}{\mu}$$

$$\theta = \theta^m + M\mu.$$

Sei ferner

Z die Zeitgleichung,

so ist

$$Z = M - W.$$

Die wahre Sonnenzeit = Stundenwinkel der Sonne.

Wahre Zeit + Rectascension der Sonne = Sternzeit.

Sei ferner $\Delta\lambda$ die Längendifferenz in Zeit vom Normalmeridian der Ephemeride + westlich — östlich, so wird

Ortszeit = N Meridianzeit — Längendifferenz
N Meridianzeit = Ortszeit + Längendifferenz.

Sei ferner $\Delta\lambda'$ der Betrag von $\Delta\lambda$ in Sternzeitintervall, so wird

$\varDelta = \Delta\lambda' - \Delta\lambda$ = Sternzeit im mittleren Ortsmittag weniger Sternzeit im Normalmeridian.

Man hat also nachstehende Formeln: Die für den Ort geltenden Grössen seien mit dem Index o, jene für den Ephemeridenmeridian mit dem Index n bezeichnet:

$$\theta_o = \theta_n^m + \varDelta + \vartheta.$$

ϑ ist die seit dem mittleren Mittag verflossene mittlere Sonnenzeitdauer verwandelt in Sternzeitdauer (Taf. I):

$$M_o = \{\theta_o - (\theta_n^m + \varDelta)\}.$$

Dabei ist der Klammerausdruck { } in mittleren Zeitintervall zu verwandeln (Taf. II).

Sei α die Rectascension eines Sternes, so ist der Stundenwinkel

$$t = \theta - \alpha,$$

also ist für $t = o$, d. h. im Meridian obere Culmination

$$\theta = \alpha.$$

Bürgerliches Datum = astron. von Mittag bis Mitternacht
" " = " vermehrt um 1 } von Mitternacht
Astronomisches " = bürg. vermindert " 1 } bis Mittag.

Bessel hat als Jahresanfang jenen Moment gewählt, in welchem die mittlere Länge der Sonne = 280° oder $\alpha_{\odot} = 18^h 40^m$. Er zählt in diesem Moment

Januar 0,0

und nennt das in diesem Moment beginnende Jahr das fingirte Jahr annus fictus.

Für jenen Meridian, in welchem aus 0 Januar im mittleren Mittag die mittlere Länge der Sonne gleich 280° ist, fällt das fingirte Jahr mit dem bürgerlichen zusammen. Dieser Meridian wird der Hauptmeridian genannt.

Die Lage des Hauptmeridians bezogen auf den Pariser Meridian ist gegeben durch:

$$k = 0{,}289886 + 0{,}00779967\,(t - 1850) + 0{,}000000034424\,(t - 1850)^2 - {}^1/_4 f$$

oder

$$k = 6^h\,57^m\,26^s{,}13 + (11^m\,13^s{,}8872)\,(t - 1850) + 0^s{,}002974\,(t - 1850)^2 - f\,.\,6^h,$$

dabei ist t die Jahreszahl in julianischen Jahren,
f der Rest der Division der Jahreszahl durch 4,
k die Lage des Hauptmeridians bezogen auf Paris.

Die mittlere Länge der Sonne im mittleren Mittag zu Paris ist:

$$M_P = 18^h\,41^m\,8^s{,}574 + 1^s{,}84504\,(t - 1850{,}0) + 0^s{,}00000814322\,(+ - 1850{,}0)^2 - 59^s{,}1388\,f.$$

Will man diese Länge für einen Ort, dessen Länge $\varDelta\lambda$ von Paris ist, so hat man

$$M_\lambda = M_P + \varDelta\lambda\,.\,9^s{,}85648$$

wobei $\varDelta\lambda$ in Theilen der Stunde hinzuzufügen ist.

In den Schaltjahren gilt dieser Werth für Januar 1,0.

Sternzeit im mittleren Mittag ist gleich (der Rectascension der mittleren Sonne = mittleren Länge) corrigirt wegen Nutation.

Jahreslängen.

Gregorianisches Jahr: $365^d{,}24250$.

Julianisches Jahr: $365^d{,}25000$.

Tropisches Jahr (chronologisches, Kalenderjahr, astronomisches Jahr), Länge nach Harkness (mittleres tropisches Jahr):

$$365^d{,}242199870 - 0^d{,}0000062124 \cdot \frac{t - 1850}{100}$$

$$365^d\,5^h\,48^m\,46^s{,}069 - 0^s{,}53675\,\frac{t - 1850}{100}$$

mittlere Sonnentage. Das tropische Jahr fängt nach Bessel an, wenn die mittlere Länge der Sonne weniger dem constanten Theil der Aberration (20″,48) den Werth 280° gezählt von dem betreffenden mittleren Aequinoctium annimmt. Es ist dieses die Zeit, in welcher die Sonne einen vollen Umlauf in Bezug auf den Frühlingspunkt vollendet. Die Länge des tropischen Jahres ändert sich von Jahr zu Jahr wegen der Nutation etc. bedeutend.

Siderisches Jahr (Sternjahr).

Länge nach Harkness $= 365^d,2563578$ mittl. Sonnentage
$= 365^d\,6^h\,9^m\,9^s,314$ „ „
$= 31\,558\,149^s,314$ „ „

Anfang der Jahreszeit.

Man hat

$$\tau = \frac{n - L}{L' - L} \cdot 24^h,$$

abei ist

$n = 360^0$ für den Frühling,
$n = 90^0$ „ „ Sommer,
$n = 180^0$ „ „ Herbst,
$n = 270^0$ „ „ Winter.

L und L' sind die Sonnenlängen der Tafeln, die der Grösse n im nächsten kommen.

§. 230.

Refraction.

Man hat nach der Tafel für Correction wegen Refraction:

Refr. = mittlere Refraction (Taf. XXI) . $A\,B$,

wobei A und B den Tafeln XXII und XXIII zu entnehmen sind.

Einfache Formeln für mittlere Refraction.

$$\text{Refr.} = 57'',717\, tg\, z \text{ (bis } 45^0)$$

$$\text{„} = \frac{57'',717\, tg\, z}{1 + 0,006364\, tg\, z} \text{ (bis } 80^0).$$

Man hat

wahre Höhe = beobachtete Höhe — Refr.,
„ Zenithdistanz = „ Zenithdistanz + Refr.

Nach Bessel: Tabulae Regiomontande wird die Refraction dargestellt durch

$$r = \alpha\, \beta^A\, \gamma^\lambda\, tg\, z,$$

wo $\alpha\,\beta\,A\,\gamma\,\lambda$ Coëfficienten sind. Die Factoren β und γ hängen vom Thermometer und Barometer ab.

Kimmtiefe.

Sei x die Höhe, gemessen in Erdradien, so ist

$$tg\, D = \sqrt{\frac{2\,x}{a}},$$

wobei D die Depression des Horizontes bezeichnet. Man hs
die Secunden, wenn x in Metern genommen wird,

$$D = 115'',61 \sqrt{x},$$

oder mit Berücksichtigung der Refraction

$$D = 106'',36 \sqrt{x}.$$

Auf der See ist von der Höhe eines Gestirnes neben de
Refraction auch die Kimmtiefe abzuziehen.

§. 231.

Geocentrische Breite und Radius vector.

(Vergleiche Taf. VII und VIII).

Sei ϱ die Polhöhe, φ' die geocentrische Breite und ϱ de
Radiusvector des Beobachtungsvectors, so ist

$$\varphi' - \varphi = -\frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} \sin 2\varphi + {}^1/_2 \left(\frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}\right)^2 \sin 4\varphi - \cdots$$

$$\varphi' - \varphi = -11' 30'',65 \sin 2\varphi + 1'',16 \sin 4\varphi - 0'',003 \sin 6\varphi + \cdots$$

a und b sind die grosse und kleine Axe des Erdsphäroides.

Sei

$$\frac{a - b}{a + b} = n,$$

so wird

$$\log \varrho = \log \left\{a \frac{1 + n^2}{1 + n}\right\} + (9,6377843) \left\{\left(\frac{2n}{1 + n^2} - n\right)\right\} \cos 2\varphi$$

$$- {}^1/_2 \left[\left(\frac{2n}{1 + n^2}\right)^2 - n^2\right] \cos 4\varphi$$

$$+ {}^1/_3 \left[\left(\frac{2n}{1 + n^2}\right)^2 - n^3\right] \cos 6\varphi \cdots$$

oder

$$\log \varrho = 9,9992747 + 0,0007271 \cos 2\varphi - 0,0000018 \cos 4\varphi + \cdots$$

Streng genommen ist

$$tg\, \varphi' = \frac{b^2}{a^2} tg\, \varphi,$$

sowie

$$\varrho = a \sqrt{\frac{\sec^2 \varphi'}{1 + tg\, \varphi\, tg\, \varphi'}} = a \sqrt{\frac{\cos \varphi}{\cos \varphi' \cos (\varphi' - \varphi)}}.$$

Von Hansen wurde noch die sogenannte excentrische
Polhöhe φ_1 eingeführt, für welche

$$tg\,\varphi_1 = \frac{a}{b}\,tg\,\varphi' = \frac{b}{a}\,tg\,\varphi.$$

Man findet

$$-\varphi = -5'45'',33\,sin\,2\varphi + 0'',29\,sin\,4\varphi - 0'',0003\,sin\,6\varphi + \cdots .$$

d

$$-\varphi = -n\,sin\,2\varphi + \tfrac{1}{2}n^2\,sin\,4\varphi - \tfrac{1}{3}n^3\,sin\,6\varphi + \cdots$$

§. 232.

Parallaxe.

Sei p die Höhenparallaxe,
ϱ der Radius Vector des Beobachtungsortes,
$\varDelta$ die Entfernung des Gestirnes vom Erdmittelpunkt,
z die auf der Erdoberfläche beobachtete Zenithdistanz,
φ' die geocentrische Polhöhe,
a Halbmesser des Aequators,

ist

$$sin\,p = \frac{\varrho}{\varDelta}\,sin\,z,$$

ird $z = 90^0$, so ist

$$sin\,p'' = \frac{\varrho}{\varDelta}$$

e Horizontalparallaxe und

$$sin\,p_1'' = \frac{a}{\varDelta}$$

ie Aequatoreal-Horizontalparallaxe.

a, ϱ, $\varDelta$ müssen in gleichen Einheiten genommen werden. Vird $a = 1$ für ϱ als Einheit und für $\varDelta$ die mittlere Erdentrnung, so ist

$$sin\,p = \frac{\pi\varrho}{\varDelta}\,sin\,1'' \quad \pi = 8'',80.$$

Sei noch

D der geocentrische, D' der scheinbare } Durchmesser des Gestirnes,

o hat man

θ Rectascension des Zeniths (gleich der Sternzeit),
L Länge des Zeniths, B Breite " " } (Nonagesimus),

o wird:

a) Für Länge und Breite.

$$n = \cos\beta \cos\lambda - \sin p \cos B \cos L$$

$$tg\,\lambda' = \frac{1}{n} (\sin\lambda \cos\beta - \sin p \sin L \cos B)$$

$$tg\,\beta' = \frac{1}{n} \cos\lambda' (\sin\beta - \sin p \sin B)$$

$$\sin D' = \frac{1}{n} \cos\lambda' \cos\beta' \sin D,$$

oder für

$$n_1 = \cos\lambda \cos\beta - \sin p \cos\varphi' \cos A$$

$$tg\,\lambda' = \frac{1}{n_1} \{\sin\lambda \cos\beta - \sin p\, [\sin\varphi' \sin\varepsilon + \cos\varphi' \cos\varepsilon \sin A]$$

$$tg\,\beta' = \frac{1}{n_1} \cos\lambda' \{\sin\beta - \sin p\, [\sin\varphi' \cos\varepsilon - \cos\varphi' \sin\varepsilon \sin A]$$

$$\sin D' = \frac{1}{n_1} \cos\lambda' \cos\beta' \sin D.$$

Genähert hat man

$$tg\,\gamma = \frac{tg\,B}{\cos(\lambda - L)}$$

$$\lambda' - \lambda = -\frac{p \cos B}{\cos\beta} \sin(L - \lambda)$$

$$\beta' - \beta = -\frac{p \sin B}{\sin\gamma} \sin(\beta - \gamma)$$

$$D' - D = \frac{p\, D \cos B}{\cos\beta} \cos(\lambda - L).$$

Die Grössen B und L kann man rechnen aus

$$\cos B \cos L = \cos\varphi' \cos\theta$$

$$\cos B \sin L = \cos\varphi' \sin\theta \cos\varepsilon + \sin\varphi' \sin\varepsilon$$

$$\sin B = -\cos\varphi' \sin\theta \sin\varepsilon + \sin\varphi' \cos\varepsilon,$$

oder man setze:

$$M \sin N = \sin\varphi'$$

$$M \cos N = \cos\varphi' \sin\theta,$$

so wird:

$$tg\,N = \frac{tg\,\varphi'}{\sin\theta}$$

$$tg\,L = \frac{\cos(N - \varepsilon)}{\cos N}\, tg\,\theta$$

$$tg\,B = tg(N - \varepsilon) \sin L.$$

θ ist die Sternzeit der Beobachtung,
ε die Schiefe der Ekliptik.

b) Für Azimuth und Höhe.

$$\frac{1}{n_2} = \cos a \cos h - \sin p \sin(\varphi - \varphi')$$
$$tg\, a' = n_2 \sin a \cos h$$
$$tg\, h' = n_2 \cos a' \{\sin h - \sin p \cos(\varphi - \varphi')\}$$
$$\sin D' = n_2 \cos a' \cos h' \sin D,$$

der genähert:

$$tg\,\gamma = \frac{cotg(\varphi - \varphi')}{\cos a}$$
$$a' - a = \frac{p \sin(\varphi - \varphi') \sin a}{\cos h}$$
$$h' - h = \frac{p \cos(\varphi - \varphi') \sin(h - \gamma)}{\sin \gamma}$$
$$D' - D = \frac{p D \sin(\varphi - \varphi') \cos a}{\cos h}.$$

Betrachtet man die Erde als Kugel und setzt $\varphi = \varphi'$ $a = a'$, so wird:

$$h - h' = p \cos h'$$
$$D' = D \frac{\cos h'}{\cos h}.$$

c) Rectascension und Declination.

$$\frac{1}{n_3} = \cos\alpha \cos\delta - \sin p \cos\theta \cos\varphi'$$
$$tg\,\alpha' = n_3 (\sin\alpha \cos\delta - \sin p \sin\theta \cos\varphi')$$
$$tg\,\delta' = n_3 (\sin\delta - \sin p \sin\varphi') \cos\alpha'$$
$$\sin D' = n_3 \cos\alpha' \cos\delta' \sin D,$$

oder genähert:

$$tg\,\gamma = \frac{tg\,\varphi'}{\cos(\alpha - \theta)}$$
$$\alpha' - \alpha = \frac{p \cos\varphi'}{\cos\delta} \sin(\alpha - \theta)$$
$$\delta' - \delta = \frac{p \sin\varphi'}{\sin\gamma} \sin(\delta - \gamma)$$
$$D' - D = \frac{p D \cos\varphi'}{\cos\delta} \cos(\alpha - \theta).$$

Für den Mond genügen die genäherten Formeln nicht, m
kann dann rechnen wie folgt: Sei

$$\cos M = \frac{\varrho \sin p \cos \varphi' \cos(\alpha - \theta)}{\cos \delta}$$

$$\sin N = \varrho \sin p \sin \varphi'$$

so wird:

$$tg(\alpha' - \alpha) = {}^1/_2 \frac{\varrho \cos \varphi' \sin p \sin(\alpha - \theta)}{\cos \delta \sin^2 {}^1/_2 M}$$

$$tg\, \delta' = \frac{\sin {}^1/_2 (\delta - N) \cos {}^1/_2 (\delta + N) \cos(\alpha' - \alpha)}{\cos \delta \sin^2 {}^1/_2 M}$$

$$D' = D \cdot \frac{{}^1/_2 \cos \delta' \cos(\alpha' - \alpha)}{\cos \delta \sin^2 {}^1/_2 M}.$$

§. 233.

Mondformeln.

Sei α die geocentrische Rectascension des Mondes,
δ „ „ Declination des Mondes,
s der scheinbare Halbmesser des Mondes,
p die Aequatorialhorizontalparallaxe des Mondes,
φ „ geographische Breite des Beobachtungsortes.

Horizontalparallaxe.

$$p' = p\,(1 - 0{,}00674 \sin^2 \varphi).$$

Parallaxe in Rectascension und Declination.

$$a = \cos \varphi' \frac{\sin p'}{\cos \delta}$$

$$ctg\, b = ctg\, \varphi' \cdot \frac{\cos(t + {}^1/_2 \Delta a)}{\cos {}^1/_2 \Delta a}$$

$$c = \sin \varphi' \frac{\sin p'}{\sin b},$$

so ist:

$$\sin 1'' . \Delta \alpha = -\left\{ a \sin t + \frac{a^2}{2} \sin 2t + \frac{a^3}{3} \sin 3t + \cdots \right\}$$

$$\sin 1'' . \Delta \delta = -\left\{ c \sin(b - \delta) + \frac{c^2}{2} \sin 2(b - \delta) + \frac{c^3}{3} \sin 3(b - \delta) + \cdots \right\}$$

t ist der Stundenwinkel des Mondes.

Zenithdistanz und der parallaktische Winkel.

Sei z die Zenithdistanz,

q der parallaktische Winkel,

$$\cos z = \sin \varphi \sin \delta' + \cos \varphi \cos \delta' \cos t'$$

oder

$$tg\, x = \cos t' \, ctg\, \delta'$$

$$\cos z = \sin \delta' \frac{\sin (x + \varphi)}{\cos x}$$

$$\sin q = \cos \varphi \frac{\sin t'}{\sin z}$$

oder

$$tg\, q = tg\, t' \frac{\sin y}{\cos (y + \delta')},$$

wobei

$$tg\, y = \cos \varphi \cos t'.$$

δ' und t' sind die wegen Parallaxe corrigirten Werthe von δ und t.

§. 234.

Aberration.

a) Tägliche Aberration.

$$\alpha' - \alpha = 0'',322 \cos \varphi \cos (\theta - \alpha) \sec \delta$$

$$\delta' - \delta = 0'',322 \cos \varphi \sin (\theta - \alpha) \sin \delta$$

$$0'',322 = \text{Lichtzeit} \times \text{Sonnenparallaxe} \times 15 \times f$$

$$f = \frac{366\,.\,2422}{365\,.\,2444}$$

$$\lambda' - \lambda = -\, 0'',343 \cos (\pi' - \lambda) \sec \beta$$

$$\beta' - \beta = -\, 0'',343 \sin (\pi' - \lambda) \sin \beta$$

$$\pi' = 280^0\, 21'\, 21'' + 61'',70\, (t_0 - 1850)$$

t_0 die Zeit in julianischen Jahren seit 1850.

b) Jährliche Aberration.

$$\alpha' - \alpha = -\, 20'',445\, \{\sin \odot \sin \alpha + \cos \odot \cos \alpha \cos \varepsilon\} \sec \delta$$
$$-\, 0'',000931 \sin 2 (\odot - \alpha) \sec^2 \delta$$

$$\delta' - \delta = +\, 20'',445\, [\{\sin \alpha \sin \delta \cos \varepsilon - \sin \delta \sin \varepsilon\} \cos \odot$$
$$-\cos \alpha \sin \delta \sin \odot] - 0'',000466 \cos 2 (\odot - \alpha)\, tg\, \delta$$

$$\lambda' - \lambda = -\, 20'',445 \cos (\odot - \lambda) \sec \beta$$
$$-\, 0'',0010133 \sin 2 (\odot - \lambda) \sec^2 \beta$$

$$\beta' - \beta = - 20'',445 \sin(\odot - \lambda) \sin\beta$$
$$- 0'',0005067 \cos 2(\odot - \lambda) \, tg\,\beta.$$

Für die Sonne ist in unserem Jahrhundert

$$\odot' - \odot = - 20'',445 - 0'',343 \cos(280^0 - \odot).$$

Um den Ort eines Planeten oder Kometen von der Aberra-tion zu befreien, ziehe man von der Beobachtungszeit t die Grösse $498^s,92\,\varrho$, wo ϱ die Entfernung des Himmelskörpers ist. a Dann ist:

$$T = t - 498^s,92\,\varrho$$

und der wahre Ort zur Zeit T identisch mit dem scheinbaren zur Zeit t.

Nach Chandler ist die Constante der Aberration gleich

$$20'',500.$$

§. 235.

Präcession.

Sei ε_0 die mittlere Schiefe der Ekliptik für 1850,
ε „ „ „ „ „ „ $1850 + t$,
ε_1 der Winkel zwischen dem Aequator und der festen Ekliptik für $1850 + t$,

so wird:

$$\varepsilon_0 = 23^0\,27'\,31'',47$$
$$\varepsilon = \varepsilon_0 - 0,46657\,(t_0 - 1850) - 0'',00000073\,(t_0 - 1850)^2$$
$$+ 0,00000641\,(t - t_0)^2$$
$$\varepsilon_1 = \varepsilon_0 - 0'',46657\,(t - 1850) - 0'',00000073\,(t_0 - 1850)^2$$
$$- \{0'',46657 + 0,00000146\,(t - 1850)\}\,(t - t_0)$$
$$- 0'',00000073\,(t - t_0)^2.$$

Sei ferner a die Präcession für die Planeten:

$$a = \{0'',13184 - 0'',00018656\,(t_0 - 1850)\}\,(t - t_0)$$
$$- 0'',00023653\,(t - t_0)^2$$

l die Linisolarpräcession,

l_1 die allgemeine Präcession,

$$l_1 = \{50'',35710 + 0,00004943\,(t_0 - 1850)\}\,(t - t_0)$$
$$- 0'',00010670\,(t - t_0)^2$$
$$l = \{50'',23615 + 0,00022045\,(t_0 - 1850)\}\,(t - t_0)$$
$$+ 0'',00011023\,(t - t_0)^2.$$

Π die Länge des aufsteigenden Knotens der mittleren Ekliptik zur Zeit t, bezogen auf die feste Ekliptik des mittleren Aequinoctiums von t_0.

π die Neigung der wahren Ekliptik gegen die feste zur Zeit t, also:

$$\Pi = 173^\circ 34' 54'' + 32'' 655 \, (t_0 - 1850) - 8'',791 \, (t - t_0)$$

$$\pi = \{0'',46951 - 0'',00000689 \, (t_0 - 1850)\} \, (t - t_0) - 0'',00000345 \, (t - t_0)^2.$$

Seien weiter

$$\beta_0 \quad \lambda_0$$

die gegebenen Coordinaten für die Zeit t_0 und

$$\beta \quad \lambda$$

die gesuchten Coordinaten für die Zeit t.

Man hat zu rechnen:

$$q = \sin \pi \, \{tg \, \beta_0 - \sin(\lambda_0 - \Pi) \, tg \, {}^1\!/_2 \, \pi\}$$

$$tg \, L = \frac{q \cos(\lambda_0 - \Pi)}{1 + q \sin(\lambda_0 - \Pi)},$$

so wird:

$$\lambda = \lambda_0 + l + L$$

$$tg \, {}^1\!/_2 (\beta - \beta_0) = - \frac{\sin(\lambda_0 - \Pi + {}^1\!/_2 L)}{\cos {}^1\!/_2 L} \, tg \, {}^1\!/_2 \, \pi.$$

Sei ferner:

$$p = \{23'',030 + 0'',000142 \, (t_0 - 1850)\} \, (t_1 - t_0) + 0'',000031 \, (t - t_0)^2$$

$$n = \{20'',04661 - 0'',00008481 \, (t_0 - 1850)\} \, (t_1 - t_0) - 0'',00008194 \, (t - t_0)^2$$

$$m = \{46'',06315 + 0'',00027723 \, (t_0 - 1850)\} \, (t_1 - t_0)^2 + 0'',00027729 \, (t - t_0)^2$$

$$q_1 = \sin n \, \{tg \, \delta_0 + \cos(\alpha_0 + p) \, tg \, {}^1\!/_2 \, n\}$$

$$tg \, L_1 = \frac{q_1 \sin(\alpha_0 + p)}{1 - q_1 \cos(\alpha_0 + p)},$$

so wird:

$$\alpha = \alpha_0 + m + L_1$$

$$tg \, {}^1\!/_2 (\delta - \delta_0) = \frac{\cos(\alpha_0 + p + {}^1\!/_2 L_1)}{\cos {}^1\!/_2 L_1} \, tg \, {}^1\!/_2 \, n.$$

Diese Formeln sind für Polsterne anzuwenden.

Wegen Uebertragung auf historische Epochen vergl. §. 224, über Auf- und Untergang der Sterne.

Für Pole nicht zu naher Sterne hat man:

$$\alpha_t = \alpha_T + \{m^s (t - T)\} + n^s (t - T) \sin \alpha_1 \, tg \, \delta_1$$
$$\delta_t = \delta_T + \{n'' (t - T)\} \cos \alpha_1,$$

α_1 und δ_1 sind genäherte Werthe für die Epoche

$$\frac{t + T}{2}.$$

m und *n* haben die vorher angeführte Bedeutung und sin ebenfalls für die Zeit $\frac{t + T}{2}$ zu nehmen. m^s, n^s, n'' können fo gender Tafel entnommen werden.

T	m^s	$\log n^s$	$\log n''$
1800	3s,06968	0,126146	1,302238
1810	6987	6128	2219
1820	7006	6109	2200
1830	7025	6090	2182
1840	7044	6072	2163
1850	7063	6053	2144
1860	7081	6034	2125
1870	7100	6015	2107
1880	7119	5996	2088
1890	7138	5978	2069
1900	7157	5959	2050

Analoge Formeln erhält man für λ und β und zwar wird. wenn λ_1 und β_1 analog den Werthen für die Mittelepoche gelten:

$$\lambda_t = \lambda_T + \{l + \pi \, tg \, \beta \cos (\lambda_1 - \Pi)\} (t - T)$$
$$\beta_t = \beta_T - \pi \sin (\lambda_1 - \Pi) (t - T).$$

T	l	π	Π
1800	50'',22336	0'',47982	172° 32' 49''
1810	2562	976	38 17
1820	2788	969	43 46
1830	3013	963	49 15
1840	3239	956	54 43
1850	3465	950	173° 0 12
1860	3691	943	5 41
1870	3917	937	11 9
1880	4143	930	16 38
1890	4368	924	22 7
1900	4594	917	27 36

In den Katalogen findet sich gewöhnlich die jährliche Präcession nebst der Variatio Saecularis angegeben. Bezeichnet man die erstere mit p, die letztere mit v, so ist die Reduction wegen Präcession:

$$\alpha_t = \alpha_T + p\,(t - T) + v \left(\frac{t - T}{200}\right)^2$$

$$\delta_t = \delta_T + p\,(t - T) + v \left(\frac{t - T}{200}\right)^2.$$

Die Variatio Saecularis entsteht durch Multiplication nachstehender Ausdrücke mit 100:

$$\frac{d^2 \alpha}{d t^2} = m' + n' \operatorname{tg} \delta \sin \alpha + \sin 1'' \left\{n^2 \sin^2 \alpha \left(\tfrac{1}{2} + \operatorname{tg}^2 \delta\right) + m\, n \operatorname{tg} \delta \cos \alpha\right\}$$

$$\frac{d^2 \delta}{d t^2} = n' \cos \alpha - \sin 1'' \left\{n^2 \sin^2 \alpha \operatorname{tg} \delta + m\, n \sin \alpha\right\}.$$

§. 236.

Polbestimmung für beliebige Epoche.

Bezeichne α und δ die Declination und Rectascension des Weltpols zur Zeit t, bezogen auf den Aequator und das Aequinoctium t_0, sowie ε und ε_0 die diesen Zeiten entsprechenden Schiefen der Ekliptik, so ist:

$$\cos \delta \sin \alpha = \sin \varepsilon \cos \varepsilon_0 \cos l - \cos \varepsilon \sin \varepsilon_0$$

$$\cos \delta \cos \alpha = \sin \varepsilon \sin l$$

$$\sin \delta = \sin \varepsilon \sin \varepsilon_0 \cos l + \cos \varepsilon \cos \varepsilon_0.$$

l bezeichnet wie vorher den Betrag der allgemeinen Präcession.

Man kann auch nachstehende Näherungsformeln verwenden:

$$\operatorname{tg} \alpha = - \cos \varepsilon_0 \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} l$$

$$\cos \delta = \frac{\sin \varepsilon_0 \sin l}{\cos \alpha}.$$

§. 237.

Nutation.

Sei ☊ die Länge des aufsteigenden Mondknotens,
☉ „ „ der Sonne,
☾ „ „ des Mondes,
$P_{☉}$ „ „ des Perihels der Sonne,
$P_{☾}$ „ „ des Perigäums des Mondes,

so ist nach **Harkness**:

$$\begin{aligned}\varDelta\lambda = &- [17'',2463 + 0,0001732\,(t - 1850)]\,\sin \Omega\\ &+ [\;0'',2070 + 0,0000002\,(t - 1850)]\,\sin 2\,\Omega\\ &- [\;1'',2642 + 0,0000012\,(t - 1850)]\,\sin 2\,\odot\\ &- [\;0'',2043 + 0,0000002\,(t - 1850)]\,\sin 2\,☾\\ &+ [\;0'',1273 + 0,0000001\,(t - 1850)]\,\sin(\odot - P_{\circledcirc})\\ &+ [\;0'',0686 + 0,0000001\,(t - 1850)]\,\sin(☾ - P_{☾})\\ &- \;0'',0339\,\sin(2\,☾ - \Omega) - 0'',0261\,\sin(3\,☾ - P_{☾})\\ &- 0'',0213\,\sin(\odot + P_{\circledcirc})\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\varDelta\varepsilon = &+ [9'',2205 + 0'',0000090\,(t - 1850)]\,\cos \Omega\\ &- [0'',0899 - 0'',0000005\,(t - 1850)]\,\cos 2\,\Omega\\ &+ [0'',5486 - 0'',0000029\,(t - 1850)]\,\cos 2\,\odot\\ &+ [0'',0886 - 0'',0000005\,(t - 1850)]\,\cos 2\,☾\\ &+ 0'',0181\,\cos(2\,☾ - \Omega).\end{aligned}$$

Die Zahl

$$9'',22054 \pm 0'',00859$$

wird die **Nutationsconstante** genannt.

Setzt man:

$$\varDelta\alpha = \frac{\partial\alpha}{\partial\lambda}\varDelta\lambda + \frac{\partial\alpha}{\partial\varepsilon}\varDelta\varepsilon + \cdots$$

$$\varDelta\delta = \frac{\partial\delta}{\partial\lambda}\varDelta\lambda + \frac{\partial\delta}{\partial\varepsilon}\varDelta\varepsilon + \cdots$$

und beachtet, dass

$$\frac{\partial\alpha}{\partial\lambda} = \cos\varepsilon + \sin\varepsilon\, tg\,\delta\, \sin\alpha$$

$$\frac{\partial\alpha}{\partial\varepsilon} = -\cos\alpha\, tg\,\delta$$

$$\frac{\partial\delta}{\partial\lambda} = \cos\alpha\,\sin\varepsilon$$

$$\frac{\partial\delta}{\partial\varepsilon} = \sin\alpha$$

. . . .

so erhält man die Formeln für $\varDelta\alpha$ und $\varDelta\delta$. Von ihrer Ausführung nehmen wir Abstand.

§. 238.

Sternreduction.

A. Auf den Jahresanfang. Durch die Präcessionsformeln.

B. Ad locum apparentem.

Sei t die Zeit seit dem Jahresanfang, so hat man als Correction für Präcession:

$$d\alpha_1 = t(m + n\,tg\,\delta\,sin\,\alpha)$$
$$d\delta_1 = t\,n\,cos\,\alpha,$$

und Correction für Nutation:

$$d\alpha_2 = cos\,\varepsilon\,\Delta\lambda + (sin\,\varepsilon\,sin\,\alpha\,\Delta\lambda - cos\,\alpha\,\Delta\varepsilon)\,tg\,\delta$$
$$d\delta_2 = sin\,\varepsilon\,cos\,\alpha\,\Delta\lambda + sin\,\alpha\,\Delta\varepsilon.$$

Fasst man beide Formeln zusammen, so folgt:

$$d\alpha = t(m + n\,tg\,\delta\,sin\,\alpha) + cos\,\varepsilon\,\Delta\lambda + sin\,\varepsilon\,sin\,\alpha\,tg\,\delta\,\Delta\lambda - cos\,\alpha\,tg\,\delta\,\Delta\varepsilon$$
$$d\delta = t\,n\,cos\,\alpha + sin\,\varepsilon\,cos\,\alpha\,\Delta\lambda + sin\,\alpha\,\Delta\varepsilon.$$

Diese Formeln lassen sich auch schreiben wie folgt:

Sei
$$t\,m + cos\,\varepsilon\,\Delta\lambda = A\,m + E$$
$$t\,n + sin\,\varepsilon\,\Delta\lambda = A\,n$$
$$B = -\Delta\varepsilon$$
$$C = -n\,cos\,\odot\,cos\,\varepsilon$$
$$D = -n\,sin\,\odot$$
$$a = m + n\,tg\,\delta\,sin\,\alpha$$
$$b = n\,cos\,\alpha;$$

ferner:

$$b = cos\,\alpha\,tg\,\delta \qquad b' = -sin\,\alpha$$
$$c = cos\,\alpha\,sec\,\delta \qquad c' = tg\,\varepsilon\,cos\,\delta - sin\,\alpha\,sin\,\delta$$
$$d = sin\,\alpha\,sec\,\delta \qquad d' = cos\,\alpha\,sin\,\delta,$$

m und m' die jährliche Eigenbewegung, t die Zeit seit Jahresanfang in Theilen des Jahres, so wird:

$$\alpha_{app} = \alpha_{med} + t\,m + A\,a + B\,b + c\,C + D\,d + E$$
$$\delta_{app} = \delta_{med} + t\,m' + A\,a' + B\,b' + c\,C' + D\,d'.$$

Setzt man noch:

$$f = m''A + E$$
$$g\,cos\,G = n''A \qquad h\,sin\,H = C$$
$$g\,sin\,G = B \qquad h\,cos\,H = D$$
$$i = C\,tg\,\varepsilon,$$

so wird:

$$\alpha_{app} = \alpha_{med} + tm + f + g \sin(G + \alpha) tg\,\delta + h \sin(H + \alpha) \sec$$
$$\delta_{app} = \delta_{med} + tm' + g \cos(G + \alpha) + h \cos(H + \alpha) \sin\delta + i \cos$$

Diese Grössen können den Ephemeriden entnommen werden. Dazu kommen noch die Correctionen wegen Fixsternaberration

$$\varDelta\alpha = h_0 \sin(H_0 + \alpha) \sec\delta$$
$$\varDelta\delta = h_0 \cos(H_0 + \alpha) \sin\delta + i_0 \cos\delta$$

	$\log h_0$	H_0	i_0
1800	9,534	351,3°	— 0,022″
1850	9,534	350,5°	— 0,024″
1900	9,534	349,7°	— 0,026″.

Diese letztere Correction wird nicht angewendet, wenn die Beobachtung bereits durch Verminderung der Beobachtungszeit um die Aberrationszeit, sowohl für die Fixstern- als auch für die Planetenaberration corrigirt wurde. In diesem Falle fallen auch die Grössen

$$h \sin(H + \alpha) \sec\delta$$
$$h \cos(H + \alpha) \sin\delta + i \cos\delta$$

weg und man hat:

$$\alpha_{app} = \alpha_{med} + f + g \sin(G + \alpha) tg\,\delta$$
$$\delta_{app} = \delta_{med} + g \cos(G + \alpha).$$

Bei den Polsternen rechne man nach diesen Formeln:

$$\varDelta\alpha = \alpha_{app} - \alpha_{med}$$
$$\varDelta\delta = \delta_{app} - \delta_{med},$$

sodann wird:

$$tg(\alpha_{app} - \alpha_{med}) = \frac{\varDelta\alpha \, arc\, 1''}{1 - tg\delta \,.\, \varDelta\delta \, arc\, 1''}$$

$$\delta_{app} - \delta_{med} = \varDelta\delta - ctg\,\delta\; tg\, {}^1/_2 (\alpha_{app} - \alpha_{med}) \,.\, \varDelta \, arc\, 1'',$$

oder bis auf die Glieder zweiter Ordnung genau:

$$\alpha_{app} - \alpha_{med} = \varDelta\alpha + tg\,\delta \,.\, \varDelta\alpha \,.\, \varDelta\delta \, arc\, 1''$$
$$\delta_{app} - \delta_{med} = \varDelta\delta - {}^1/_2\, tg\,\delta \,.\, \varDelta\alpha^2 \, arc\, 1''.$$

(Vergl. Fabritius, Astron. Nachr., Nr. 2073.)

Sternkataloge. (In der Klammer officielle Bezeichnungsweise in Beispielen.)

Argelander: Bonner Durchmusterung (DM + 3,2413). Sterne von — 2° bis + 90° bis 9,5. Grösse. Abgerundete Positionen (α auf 1^s, δ auf Zehntel einer Bogenminute), fortgesetzt

n Schönfeld, Sterne — 2° bis — 23°. Nach diesen Katalogen ırden die sogenannten Bonner Sternkarten gezeichnet.

Diese Durchmusterung bildet die Grundlage der:

Kataloge der Astronomischen Gesellschaft. (Enthalten evision der Durchmusterung.)

+ 80° bis + 75°	Kasan	+ 20° bis + 15°	Cap d. g. Hoffnung
+ 75° „ + 70°	Dorpat	+ 15° „ + 5°	Leipzig
+ 70° „ + 65°	Christiania	+ 5° „ + 1°	Albany
+ 65° „ + 55°	Gotha	+ 1° „ — 2°	Nikolajew
+ 55° „ + 50°	Cambridge U.S.	— 2° „ — 6°	Strassburg
+ 50° „ + 40°	Bonn	— 6° „ — 10°	Wien, Ottakring
+ 40° „ + 35°	Lund	— 10° „ — 14°	Cambridge U. S.
+ 35° „ + 30°	Leiden	— 14° „ — 18°	Washington
+ 30° „ + 25°	Cambridge E.	— 18° „ — 23°	Algier
+ 25° „ + 20°	Berlin		

Wichtigere Kataloge.

Schjellerup	(Sj 4140)	Stjernefortengnelse	— 15° bis + 15°
Weisse	(W_1 10^h,962)	Positiones mediae	— 15° „ + 15°
„	(W_2 11^h,371)	„ „	+ 15° „ + 45°
Seeliger	(M_1 1213)	I. München. Sternw.	+ 15° „ — 12° [1])
„	(M_2 321)	II. „ „	+ 25° „ — 25°
Paris	(Par. 13605)	In allen daselbst sichtbaren Declin. [2])	
Rümker	(Rü 517)	„ „ „ „ „	

Copeland & Börgen Göttinger Katal. — 0° bis — 1°

Johnson & Main Radcliff „ alle das. sichtb. Declinat.

Grant (Gl 2940) Glasgow „ alle das. sichtb. Declinat.

§. 239.

Zeitbestimmung aus Höhen.

Grundformel:

$$1)\quad \cos t = \frac{\sin h - \sin \varphi \sin \delta}{\cos \varphi \cos \delta}.$$

Differentialformeln:

$$2)\quad dt = -\frac{dh}{\sin a \cos \varphi}$$ (möglicher Fehler in der Höhe).

[1]) Enthält die Lamont'schen Kataloge.

[2]) Revision der Lalande'schen Kataloge.

Es wird

$$dt \begin{cases} \text{Min.} \\ \text{Max.} \end{cases}, \text{ wenn } a \begin{cases} = 90^0 \\ = 0^0 \text{ oder } 180^0 \end{cases} \text{ oder } \varphi \begin{cases} = 0 \\ = 90^0 \end{cases} \text{ oder } \delta \begin{cases} = \\ = 9 \end{cases}$$

ist.

3) $$dt = \frac{d\varphi}{\cos\varphi \, tg\, a}$$ (möglicher Fehler in der geogr. Breite).

Hier wird:

$$dt = 0, \quad \text{wenn } a = 90^0$$
$$dt \text{ Max.}, \quad \text{„} \quad a = 0^0, 180^0$$
$$dt \lesseqgtr d\varphi, \quad \text{„} \quad ctg\, a \lessgtr \cos\varphi.$$

4) $$dt = \frac{d\delta \,.\, ctg\, p}{\cos\delta}$$ (möglicher Fehler in der Declination).

Hier wird:

$$dt = 0, \quad \text{wenn } p = 90^0$$
$$dt \text{ Max.}, \quad \text{„} \quad p = 0^0, 180^0$$
$$dt \lesseqgtr d\delta, \quad \text{„} \quad ctg\, p \lessgtr \cos\delta.$$

Man erhält aus der Formel 1) den Stundenwinkel. Sodann ist die Sternzeit der Beobachtung

$$\theta = t + \alpha.$$

Hat man die Sonne beobachtet, so giebt t unmittelbar die wahre Sonnenzeit.

Beispiele in Albrecht und Vierow's Lehrbuch der Navigation, §. 135 sq. Vergl. Jordan, Grundzüge der astronom. Zeit- und Ortsbestimmung, §. 13, S. 56. Melde, Astronomische Zeitbestimmung, Cap. X, S. 416.

Man kann auch nach folgenden Formeln rechnen:

$$\sin {}^1\!/_2\, t = \sqrt{\frac{\sin {}^1\!/_2 (z + \varphi - \delta) \sin {}^1\!/_2 (z - \varphi + \delta)}{\cos\varphi \cos\delta}},$$

oder setzt man:

$$tg\,\omega = \frac{\sin\varphi \sin\delta}{\sin z},$$

so wird:

$$\cos t = \frac{1}{\cos\omega} \frac{\cos(z + \omega)}{\cos\varphi \cos\delta}.$$

Specialfälle.

1) $h = 0$ $\qquad \cos t = - tg\,\varphi\, tg\,\delta$

$t \gtrless 6^h$, je nachdem φ und δ $\begin{cases} \text{gleich bezeichnet} \\ \text{ungleich „} \end{cases}$ sind,

2) $\varphi = 0 \qquad \cos t = \frac{\sin h}{\cos \delta} \qquad t \leqq 6^h$

3) $\delta = 0 \qquad \cos t = \frac{\sin h}{\cos \varphi} \qquad t \leqq 6^h$

4) $\varphi = 0 \begin{cases} h = 0 \\ \delta = 0 \end{cases} \qquad \cos t = 0 \qquad t = 6^h$

5) $\varphi = 0 \quad \delta = 0 \qquad \cos t = \sin h$

6) $\varphi = 0 \quad h = 0 \quad \delta = 0 \quad \cos t = 0 \qquad t = 6^h.$

§. 240.

Zeitbestimmung aus mehreren Zenithdistanzen.

Man hat für die Zenithdistanz:

$$dz = \cos\varphi \sin\alpha \, dt$$

$$\Delta z = \cos\varphi \sin\alpha \, \Delta t + \frac{\cos\varphi \sin\alpha \cos\alpha \cos p}{\sin t} \cdot \frac{\Delta^2 t}{2}.$$

Schreibt man diese Formel wie folgt:

$$z_k - z_0 = \cos\varphi \sin\alpha (t_k - t_0) + \frac{\cos\varphi \sin\alpha \cos\alpha \cos p}{\sin t} \frac{(t_k - t_0)^2}{2}$$

und summirt über alle n Beobachtungen, also

$$\Sigma (z_k - z_0) = \cos\varphi \sin\alpha \, \Sigma (t_k - t_0) + \frac{\cos\varphi \sin\alpha \cos\alpha \cos p}{\sin t} \cdot \sum \frac{(t_k - t_0)^2}{2},$$

und dividirt durch n, so ist:

$$\frac{\Sigma z_k}{n} - z_0 = \cos\varphi \sin\alpha \left(\frac{\Sigma t_k}{n} - t_0\right) + \frac{\cos\varphi \sin\alpha \cos\alpha \cos p}{\sin t} \cdot \sum \frac{(t_k - t_0)^2}{2n}.$$

Man hat also:

$$z_0 = \frac{\Sigma z_k}{n} + \frac{1}{2n} \frac{\cos\varphi \sin\alpha \cos\alpha \cos p}{\sin t} \Sigma (t_k - t_0)^2.$$

Diese Formel giebt die Verbesserung der Zenithdistanz für die Mitte der Zeiten.

Man hat ferner:

$$t_0 = \frac{\Sigma t_k}{n} + \frac{1}{2n} \frac{\cos\alpha \cos p}{\sin t} \Sigma (t_k - t_0)^2.$$

Diese Formel giebt die Verbesserung der Zeit für die mittlere Zenithdistanz.

§. 241.

Zeitbestimmung aus correspondirenden Höhe desselben Sternes.

Seien u und u' die Uhrzeiten bei gleichen Höhen desselbe Sternes, sowie g der tägliche Gang der Uhr, so ist für eine Fixstern die Uhrzeit der Culmination:

$$U = {}^1/_2 \left\{u + u_1 + \frac{u_1 - u}{24} g\right\}.$$

Vergleicht man diese Uhrzeit mit der Culminationszeit, s erhält man unmittelbar die Zeitcorrection.

Hat man aber die Sonne beobachtet (den Mond beobachte man zu diesem Zwecke nie), so muss noch die sogen. Mittags verbesserung angebracht werden.

Sei μ die Declinationsänderung der Sonne in 48 Stunden, in Bogensecunden ferner

$$\tau = {}^1/_2 (u_1 - u) \left(1 + \frac{g}{24}\right),$$

so wird die Mittagsverbesserung in Zeitsecunden:

$$\varDelta U = \frac{\mu}{720} \left\{- \frac{\tau}{\sin \tau} tg\, \varphi + \frac{\tau}{tg\, \tau} tg\, \delta\right\}.$$

Hat man Nachmittags und dann am folgenden Tage Vormittags beobachtet, so ist die Mitternachtsverbesserung:

$$\varDelta U = \frac{\mu}{720} \frac{12^h - \tau}{\tau} \left\{+ \frac{\tau}{\sin \tau} tg\, \varphi - \frac{\tau}{tg\, \tau} tg\, \delta\right\}.$$

Hat man nicht correspondirende, sondern nur nahe correspondirende Höhen beobachtet, dann ist, wenn h die Vormittags und h' die Nachmittags beobachtete Höhe bezeichnet, noch an u die zweite Correction

$$\varDelta u_1 = {}^1/_{30} \frac{h' - h}{\cos \varphi \sin a}$$

oder

$$\varDelta u_1 = {}^1/_{30} \frac{(h' - h) \cos h'}{\cos \varphi \cos \delta \sin t'}$$

anzubringen. Man muss trachten, dass $h' - h$ nicht allzu gross werde, sonst wird diese Correction illusorisch.

Die Mittagsverbesserung für $\tau = 0$ ist:

$$\varDelta U_0 = - \frac{\mu \,.\, 206\,265}{15 \times 3600} (tg\, \varphi - tg\, \delta).$$

Diese Grösse muss man zu der Zeit der grössten beobachteten ›he hinzufügen, um die Zeit der Culmination zu erhalten.

Setzt man also:

$$+\frac{\tau}{\sin\tau} = A + \frac{\tau}{tg\,\tau} = B,$$

wird die Mittagsverbesserung in Zeitsecunden

$$\Delta u^s = \frac{\mu}{720} - A\,tg\,\varphi + B\,tg\,\delta).$$

Analog erhält man für

$$\frac{12-\tau}{\tau}\cdot\frac{\tau}{\sin\tau} = A \qquad \frac{12-\tau}{\tau}\cdot\frac{\tau}{tg\,\delta} = B$$

e Mitternachtsverbesserung in Zeitsecunden

$$\Delta u^s = \frac{\mu}{720}\,\{A\,tg\,\varphi - B\,tg\,\delta\}.$$

Danach sind die Tafeln VII gerechnet.

§. 242.

Zeitbestimmung aus correspondirenden Höhen verschiedener Sterne.

Man beobachtet gleiche Höhen zweier Sterne in Ost und Vest. Sind dann:

die beobachteten Uhrzeiten	T'	T''
die wahren Sternzeiten	θ'	θ''
die gemeinsame Höhe	h	h,

›o wird, falls man an einer Sternzeituhr beobachtet hatte, die ʼhrcorrection

$$\Delta T = \theta' - T' = \theta'' - T''.$$

Setzt man in den bekannten Gleichungen:

$$\sin h = \sin\varphi\,\sin\delta' + \cos\varphi\,\cos\delta'\,\cos(\alpha' - \theta')$$
$$= \sin\varphi\,\sin\delta'' + \cos\varphi\,\cos\delta''\,\cos(\theta'' - \alpha'')$$
$$\delta' = \delta + \varepsilon \qquad \alpha' - \theta' = t + r$$
$$\delta'' = \delta - \varepsilon \qquad \theta'' - \alpha'' = t - r,$$

so ergiebt sich:

$$\sin t\,\sin r + tg\,\varepsilon\,tg\,\delta\,\cos t\,\cos r = tg\,\varepsilon\,tg\,\varphi.$$

Führt man eine Hülfsgrösse m ein, so dass

$$tg\,m = tg\,\varepsilon\,tg\,\delta\,cotg\,t,$$

wobei

$$t = \frac{\alpha' - \alpha''}{2} - \frac{T' - T''}{2},$$

so folgt:

$$\sin(r + m) = \frac{tg\,\varepsilon\, tg\,\varphi}{\sin t} \cdot \cos m,$$

und hieraus:

$$\Delta T = \frac{\alpha' + \alpha''}{2} - \left(\frac{T' + T''}{2} + r\right).$$

Die Declinationsunterschiede beider Sterne sollen nicht me als 4° betragen, auch sollen im Moment gleicher Höhen d Sterne ein Azimuth haben, welches nicht kleiner als ± 30° i

Methode von Zinger. Vierteljahrsschrift für Astronom 1874, S. 155.

§. 243.

Zeitbestimmung zweier Sterne in demselbe Vertical.

(Schumacher, Hülfstafeln, S. 124.)

Man wählt einen südlichen und einen Polstern. Die acce tuirten Buchstaben gelten für den Polstern.

Seien $T\,T'$ die Durchgangszeiten und a das Azimuth de Verticalkreises von Süd über Ost gerechnet, ferner ΔT die Uhr correction in Bogentheilen, so ist:

für den Südstern

$$t = T - \alpha + \Delta T = \theta - \varepsilon,$$

für den Nordstern

$$t' = T' - \alpha' + \Delta T' = \theta + \varepsilon,$$

also

$$\varepsilon = {}^1/_2(T' - T) - {}^1/_2(\alpha' - \alpha)$$

$$\theta = {}^1/_2(T' + T) - {}^1/_2(\alpha' + \alpha) + \Delta T.$$

Bestimmt man die Hülfswinkel λ und R aus den Gleichungen

$$R \sin\lambda = \frac{\sin(\delta' + \delta)}{\cos\varepsilon}$$

$$R \cos\lambda = \frac{\sin(\delta' - \delta)}{\sin\varepsilon},$$

so findet man θ aus

$$\sin(\lambda - \theta) = \frac{2}{R}\, tg\,\varphi \cos\delta' \cos\delta,$$

nd $\varDelta T$ aus der Gleichung:

$$\varDelta T = \theta - \tfrac{1}{2}(T' + T) + \tfrac{1}{2}(\alpha' + \alpha);$$

erner wird:

$$tg\,a = \frac{tg\,(\lambda - \theta)}{sin\,\varphi}.$$

§. 244.

Zeitbestimmung im Meridian.

Zenithdistanz für die Einstellung.

Südsterne: $z = \varphi - \delta$.

Polsterne: $\begin{cases} \text{obere Culmination } z = \delta - \varphi \\ \text{untere } \quad \text{"} \quad z = 180^0 - (\varphi + \delta). \end{cases}$

i = Neigung der Drehungsaxe gegen den Horizont; positiv, wenn das Westende der Axe über dem Horizonte liegt;

k = Azimuth oder Abweichung der Normalebene auf der Drehungsaxe von der Ebene des Meridians; positiv, wenn das Westende der Axe zwischen dem Süd- und Westpunkte des Horizontes liegt.

c = Collimation oder Abweichung der Gesichtslinie von der Collimationslinie; positiv, wenn der Winkel nach der Seite des Objectivs und nach der Seite des Kreisendes grösser als 90^0 ist.

n = die Declination des Punktes, in welchem die über das Kreisende verlängerte Drehungsaxe die scheinbare Himmelskugel trifft.

$90 - m$ = der Stundenwinkel desselben Punktes.

Relation zwischen diesen Grössen:

$$\left.\begin{aligned} cos\,n\,sin\,m &= cos\,\varphi\,sin\,i + sin\,\varphi\,cos\,i\,sin\,k \\ cos\,n\,cos\,m &= cos\,k\,cos\,i \\ sin\,n &= sin\,\varphi\,sin\,i - sin\,k\,cos\,\varphi\,cos\,i \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \quad 1)$$

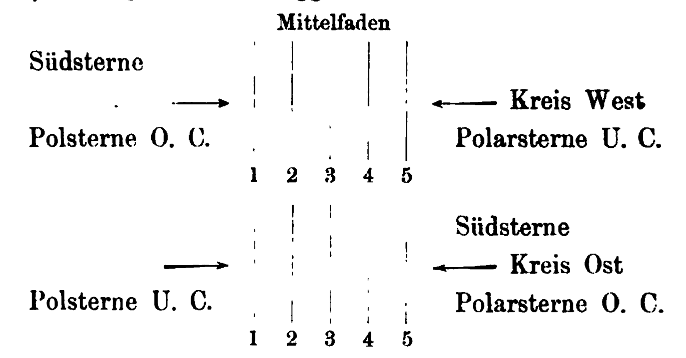
Für kleine Fehler a, b, c:

$$\begin{aligned} i &= m\,cos\,\varphi + n\,sin\,\varphi & m &= i\,cos\,\varphi + k\,sin\,\varphi \\ &= m\,sec\,\varphi - k\,tg\,\varphi & &= i\,sec\,\varphi - n\,tg\,\varphi \\ &= n\,cosec\,\varphi + k\,ctg\,\varphi & &= k\,cosec\,\varphi + n\,cotg\,\varphi \end{aligned}$$

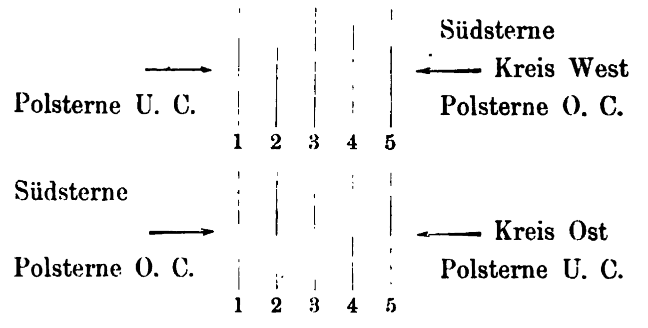
$$k = m \sin\varphi - n \cos\varphi \qquad n = i \sin\varphi - k \cos\varphi$$
$$= m \operatorname{cosec}\varphi - i \operatorname{cotg}\varphi \qquad = i \operatorname{cosec}\varphi - m \operatorname{cotg}\varphi$$
$$= i \operatorname{tg}\varphi - n \sec\varphi \qquad = m \operatorname{tg}\varphi - k \sec\varphi.$$

Festlegung der Ordnung der Fäden: Schema eines Fadennetzes

α) beim geraden Passaggeninstrumente:



β) beim gebrochenen Passageninstrumente:



Sind i die Aequatorealfadendistanzen (vom Mittelfaden), so ist die Reduction auf den Mittelfaden eines Sternes (α, δ): J

Strenge Formel: $\sin J = \sin i \sec\delta$,

Näherungsformel: $J^s = i^s \sec\delta$, anwendbar für Sterne $\delta < 80^0$.

Für Declinationen $\delta > 80^0$ ist entweder die strenge Formel anzuwenden, oder, weil

$$\frac{J''}{J''} \sin J = i \sin 1'' \sec\delta$$

$$J'' = i \sin 1'' \sec\delta \cdot \frac{J''}{\sin J}$$

$$J^s = i^s \sec\delta \cdot \frac{J^s \cdot 15}{\sin J},$$

lie Formel $J^s = i^s \sec\delta \cdot k \qquad k = \frac{J^s \cdot 15}{\sin J}$,

vobei k leicht tabulirt werden kann.

Tabelle für k:

1) es ist J^s gegeben, dann ist $i^s = \frac{J^s \cdot \cos\delta}{k}$

und die Tabelle geht mit dem Argumente J in Zeitminuten

J	$lg\,k$	$lg\,i^s \sec\delta$
1^m	0,00000	1,778
2	0,00001	2,079
3	0,00001	2,255
4	0,00002,	

2) es ist i^s gegeben dann ist $J^s = i^s \sec\delta\, k$

und die Tabelle geht mit dem Argumente $lg\, i^s \sec\delta$.

Albrecht's Hülfstafel 13 enthält die numerischen Werthe von $lg\, k = d$. (Th. Albrecht, Formeln und Hülfstafeln für geographische Ortsbestimmungen).

Schema der Reduction von Seitenfäden auf den Mittelfaden:

Ost | 5 4 3 2 1 | ⟵ Kreisende West

$\left.\begin{matrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ T_5 \end{matrix}\right\}$ die Beobachtungszeiten an den einzelnen Fäden (T_3 Mittelfaden),

so ist die Reduction auf den Mittelfaden (für Zeitsterne):

$$\left.\begin{matrix} T_1 + i_1 \sec\delta \\ T_2 + i_2 \sec\delta \\ T_3 \\ T_4 - i_4 \sec\delta \\ T_5 - i_5 \sec\delta \end{matrix}\right\}$$

wobei i_1, i_2, i_4, i_5 die Aequatorealfadendistanzen vom Mittelfaden sind.

Nimmt man das Mittel T_0 der beobachteten Grössen, dann ist

$$\text{Obere Culmin.} \begin{cases} T_0 + \dfrac{i_1 + i_2 - i_4 - i_5}{5} \sec\delta & \text{Kr. W.} \\[2ex] T_0 + \dfrac{i_4 + i_5 - i_2 - i_1}{5} \sec\delta & \text{Kr. O.} \end{cases}$$

die Zeit des Mittelfadens.

Wenn $\frac{i_1 + i_2 - i_4 - i_5}{5} = \varDelta i$ gesetzt wird, so ist:

$$T_0 \pm \varDelta i \sec \delta = \begin{cases} KW \\ KO \end{cases} \text{ Obere Culmination}$$

$$T_0 \mp \varDelta i \sec \delta = \begin{cases} KW \\ KO \end{cases} \text{ Untere Culmination}$$

die Zeit des Mittelfadens.

Werden die Beobachtungszeiten in mittlerer Zeit angeführt, so sind anstatt der Werthe i, welche sich auf Sternzeit beziehen, die Beträge $0{,}99727\, i$ in Anwendung zu bringen.

I. Die Mayer'sche Formel.

Man hat für Kreis Ost:

Obere Culm.: $\alpha = T_0 - (c + 0^s{,}021 \cos \varphi) \sec \delta + i \frac{\cos(\varphi - \delta)}{\cos \delta}$

$$+ k \frac{\sin(\varphi - \delta)}{\cos \delta} + \varDelta T$$

Untere Culm.: $\alpha + 12^h = T_0 + (c + 0^s{,}021 \cos \varphi) \sec \delta$

$$+ i \frac{\cos(\varphi + \delta)}{\cos \delta} + k \frac{\sin(\varphi + \delta)}{\cos \delta} + \varDelta T.$$

Für Kreis West:

Obere Culm.: $\alpha = T_w + (c - 0^s{,}021 \cos \varphi) \sec \delta + i \frac{\cos(\varphi - \delta)}{\cos \delta}$

$$+ k \frac{\sin(\varphi - \delta)}{\cos \delta} + \varDelta T.$$

Untere Culm.: $\alpha + 12^h = T_w - (c - 0^s{,}021 \cos \varphi) \sec \delta$

$$+ i \frac{\cos(\varphi + \delta)}{\cos \delta} + k \frac{\sin(\varphi + \delta)}{\cos \delta} + \varDelta T.$$

Ermittelt man die Collimation durch Umlegen des Fernrohres, so lassen sich die obigen Gleichungen auf die Form

$$M = kN + \varDelta T$$

bringen. Man hat mehrere solche Gleichungen und rechnet aus ihnen $\varDelta T$ die Uhrencorrection und den Azimuthalfehler k.

Vortheilhaft ist für die Zeitbestimmung, je einen Süd-, einen Zenith- und einen Polstern zu beobachten.

Der strenge Ausdruck für den Unterschied $\varDelta = \alpha - T$ lautet:

$$\sin \varDelta = \frac{tg\, i}{\cos k} \cdot \frac{\cos \varphi \cos \delta \cos \varDelta + \sin \varphi \sin \delta}{\cos \delta}$$

$$+ tg\, k \frac{\sin \varphi \cos \delta \cos \varDelta - \cos \varphi \sin \delta}{\cos \delta} + \sin c \frac{\sec \delta}{\cos i \cos k}.$$

II. Bessel'sche Formel. (Werke II, S. 33).

n und $90^0 - m$ Declination und Stundenwinkel der über as Westende verlängerten Drehungsaxe.

Obere Culmination:

$$\alpha = T + m + n\,tg\,\delta \pm (c + 0^s{,}021)\cos\varphi\,sec\,\delta \begin{cases}\text{Kreis West}\\ \text{Kreis Ost}\end{cases}$$

Untere Culmination:

$$\alpha + 12^h = T + m - n\,tg\,\delta \mp (c - 0^s{,}021)\cos\varphi\,sec\,\delta \begin{cases}\text{Kreis West}\\ \text{Kreis Ost.}\end{cases}$$

Strenge Formel:

$$\sin(\alpha - T) = tg\,m\cos(\alpha - T) + tg\,n\,\frac{tg\,\delta}{\cos m} + \sin c\,\frac{sec\,\delta}{\cos m\cos n}.$$

III. Hansen'sche Formel.

Obere Culmination:

$$\alpha = T + i\,sec\,\varphi + n(tg\,\delta - tg\,\varphi) \pm (c + 0^s{,}021\cos\varphi)\,sec\,\delta \begin{cases}\text{Kreis West}\\ \text{Kreis Ost.}\end{cases}$$

Untere Culmination:

$$\alpha + 12^h = T + i\,sec\,\varphi - n(tg\,\delta + tg\,\varphi)$$
$$\mp (c - 0^s{,}021)\cos\varphi\,sec\,\delta \begin{cases}\text{Kreis West}\\ \text{Kreis Ost.}\end{cases}$$

Strenge Formel:

$$\sin(\alpha - T) = \sin i\,\frac{sec\,\varphi\cos(\alpha - T)}{\cos m\cos n} + tg\,n\left\{\frac{tg\,\delta}{\cos m} - \frac{tg\,\varphi\cos\delta}{\cos m}\right\}$$
$$+ \sin c\,\frac{sec\,\delta}{\cos m\cos n}.$$

IV. Formel von Gauss:

Obere Culmination:

$$(\alpha) = T + \varDelta T + m \pm (c' + n)\,cotg\,\frac{p}{2} \pm (c' - n)\,tg\,\frac{p}{2}$$

Untere Culmination:

$$(\alpha) + 12^h = T + \varDelta T + m \mp (c'' + n)\,cotg\,\frac{p}{2} \mp (c'' - n)\,tg\,\frac{p}{2}$$

oder

$$\frac{c + n}{2} = C \qquad c' = c + 0^s{,}021$$

$$\frac{c - n}{2} = T \qquad c'' = c - 0^s{,}021.$$

Obere Culmination:

$$(\alpha) = T + \varDelta T + m + C\,cotg\,\frac{p}{2} + T\,tg\,\frac{p}{2} \quad \text{Kr. W.}$$

$$(\alpha) = T + \varDelta T + m - C\,tg\,\frac{p}{2} - T\,cotg\,\frac{p}{2} \quad \text{Kr. O.}$$

Untere Culmination:

$$(\alpha) + 12^h = T + \varDelta T + m - C \cot g \frac{p}{2} - T tg \frac{p}{2} \quad \text{Kr. W.}$$

$$(\alpha) + 12^h = T + \varDelta T + m + C tg \frac{p}{2} + T \cot g \frac{p}{2} \quad \text{Kr. O.}$$

V. Formel von Chandler (Astron. Journ. Nr. 187).

$$\alpha = F + \varDelta T + \{J \sin (\delta - D) + c\} \sec \delta,$$

wobei

$$m = - J \sin D$$

$$n = + J \cos D,$$

m und n dieselben Grössen wie oben.

Instrumentalfehler.

i Neigung (positiv, wenn das Westende zu hoch ist),
k Azimuth,
c Collimation (positiv, wenn der Winkel zwischen Fernrohr und Kreisende grösser als 90° ist),

$$i = \tfrac{1}{4} \{(w + w') + (0 + 0')\},$$

dabei ist:

Wenn I. Der Nullpunkt der Libelle in der Mitte liegt,

	Westende	Ostende	
1. Lage	$+ w$	$- o$	der Libelle.
2. Lage	$+ w'$	$- o'$	

Wenn II. Der Nullpunkt am Ende sich befindet,

	Westende	Ostende	
1. Lage	$+ w$	$+ o$	der Libelle.
2. Lage	$- w'$	$- o'$	

Die Correction wegen Zapfenungleichheit:

$$\varDelta i = \frac{i_1 - i_2}{2} \, \frac{\sin W}{\sin W + \sin w},$$

i_1 und i_2 die Neigungen in beiden Lagen,
W den halben Winkel der Lagerflächen } der Libelle
w den halben Winkel der Aufsatzflächen } der Libelle
bezeichnet.

Collimation.

Obere Culmination:

$$c = \tfrac{1}{2} (T_o - T_w) \cos \delta + \tfrac{1}{2} (i^o - i^w) \cos (\varphi - \delta),$$

Untere Culmination:

$$c = \tfrac{1}{2} (T_w - T_o) \cos \delta + \tfrac{1}{2} (i^w - i^o) \cos (\varphi + \delta),$$

T_o und T_w die auf den Mittelfaden reducirten Zeiten der Ost- und Westkreislage des Instrumentes,
i^o „ i^w die entsprechenden Neigungen.

§. 245.

Polhöhenbestimmung.

1. Aus einer Höhe.

$$t = \theta - \alpha$$
$$d \sin D = \sin \delta$$
$$d \cos D = \cos \delta \cos t$$
$$\cos (\varphi - D) = \frac{\sin h}{d}$$

oder

$$tg\, D = tg\, \delta \sec t$$
$$\cos \gamma = \sin h \sin D \operatorname{cosec} \delta$$
$$\varphi = D \pm \gamma.$$

Differentialformel:

$$\varDelta \varphi = -\frac{\varDelta h}{\cos a} - \cos \varphi\, tg\, a\, \varDelta t + \frac{\cos p}{\cos a} \varDelta \delta.$$

2. Aus Beobachtung des Polarsterns.

$$\varphi = 90^0 - z - p \cos t$$
$$+ \tfrac{1}{2} p^2 \sin^2 t\, ctg\, z \sin 1''$$
$$- \tfrac{1}{3} p^3 \cos t \sin^2 t \sin 1''^2.$$

Dabei ist p die scheinbare Poldistanz, z die wahre Zenithdistanz und t der Stundenwinkel der Beobachtung.

3. Durch Reduction auf Meridian.

Sei die Höhe h beobachtet und der Stundenwinkel t gegeben, so ist

$$\cos (\varphi - \delta) = \sin h + \cos \varphi \cos \delta . \left(2 \sin^2 \frac{t}{2}\right).$$

Ist also φ genähert bekannt und wird h nahe dem Meridian gemessen, so kann

$$\varphi - \delta$$

gefunden werden. Da δ bekannt ist, findet man hieraus φ. Da aber $\varphi - \delta$ zugleich die Höhe zur Zeit der Meridianpassage ist, so wird, wenn man

$$\varphi - \delta = h'$$

setzt, auch

$$\sin \tfrac{1}{2} (h' - h) = \frac{\cos \varphi \cos \delta \sin^2 \tfrac{1}{2} t}{\cos \tfrac{1}{2} (h' + h)}.$$

Diese Formeln gestatten die strenge Reduction auf d[illegible] Meridian.

Wird diese letztere Formel in Reihe aufgelöst, um a[illegible] gewendet, so kommt man auf die Methode

4. der Circummeridianhöhen. Sei

$$\frac{\cos\varphi \cos\delta}{\cos h} = A$$

$$2 \sin^2 {}^1\!/_2 t = m \sin 1''$$

und hat man mehrere Höhen beobachtet, so wird

$$h' = \frac{\Sigma h'_k}{n} + A \frac{\Sigma m_k}{n}.$$

Will man strengere Reductionen anwenden, so sind nach stehende Formeln hierzu besonders geeignet, wenn mehrere Höhen beobachtet werden, da sich die Grössen m und n leich tabuliren lassen.

Aus gleicher Höhe zweier verschiedener Sterne die Polhöhe zu finden.

Seien t und t' die Stundenwinkel der beiden Sterne, und sei

$$m \sin M = \sin {}^1\!/_2 (t' - t) \cos {}^1\!/_2 (\delta' - \delta)$$

$$m \cos M = \cos {}^1\!/_2 (t' - t)\, tg\, {}^1\!/_2 (\delta' + \delta),$$

so wird

$$tg\,\varphi = m \cos \{{}^1\!/_2 (t' + t) - M\}$$

Man hat

$$\frac{\Delta\varphi}{\cos\varphi} = \frac{-\sin a\, \Delta T + \sin a'\, \Delta T' + (\sin a' - \sin a)\, \Delta d T}{\cos a - \cos a'}.$$

Man mus also $\cos a - \cos a'$ möglichst gross nehmen.

§. 246.

Meridianreduction der Zenithdistanzen.

Sei (t vom oberen Meridian gezählt)

$$m = \frac{2 \sin {}^1\!/_2 t^2}{\sin 1''} \qquad n = \frac{2 \sin {}^1\!/_2 t^4}{\sin 1''},$$

um x die Correction, um die ausser dem Meridian beobachtete Zenithdistanz auf die Zenithdistanz im Meridian zu reduciren. Also

Zenithdistanz im Meridian $= z - x$ obere Culmination,
$= z + x$ untere Culmination.

I. Sterne südlich vom Zenith:

$$\sin {}^1/_2 x = \frac{\cos\varphi \cos\delta \sin^2 {}^1/_2 t}{\sin(\varphi - \delta + {}^1/_2 x)}$$

enähert:

$$x = \frac{\cos\varphi \cos\delta}{\cos(\varphi - \delta)} \cdot m - \left[\frac{\cos\varphi \cos\delta}{\sin(\varphi - \delta)}\right]^2 ctg(\varphi - \delta)\, n.$$

II. Sterne nördlich vom Zenith.

a) Obere Culmination:

$$\sin {}^1/_2 x = \frac{\cos\varphi \cos\delta \sin^2 {}^1/_2 t}{\sin(\delta - \varphi + {}^1/_2 x)}$$

genähert:

$$x = \frac{\cos\varphi \cos\delta}{\sin(\delta - \varphi)} m - \left[\frac{\cos\varphi \cos\delta}{\sin(\delta - \varphi)}\right]^2 ctg(\delta - \varphi) \,.\, n.$$

b) Untere Culmination (die Stundenwinkel werden vom unteren Meridian gezählt):

$$\sin {}^1/_2 x = \frac{\cos\varphi \cos\delta \sin^2 {}^1/_2 t}{\sin(\varphi + \delta - {}^1/_2 x)}$$

genähert:

$$x = \frac{\cos\varphi \cos\delta}{\sin(\varphi + \delta)} m - \left[\frac{\cos\varphi \cos\delta}{\sin(\varphi + \delta)}\right]^2 . \, ctg(\varphi + \delta) \,.\, n.$$

III. Für die Sonne.

$$y = -\frac{\mu}{188{,}5}(tg\,\varphi - tg\,\delta).$$

$$x = -\frac{\cos\varphi \cos\delta}{\sin(\varphi - \delta)} \cdot 2\sin^2 {}^1/_2 (t + y).$$

μ = 48stündigen Aenderung der Declination der Sonne. Für δ ist die Declination der Sonne im Mittag zu nehmen.

§. 247.

Azimuthbestimmung.

a) Aus einer Höhe.

Sei h wahre Höhe,
φ die Polhöhe,
P die Poldistanz des Sternes,
a das Azimuth des Sternes,
p der parallaktische Winkel,

dann ist:

$$tg\,{}^1/_2\,a = \sqrt{\frac{\sin(s-\varphi)\sin(s-h)}{\cos s\cos(s-P)}}$$

$$2s = \varphi + h + P.$$

Man hat

$$\varDelta a = -\frac{\varDelta h}{\cos h\, tg\, p}.$$

b) Aus correspondirenden Höhen eines Sternes.

Seien A und A' die Lesungen des Kreises vor und nach der Culmination des Sternes, so ist

$$\frac{A + A'}{2} = \text{Azimuth } 0.$$

Also bei der Lesung vor Culmination das Azimuth

$$360^0 - \frac{A' - A}{2}$$

und bei jener nach Culmination

$$\frac{A' - A}{2}.$$

c) Aus correspondirenden Sonnenhöhen.

Sei $A\,A'$ die Lesungen für Vor- und Nachmittag wie oben gerechnet,
δ die Declination der Sonne zu Mittag,
$\frac{d\delta}{dt}$ die stündliche Aenderung von δ,

so ist die Correction

$$\varDelta A = {}^1/_2\,\frac{d\delta}{dt}\,\frac{\cos\delta}{\cos\varphi\cos h\sin a}$$

oder

$$\varDelta A = {}^1/_2\,\frac{d\delta}{dt}\,\frac{1}{\cos\varphi\sin t}.$$

Diese Correction ist vom arithmetischen Mittel abzuziehen, wenn die Theilung des Kreises in demselben Sinne läuft, wie die Azimuthe gezählt werden.

Man hat alsdann für das Azimuth $= 0$

$$\frac{A + A'}{2} - \varDelta A.$$

d) Durch Beobachtungen des Polarsternes.

Beobachtet man die Zeiten $T\,T'$, in welchen der Polarstern dasselbe Azimuth erreicht und sind t und t' die zugehörigen Stundenwinkel, sowie h und h' die zugehörigen Höhen, so ist

$$tg\,a = ctg\,{}^1/_2\,(t' - t)\,\frac{tg\,{}^1/_2\,(h + h')\,tg\,{}^1/_2\,(h - h')}{sin\,\varphi}$$

lso beim Polarstern genähert

$$a = \frac{90^0 - {}^1/_2\,(t' - t)}{cos\,\varphi\,tg\,\delta}$$

e) Mittelst bekannter Zeit und der Polhöhe.

$$sin\,a = \frac{cos\,\delta\,sin\,t}{cos\,h}$$

$$cos\,a = \frac{sin\,\varphi\,cos\,\delta\,cos\,t - cos\,\varphi\,sin\,\delta}{cos\,h}.$$

Differentialformel:

$$\varDelta a = \frac{cos\,\delta\,cos\,p}{cos\,h}\,\varDelta t - tg\,h\,sin\,a\,\varDelta\varphi + \frac{sin\,p}{cos\,h}\,\varDelta\delta.$$

Da in $\varDelta t$ ein Fehler am ehesten zu befürchten ist, muss $os\,p$ nahe an 0 sein. Dieses ist beim Polarstern in der grössten)igression der Fall.

Hat man eine Reihe von Azimuthen beobachtet und sind $_k$ die zugehörigen Stundenwinkel, so ist

$$t_0 = \frac{1}{n}\,\Sigma t_k + \frac{1}{2n}\,\frac{\frac{\partial^2 a}{\partial t^2}}{\frac{\partial a}{\partial t}}\,\Sigma\,(t_k - t_0)^2$$

$$a_0 = \frac{1}{n}\,\Sigma a_k - \frac{1}{2n}\,\frac{\partial^2 a}{\partial t^2}\,\Sigma\,(t_k - t_0)^2$$

wobei

$$\frac{\partial a}{\partial t} = \frac{cos\,\delta\,cos\,p}{cos\,h}$$

$$\frac{\partial^2 a}{\partial t^2} = -\frac{cos\,\varphi\,sin\,a}{cos^2 h}\,\{cos\,h\,sin\,\delta + 2\,cos\,\varphi\,cos\,a\}.$$

f) Azimuthbestimmung aus Sonnendistanzen vom terrestrischen Objecte (mittelst Sextanten).

Sei φ die Polhöhe des Ortes,
t Stundenwinkel der Sonne,
δ Declination der Sonne,
h die wahre Höhe derselben,
h' die scheinbare Höhe derselben,
H die Höhe des Objectes,
a das Azimuth der Sonne,

Δ' der auf dem Horizont reducirte Abstand Δ des nächsten Sonnenrandes vom Gegenstand dessen Azimuth bestimmt werden soll.

Man hat zu rechnen:

$$tg\, x = cos\, t\, tg\, \varphi$$

$$sin\, h = \frac{sin\, \varphi\, sin\, (x + \delta)}{cos\, x}$$

$$sin\, w = \frac{sin\, t\, cos\, \delta}{cos\, h}$$

$$h' = h + r - p$$

$$r = \text{Refraction}$$

$$p = \text{Parallaxe.}$$

so wird

$$tg\, {}^1\!/_2\, \Delta' = \sqrt{\frac{sin\, {}^1\!/_2\, (\Delta + h' - H)\, sin\, {}^1\!/_2\, (\Delta - h' + H)}{cos\, {}^1\!/_2\, (\Delta + h' + H)\, cos\, {}^1\!/_2\, (\Delta - h' - H)}}$$

Man hat ausserdem:

$$tg\, w = \frac{cos\, y\, tg\, t}{sin\, (\varphi - y)}$$

wobei

$$tg\, y = \frac{tg\, \delta}{cos\, t}$$

$$cos\, h = \frac{cos\, \delta\, sin\, t}{sin\, w}$$

$$sin^2\, {}^1\!/_2\, \Delta' = \frac{sin\, {}^1\!/_2\, (\Delta + h' - H)\, cos\, {}^1\!/_2\, (\Delta - h' + H)}{cos\, h'\, cos\, H}.$$

Das Azimuth des Gegenstandes ist dann:

$$a \mp \Delta'$$

§. 248.

Genäherte Meridianbestimmung.

Man bezeichne mit W die Höhe eines Gnomons (einfache vertical in die Erde gesteckte Stange) und mit l_1 und l_2 zwei Schattenlängen. Setze dann:

$$tg\, h_1 = \frac{H}{l_1} \qquad tg\, h_2 = \frac{H}{l_2}.$$

Sei ferner Δ der Winkel den diese beiden Schatten mit einander einschliessen (aus dem Dreiecke $l_1\, l_2$ durch Seitenabmessung zu berechnen).

Man rechne:

$$q = \sin\Delta \cos h_1$$
$$q' = \cos h_2 - \cos\Delta \cos h_1$$
$$Q = q^2 + q'^2$$
$$\sin A = (\sin h_1 - \sin h_2)\frac{q}{Q}$$
$$\sin x = (\sin h_1 - \sin h_2)\frac{tg\,\varphi}{Q}$$

so ist das Azimuth der zweiten Länge l_2 gleich

$$a_2 = A + x$$

φ ist die Polhöhe des Ortes.

§. 249.

Aus den Höhen zweier Sterne und der Zwischenzeit die Polhöhe und Uhrcorrection zu finden.

Seien

$$\begin{matrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \delta_1 & \delta_2 \\ h_1 & h_2 \end{matrix}$$

die gegebenen Rectascensionen, Declinationen und Höhen, sowie Δ die Zwischenzeit, so hat man zu rechnen:

1.
$$tg\,F = \frac{tg\,\delta_2}{\cos[(\alpha_2 - \alpha_1) - \Delta]}$$
$$tg\,v = \frac{\cos F\,tg\,\delta_1}{\sin(F - \delta_1)}$$
$$\cos w = \frac{\cos v\,tg\,h_1}{tg(F - \delta_1)}\left\{\frac{\sin h_2 \sin F}{\sin h_1 \sin\delta_2 \cos(F - \delta_1)} - 1\right\}$$
$$tg\,G = \frac{tg\,h_1}{\cos(v - w)}$$
$$tg\,\lambda = \frac{\cos G\,tg(v - w)}{\sin(G - \delta_1)}$$

und man erhält

$$tg\,\varphi = \cos\lambda\,ctg(G - \delta_1)$$
$$t + \Delta t = {}^1/_{15}(\alpha + \lambda)$$

(Methode von Gauss).

2. Man rechne:

$$tg(45^0 + A_1) = \frac{\sin {}^1/_2(h_2 + \delta_2)\cos {}^1/_2(h_2 - \delta_2)\cos\delta_1}{\sin {}^1/_2(h_1 + \delta_1)\cos {}^1/_2(h_1 - \delta_2)\cos\delta_2}$$
$$tg(45^0 + A_2) = \frac{\cos {}^1/_2(h_2 + \delta_2)\sin {}^1/_2(h_2 - \delta_2)\cos\delta_1}{\cos {}^1/_2(h_1 + \delta_1)\sin {}^1/_2(h_1 - \delta_1)\cos\delta_2}.$$

Sei Δ der Ueberschuss des Unterschiedes der beiden Rectascensionen über die in Grade verwandelte Zwischenzeit der beiden Beobachtungen.

$$tg\, B_1 = tg\, A_1\, ctg\, {}^1/_2 \Delta$$
$$tg\, B_2 = tg\, A_2\, ctg\, {}^1/_2 \Delta$$
$$C = B_2 + B_1 + \Delta$$
$$D = B_2 - B_1$$
$$tg\, E = \frac{sin\,(h_1 + \delta_1)\, sin\,(h_1 - \delta_1)\, sin\, D}{cos^2 \delta_1\, cos\, {}^1/_2\,(D + C)\, cos\, {}^1/_2\,(C - D)}.$$

Sodann berechnet sich λ aus einer der beiden Formeln:

$$cos\,(2\lambda - C) = \frac{cos\,(D - E)}{cos\, E}$$
$$tg\,(\lambda - {}^1/_2\, C) = \pm \sqrt{tg\, {}^1/_2 D\, tg\,({}^1/_2 D - E)}$$

und endlich φ aus

$$tg\,(45^0 - {}^1/_2\,\varphi) = \frac{cos\, {}^1/_2\,(h_1 + \delta_1)\, sin\, {}^1/_2\,(h_1 - \delta_1)\, sin\, D}{cos\, \delta_1\, sin\,[\Delta t - {}^1/_2\,(C - D)]\, cos\, {}^1/_2\,(C + D)}$$

$\alpha_1 + \lambda$ giebt in Zeit verwandelt den Stand der Uhr.

(Jahn: Praktische Astronomie II, §. 118.)

§. 250.

Aus zwei Höhen desselben Sternes Zeit und Polhöhe zu finden.

Seien T' und T die Zeiten der Beobachtung, $\Delta T'$ und ΔT die Uhrcorrectionen, h' und h die beobachteten Höhen, so wird

$$\lambda = (T' - T) + (\Delta T' - \Delta T)$$
$$sin\, C = cos\,\delta\, sin\, {}^1/_2\,\lambda$$
$$sin\,\beta = -\frac{cos\, {}^1/_2\,(h' + h)\, sin\, {}^1/_2\,(h' - h)}{sin\, C}$$
$$cos\,\gamma = -\frac{sin\, {}^1/_2\,(h' + h)\, cos\, {}^1/_2\,(h' - h)}{cos\,\beta\, cos\, C}$$
$$D = \frac{sin\,\delta}{cos\, C},$$

so wird

$$sin\,\varphi = cos\,\beta\, sin\,(D + \gamma)$$
$$tg\,\tau = \frac{tg\,\beta}{cos\,(D + \gamma)} \text{ oder } = \frac{sin\,\beta}{cos\,\varphi}$$

nd die Stundenwinkel zu den Beobachtungszeiten:

$$t = \tau - {}^1/_2\,\lambda$$
$$t' = \tau + {}^1/_2\,\lambda.$$

Formeln von M. Caillet in Manuel du Navigateur, Nantes 1818.)

Wird die Sonne beobachtet, so hat man, wenn

$$\Delta\delta = -\,{}^1/_2\,(\delta - \delta')$$

esetzt wird und δ die zur Höhe h, δ' die zur Höhe h' gehörige onnendeclination bezeichnet:

$$\Delta\varphi = -\,\Delta\delta\,\frac{\sin\beta}{\cos\varphi\,\sin{}^1/_2\,\lambda}$$
$$y = \Delta\delta\left\{\frac{tg\,\varphi\,\cos\tau}{\sin{}^1/_2\,\lambda} - \frac{tg\,\delta}{tg\,{}^1/_2\,\lambda}\right\}$$
$$\varphi = \varphi_0 + \Delta\varphi$$
$$t = \tau + y - {}^1/_2\,\lambda + {}^1/_2\,(e' - e)$$
$$t' = \tau + y + {}^1/_2\,\lambda - {}^1/_2\,(e' - e),$$

wobei e' die Zeitgleichung zur Zeit T' und e jene zur Zeit T bezeichnet.

Fehlergleichungen:

$$\Delta h = -\cos a\,d\varphi - \cos\varphi\,\sin a\,d\tau$$
$$\Delta h' = -\cos a'\,d\varphi - \cos\varphi\,\sin a'\,d\tau$$

oder

$$d\varphi = \frac{\sin a'}{\sin(a' - a)}\,\Delta h + \frac{\sin a}{\sin(a' - a)}\,\Delta h'$$
$$\cos\Delta\,d\tau = \frac{\cos a'}{\sin(a' - a)}\,\Delta h - \frac{\cos a}{\sin(a' - a)}\,\Delta h'.$$

Hieraus sieht man, dass

$$\sin(a' - a)$$

nahe gleich 1 sein muss, wenn diese Methode halbwegs genaue Resultate liefern soll.

§. 251.

Bestimmung der Uhrcorrection und der geographischen Breite aus drei Sternen, die in gleicher Höhe beobachtet wurden.

Seien gegeben:

α_1 α_2 α_3 die Rectascensionen,
δ_1 δ_2 δ_3 die Declinationen,
θ_1 θ_2 θ_3 die Sternzeiten.

Seien ferner:

$\varDelta t$ die Uhrcorrection,

φ die Breite,

so lauten die Fundamentalformeln:

$$\left.\begin{aligned} \theta_k &= \alpha_k + t_k \\ \sin h &= \sin\varphi \sin\delta_k + \cos\varphi \cos\delta_k \cos(t_k - \varDelta t_k) \end{aligned}\right| \; k = 1, 2, 3.$$

1. Aus diesen folgt, wenn

$$\mu \sin \nu = \sin {}^1/_2 (t_2 - t_1) \, ctg \, {}^1/_2 (\delta_2 - \delta_1)$$
$$\mu \cos \nu = \cos {}^1/_2 (t_2 - t_1) \, tg \, {}^1/_2 (\delta_2 + \delta_1)$$
$$\sigma = {}^1/_2 (t_2 + t_1) - \nu$$

gesetzt wird

$$tg\,\varphi = \mu \cos (\sigma - \varDelta t) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad \mathrm{I}$$

Setzt man ferner:

$$\mu' \sin \nu' = \sin {}^1/_2 (t_3 - t_1) \, ctg \, {}^1/_2 (\delta_3 - \delta_1)$$
$$\mu' \cos \nu' = \cos {}^1/_2 (t_3 - t_1) \, tg \, {}^1/_2 (\delta_3 + \delta_1)$$
$$\sigma' = {}^1/_2 (t + t_3) - \mu',$$

so folgt weiter:

$$tg\,\varphi = \mu' \cos (\sigma' - \varDelta t) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad \mathrm{II}$$

Setzt man demnach

$$tg\,\sigma = \frac{\mu}{\mu'}$$

$$tg\,\psi = tg\,(45 - \varrho)\, ctg \frac{(\sigma' - \sigma)}{2},$$

so wird

$$\varDelta t = {}^1/_2 (\sigma + \sigma') - \psi.$$

(Gauss in Zach, Monatl. Correspondenz 1808.)

2) Man rechne

$$tg\,A_1 = \frac{\sin {}^1/_2 (\delta_3 - \delta_2) \, ctg \, {}^1/_2 (t_3 - t_2)}{\cos {}^1/_2 (\delta_3 + \delta_2)}$$

$$tg\,A_2 = \frac{\sin {}^1/_2 (\delta_1 - \delta_3) \, ctg \, {}^1/_2 (t_1 - t_3)}{\cos {}^1/_2 (\delta_3 + \delta_1)}$$

$$tg\,A_3 = \frac{\sin {}^1/_2 (\delta_2 - \delta_1) \, ctg \, {}^1/_2 (t_2 - t_1)}{\cos {}^1/_2 (\delta_2 + \delta_1)}$$

$$tg\,B = \frac{\sin {}^1/_2 (\delta_2 - \delta_1) \, ctg \, (A_1 - A_2)}{\cos {}^1/_2 (\delta_1 + \delta_2)},$$

ist:

$$\varDelta t = {}^1/_2 (t_2 + t_1) - B.$$

Setzt man ferner:

$$C = A_3 + A_2 - A_1$$

$$tg\,D = \frac{\cos {}^1\!/_2 (t - \varDelta t + C)\, tg\, (45^0 + {}^1\!/_2 \delta_1)}{\cos {}^1\!/_2 (t - \varDelta t - C)}$$

$$tg\,E = \frac{\sin {}^1\!/_2 (t - \varDelta t - C)\, ctg\, (45^0 + {}^1\!/_2 \delta_1)}{\sin {}^1\!/_2 (t - \varDelta t + C)},$$

) wird:

$$\varphi = D + E,$$

nd die Höhe

$$h = D - E.$$

(Methode von Cagnolli Zach, Monatl. Corresp. 19).

§. 252.

ʼolhöhe und Zeit aus der Beobachtung mehrerer Sterne in demselben Vertical.

(Wislicenus, A. N. 2958.)

Seien

$$\begin{matrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 \\ \delta_1 & \delta_2 & \delta_3 & \delta_4 \end{matrix}$$

lie Rectascensionen resp. die Declination von vier Fixsternen, lie zu den Zeiten

$$T_1 \quad T_2 \quad T_3 \quad T_4$$

denselben Vertical passiren.

Man rechne für jeden die für den Uhrgang corrigirte Zeit

$$u_k = T_k + \varDelta T_k \qquad k = 1, 2, 3, 4,$$

sowie die Grössen:

$$\lambda_1 = (u_2 - u_1) - (\alpha_2 - \alpha_1)$$
$$\lambda_2 = (u_4 - u_3) - (\alpha_4 - \alpha_3)$$
$$\lambda_3 = (u_3 - u_1) - (\alpha_3 - \alpha_1)$$
$$\lambda_4 = (u_4 - u_2) - (\alpha_4 - \alpha_2).$$

Sodann:

$$ctg\, {}^1\!/_2 (\sigma_1 + \sigma_2) = ctg\, {}^1\!/_2 \lambda_1 \frac{\sin {}^1\!/_2 (\delta_1 - \delta_2)}{\cos {}^1\!/_2 (\delta_1 + \delta_2)}$$

$$ctg\, {}^1\!/_2 (\sigma_1 - \sigma_2) = ctg\, {}^1\!/_2 \lambda_1 \frac{\cos {}^1\!/_2 (\delta_1 - \delta_2)}{\sin {}^1\!/_2 (\delta_1 + \delta_2)}$$

$$ctg\, {}^1\!/_2 (\sigma_3 + \sigma_4) = ctg\, {}^1\!/_2 \lambda_2 \frac{\sin {}^1\!/_2 (\delta_3 - \delta_4)}{\cos {}^1\!/_2 (\delta_3 + \delta_4)}$$

$$ctg\, {}^1\!/_2 (\sigma_3 - \sigma_4) = ctg\, {}^1\!/_2 \lambda_2 \frac{\cos {}^1\!/_2 (\delta_3 - \delta_4)}{\sin {}^1\!/_2 (\delta_3 + \delta_4)};$$

ferner:
$$tg\,{}^1\!/_2(p_1 - p_3) = ctg\,{}^1\!/_2\,\lambda_3\,\frac{\sin{}^1\!/_2(\delta_1 - \delta_3)}{\cos{}^1\!/_2(\delta_1 + \delta_3)}$$
$$tg\,{}^1\!/_2(p_1 + p_3) = ctg\,{}^1\!/_2\,\lambda_3\,\frac{\cos{}^1\!/_2(\delta_1 - \delta_3)}{\sin{}^1\!/_2(\delta_1 + \delta_3)}$$
$$tg\,{}^1\!/_2\,d_1 = tg\,{}^1\!/_2(\delta_1 - \delta_3)\,\frac{\sin{}^1\!/_2(p_1 + p_3)}{\sin{}^1\!/_2(p_1 - p_3)}$$
$$= ctg\,{}^1\!/_2(\delta_3 + \delta_1)\,\frac{\cos{}^1\!/_2(p_1 + p_3)}{\cos{}^1\!/_2(p_1 - p_3)}$$
$$tg\,{}^1\!/_2(p_2 - p_4) = ctg\,{}^1\!/_2\,\lambda_4\,\frac{\sin{}^1\!/_2(\delta_2 - \delta_4)}{\cos{}^1\!/_2(\delta_2 + \delta_4)}$$
$$tg\,{}^1\!/_2(p_2 + p_4) = ctg\,{}^1\!/_2\,\lambda_4\,\frac{\cos{}^1\!/_2(\delta_2 - \delta_4)}{\sin{}^1\!/_2(\delta_2 + \delta_4)}$$
$$tg\,{}^1\!/_2\,d_2 = tg\,{}^1\!/_2(\delta_2 - \delta_4)\,\frac{\sin{}^1\!/_2(p_2 + p_4)}{\sin{}^1\!/_2(p_2 - p_4)}$$
$$= ctg\,{}^1\!/_2(\delta_2 + \delta_4)\,\frac{\cos{}^1\!/_2(p_2 + p_4)}{\cos{}^1\!/_2(p_2 - p_4)}.$$

Sodann:
$$tg\,{}^1\!/_2(z_1 - z_3) = tg\,{}^1\!/_2\,d_1\,\frac{\sin{}^1\!/_2(p_3 - \sigma_3 - p_1 - \sigma_1)}{\sin{}^1\!/_2(p_3 - \sigma_3 + p_1 + \sigma_1)}$$
$$tg\,{}^1\!/_2(z_1 + z_3) = tg\,{}^1\!/_2\,d_1\,\frac{\cos{}^1\!/_2(p_3 - \sigma_3 - p_1 - \sigma_1)}{\cos{}^1\!/_2(p_3 - \sigma_3 + p_1 + \sigma_1)}$$
$$tg\,{}^1\!/_2(z_2 - z_4) = tg\,{}^1\!/_2\,d_2\,\frac{\sin{}^1\!/_2(p_4 - \sigma_4 - p_2 - \sigma_2)}{\sin{}^1\!/_2(p_4 - \sigma_4 + p_2 + \sigma_2)}$$
$$tg\,{}^1\!/_2(z_2 + z_4) = tg\,{}^1\!/_2\,d_2\,\frac{\cos{}^1\!/_2(p_4 - \sigma_4 - p_2 - \sigma_2)}{\cos{}^1\!/_2(p_4 - \sigma_4 + p_2 + \sigma_2)}.$$

Man hat dann für die vier Stundenwinkel:

$$t_1 \quad t_2 \quad t_3 \quad t_4,$$

und die Polhöhe φ nachstehende Gleichungen:
$$ctg\,{}^1\!/_2(a_k + t_k) = ctg\,{}^1\!/_2\,\sigma_k\,\frac{\sin{}^1\!/_2(90^0 - \delta_k - z_k)}{\sin{}^1\!/_2(90^0 - \delta_k + z_k)}$$
$$ctg\,{}^1\!/_2(a_k - t_k) = ctg\,{}^1\!/_2\,\sigma_k\,\frac{\cos{}^1\!/_2(90^0 - \delta_k - z_k)}{\cos{}^1\!/_2(90^0 - \delta_k + z_k)}$$
$$tg\,{}^1\!/_2(90^0 - \varphi) = tg\,{}^1\!/_2(90^0 - \delta_k + z_k)\,\frac{\cos{}^1\!/_2(a_k - t_k)}{\cos{}^1\!/_2(a_k + t_k)}$$
$$= tg\,{}^1\!/_2(90^0 - \delta_k + z_k)\,\frac{\sin{}^1\!/_2(a_k - t_k)}{\sin{}^1\!/_2(\alpha_k + t_k)}.$$

Beobachtet man auf diese Weise das Verschwinden von nahen Sternen hinter einer entfernten Thurmmauer, so kann

n ziemlich genaue Resultate für die Polhöhe erhalten. Dieser
n **Olbers** vorgeschlagenen Methode hatte sich **Bessel** in
nen Lehrjahren oft bedient. Vergl. Zeitschr. f. pop. astron.
ttheilungen 1859, Bd. 1, Heft 3. Eine andere Lösung findet man
des Verfassers Lehrb. d. Astron. Stuttgart, J. Maier, 1889.

§. 253.

Methode durch Interpolation.

Hat man mehrere Höhen beobachtet:

$$h_1 \quad h_2 \quad h_3 \quad h_4 \ldots$$

d die Zeiten

$$T_1 \quad T_2 \quad T_3 \quad T_4 \ldots,$$

er die Kreisstände

$$a_1 \quad a_2 \quad a_3 \quad a_4$$

gelesen, so kann man stets die grösste Höhe auf folgende Art
den, vorausgesetzt, dass einige Beobachtungen vor dem Maxi-
um, einige nach dem Maximum und einige sehr nahe am
aximum gemacht wurden.

Sei h_{max} die grösste Höhe, so kann man

$$h_{max} = h_k + \alpha (T_k - T_{max})^2$$

tzen und hieraus α bestimmen.

Man hat allgemein:

$$h_k + \alpha (T_k - T_{max})^2 = h_j + \alpha (T_j - T_{max})^2,$$

der:

$$\frac{h_k - h_j}{T_k - T_j} = \alpha (T_k + T_j) - 2 \alpha T_{max}.$$

Bildet man noch

$$\frac{h_k - h_e}{T_k - T_e} = \alpha (T_k + T_e) - 2 \alpha T_{max},$$

o wird:

$$\alpha (T_j - T_e) = \frac{h_k - h_j}{T_k - T_j} - \frac{h_k - h_e}{T_k - T_e};$$

ierdurch ist α bestimmt. Damit bestimmt sich leicht aus den
orhergehenden Gleichungen das T_{max} und endlich h_{max}.

Führt man statt der Zeiten die Kreislänge ein, so kann man
ie Polhöhe auf diese Weise ohne Zeitbestimmung ausführen.

Man kann sich auch nachstehender Formel bedienen:

$$h_{max} = \frac{1}{2} \frac{(T_2^2 - T_3^2) h_1 + (T_3^2 - T_1^2) h_2 + (T_1^2 - T_2^2) h_3}{(T_2 - T_3) h_1 + (T_3 - T_1) h_2 + (T_1 - T_2) h_3},$$

orausgesetzt, dass $h_1 \; h_2 \; h_3$ nahe am Meridian beobachtet wurden.

§. 254.

Monddistanzen.

A. Sonne und Mond.

Sei P die Horizontalparallaxe der Sonne,
p „ „ des Mondes,
R der scheinbare Halbmesser der Sonne,
r „ „ „ des Mondes,
$h\,a$ scheinbare Höhe und Azimuth des Mondes,
$H\,A$ „ „ „ „ der Sonne,
$h_1\,a_1\;H_1\;A_1$ die wahren Werthe dieser Elemente.

Man bestimme die Höhenparallelen für Mond und Sonne au

$$tg(h_1 - h) = \frac{\varrho \sin p \cos\{h + (\varphi - \varphi')\cos a\}}{1 - \varrho \sin p \sin\{h + (\varphi - \varphi')\cos a\}}$$

$$H_1 - H = P \cos H.$$

Dann sind die wahren Höhen:

$$H_1 = H + (H_1 - H)$$
$$h_1 = h + (h_1 - h).$$

Man hat ferner:

$$tg(a_1 - a) = \frac{\dfrac{\varrho \sin(\varphi - \varphi')\sin p}{\cos h}\sin a}{1 - \dfrac{\varrho \sin(\varphi - \varphi')\sin p}{\cos h}\cos a},$$

oder genähert (genügend):

$$a_1 - a = \frac{\varrho \sin(\varphi - \varphi')\sin p}{\cos h}\sin a.$$

Hiermit erhält man den wahren Azimuth

$$a_1 = a + (a_1 - a).$$

Weiter ist der scheinbare Halbmesser des Mondes und der Sonne:

$$r_1 = r + r \sin p \sin h$$
$$R_1 = R + R \sin P \sin H.$$

Sei d scheinbare Distanz der Mittelpunkte von Sonne und Mond, so ist die wahre:

$$\cos d_1 = \cos(H_1 - h_1) - \frac{\cos h_1 \cos H_1}{\cos h \cos H}(\cos\{H - h\} - \cos d)$$

(Dunthorne, Nautical Alm. 1767),

oder:

$$\cos d_1 = -\cos(H_1 + h_1) + \frac{\cos h_1 \cos H_1}{\cos h \cos H}\{\cos(H + h) + \cos d\}$$

(Lexell 1777),

oder wenn

$$\sin M = \sqrt{\frac{\cos h_1 \cos H_1}{\cos h \cos H} \cdot \frac{\cos {}^1\!/_2 (H + h + d) \cos {}^1\!/_2 (H + h - d)}{\cos^2 {}^1\!/_2 (H_1 + h_1)}}$$

gesetzt wird, auch:

$$\sin {}^1\!/_2\, d_1 = \cos {}^1\!/_2 (H_1 + h_1) \cos M.$$

(Borda, Description et usage du cercle de reflection 1787.)

Sei ferner:

$$\sin N = \sqrt{\frac{\cos h_1 \cos H_1}{\cos h \cos H} \cos {}^1\!/_2 (H + h + d) \cos {}^1\!/_2 (H + h - d)},$$

so wird:

$$(\sin {}^1\!/_2\, d_1)^2 = \cos\left\{\frac{h_1 + H_1}{2} + N\right\} \cos\left\{\frac{h_1 + H_1}{2} - N\right\}.$$

(Mackay 1783, vergl. Encke, Berliner Jahrbuch 1872.)

NB. M und N sollen nicht nahe an 90° sein.

Setzt man

$$c = \sqrt{\frac{\cos h_1 \cos H_1}{\cos h \cos H} \sin {}^1\!/_2 (d + H - h) \sin {}^1\!/_2 (d + h - h)}$$

$$tg\,\mu = \frac{\sin {}^1\!/_2 (H_1 - h_1)}{c},$$

so ist, wenn $d < 90^0$,

$$\sin {}^1\!/_2\, d_1 = \frac{\sin {}^1\!/_2 (H_1 - h_1)}{\sin \mu}$$

oder

$$\sin {}^1\!/_2\, d_1 = \frac{c}{\cos \mu}.$$

Ist dagegen $d > 90^0$, so setze man

$$c_1 = \sqrt{\frac{\cos h_1 \cos H_1}{\cos h \cos H} \cos {}^1\!/_2 (H + h + d) \cos {}^1\!/_2 (H + h - d)}$$

$$tg\,\mu_1 = \frac{\sin {}^1\!/_2 (H_1 + h_1)}{c_1},$$

so wird:

$$\cos {}^1\!/_2\, d_1 = \frac{\sin {}^1\!/_2 (H_1 + h_1)}{\sin \mu_1}$$

oder

$$\cos {}^1\!/_2\, d_1 = \frac{c_1}{\cos \mu_1}.$$

(Lexell: Observationes circa meth. inven. long. 1780.)

An die so berechnete Distanz d_1 ist noch die Correcti[on] wegen Azimuthalparallaxe des Mondes hinzuzufügen:

$$\varDelta d_1 = \pm \frac{\varrho}{\sin d} \sin(\varphi - \varphi') \sin p \cos H \sin a \sin(a_1 - A_1 - \varDelta a)$$

$$\varDelta a = a' - a.$$

a_1 und A_1 sind die scheinbaren Azimuthe des Mondes un[d] der Sonne. Es wird:

☾ Westlich vom Meridian	☾ links	✱ rechts	$\varDelta d_1$ +
	☾ rechts	✱ links	$\varDelta d_1$ —
☾ Oestlich „ „	☾ links	✱ rechts	$\varDelta d_1$ —
	☾ rechts	✱ links	$\varDelta d_1$ +

Dann berechnet man die mittlere Zeit T_1 jenes Meridians für welchen die Ephemeride gilt, welche der auf den Mittelpunkt der Erde reducirten Distanz d_1 entspricht.

In den Ephemeriden werden die Distanzen von drei zu drei Stunden gegeben. Die Zeit zur Distanz d_1 wird durch Interpolation gewonnen. Sei ferner T die Ortszeit, so ist die Länge λ bezogen auf den Meridian der Ephemeriden =

$$\lambda = T_1 - T.$$

B. Statt der strengen Formeln kann man sich der genäherten bedienen.

Man rechne mit der genäherten Distanz d)

$$s = \frac{1}{2}(h_1 + H_1 + d_1)$$

$$\sin \tfrac{1}{2} q = \sqrt{\frac{\cos s \sin(s - H_1)}{\cos h_1 \sin d_1}}$$

$$\sin \tfrac{1}{2} Q = \sqrt{\frac{\cos s \sin(s - h_1)}{\cos H_1 \sin d_1}}$$

oder

$$\sin q = \frac{\cos H}{\sin d} \sin(a_1 - A_1)$$

$$\sin Q = \frac{\cos h}{\sin d} \sin(a_1 - A_1),$$

so wird:

$$d_1 = d - (h_1 + h) \cos q - (H_1 - H) \cos q.$$

(Methode von Lacaille 1759.)

Setzt man:

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= H_1 - h_1 \\ \Delta &= H - h \end{aligned} \Big\} \; \Delta, \Delta_1 \text{ immer } +$$

$$\frac{\cos h_1 \cos H_1}{\cos h \; \cos H} = \frac{1}{C}$$

$$\frac{\cos d}{c} = \cos D$$

$$\frac{\cos \Delta}{c} = \cos D',$$

wird:

$$d_1 = D + (\Delta - D') \frac{\sin {}^1\!/_2 (\Delta + D')}{\sin {}^1\!/_2 (d + D)}.$$

(Bremiker, Astron. Nachr. 30.)

§. 255.

Sonnenflecken.

Seien $\Delta\alpha$, $\Delta\delta$, $\Delta\lambda$, $\Delta\beta$ die Differenzen zwischen den geocentrischen Coordinaten des Fleckens und des Sonnenmittelpunktes.

$\odot$ die Länge der Sonne,

$L = 180^\circ + \odot$ die heliocentrische Länge der Erde,

ε die Schiefe der Ekliptik,

p der Winkel zwischen dem Breitenkreise und Declinationskreise der Sonne,

l, b, d die heliocentrische Länge, Breite und Declination des Fleckens,

r die Entfernung des Fleckens vom Sonnenmittelpunkte,

ϱ „ „ „ „ „ Erdmittelpunkte,

R der Radiusvector der Erde,

D die Declination des Sonnenmittelpunktes,

i die Neigung des Sonnenäquators gegen die Ekliptik,

☊ die Länge des aufsteigenden Knotens des Sonnenäquators auf der Ekliptik.

Man hat:

$$\Delta\lambda = \Delta\delta \sin p + \Delta\alpha \cos p \cos D$$

$$\Delta\beta = \Delta\delta \cos p - \Delta\alpha \sin p \cos D$$

$$tg\, p = \cos \odot \, tg\, \varepsilon$$

$$\sin b = \frac{R}{r} \sin \beta$$

$$\sin(l - \lambda) = \frac{R}{r \cos b} \sin(L - \lambda)$$

$$\sin(L - \lambda) = \frac{R \cos \beta}{r \cos b} \sin(L - \lambda).$$

Will man die Elemente der Rotation bestimmen, so bilde man aus n beobachteten Positionen:

$$x_k = r_k \cos b_k \cos l_k$$
$$y_k = r_k \cos b_k \sin l_k \qquad k = 1, 2, 3 \ldots n$$
$$z_k = r_k \sin b_k.$$

Hierauf bestimme man nach der Methode der kleinsten Quadrate die Grössen A, B, C aus

$$z_k = A x_k + B y_k + C,$$

so wird:

$$tg\, i = \sqrt{A^2 + B^2}$$
$$tg\, \Omega = -\frac{A}{B}.$$

Hierauf rechne man:

$$\sin d = \frac{C}{r} \cos i$$

$$\sin {}^1\!/_2 v = \frac{\sqrt{(x_n - x_1)^2 + (y_n - y_1)^2 + (z_n - z_1)^2}}{2 r \cos d},$$

so wird die Rotationszeit:

$$T = 360 \cdot \frac{t_n - t_1}{v},$$

wobei $t_n = t_1$ die Zwischenzeit zwischen der ersten und äussersten (n) Beobachtung bezeichnet.

Bequemer für die Rechnung sind die nachstehenden Formeln. Man suche a a_1 a_2 aus den Gleichungen:

$$tg\, {}^1\!/_2 (a_1 + a) = \frac{\sin {}^1\!/_2 (b_1 - b)}{\cos {}^1\!/_2 (b_1 + b)}\, ctg \frac{l_1 - l}{2}$$

$$tg\, {}^1\!/_2 (a_2 + a) = \frac{\sin {}^1\!/_2 (b_2 - b)}{\cos {}^1\!/_2 (b_2 + b)}\, ctg \frac{l_2 - l}{2}$$

$$tg\, {}^1\!/_2 (a_2 + a_1) = \frac{\sin {}^1\!/_2 (b_2 - b_1)}{\cos {}^1\!/_2 (b_2 + b_1)}\, ctg \frac{l_2 - l_1}{2},$$

sowie m m_1 m_2 aus:

$$tg\, {}^1\!/_2 (m_1 + m) = \frac{\sin {}^1\!/_2 (b_1 - b)}{\cos {}^1\!/_2 (b_1 + b)}\, ctg \frac{a_1 - a}{2}$$

$$tg\, {}^1\!/_2 (m_2 + m) = \frac{\sin {}^1\!/_2 (b_2 - b)}{\cos {}^1\!/_2 (b_2 + b)}\, ctg\, \frac{a_2 - a}{2}$$

$$tg\, {}^1\!/_2 (m_2 + m_1) = \frac{\sin {}^1\!/_2 (b_2 - b_1)}{\cos {}^1\!/_2 (b_2 + b_1)}\, ctg\, \frac{a_2 - a_1}{2},$$

und mit

$$n = {}^1\!/_2 (l + l_1) - {}^1\!/_2 (m + m_1)$$

die Grössen M und N aus

$$ctg\, M = \frac{\cos {}^1\!/_2 (l - n + a)}{\cos {}^1\!/_2 (l - n - a)}\, ctg\, \frac{90 - b}{2}$$

$$tg\, N = \frac{\sin {}^1\!/_2 (l - n - a)}{\sin {}^1\!/_2 (l - n + a)}\, tg\, \frac{90 - b}{2},$$

so wird:

$$i = M - N.$$

Bestimmt man noch v aus

$$\sin {}^1\!/_2\, v = \frac{\sin {}^1\!/_2 (b - b_2) \cos (l - l_2)}{\sin {}^1\!/_2 (a + a_2) \cos u},$$

wobei

$$90^0 - u = M + N$$

ist, so wird:

$$T = 360^0 \cdot \frac{t_2 - t}{v}.$$

Nach Spörer ist, bezogen auf das Aequinoctium von 1866,5:

$$i = 6^0\ 58'$$
$$☊ = 74^0\ 36'$$
$$T = 25^d\ 5^h.$$

Die Rotationsgeschwindigkeit der Sonnenflecken ist eine Function ihrer heliographischen Breite. Sei dieselbe b, so ist nach Spörer die Winkelgeschwindigkeit an einem Tage gleich

$$1011' - 203' \sin (b + 41^0).$$

Die Sonnenflecken bilden sich fast nur in einer Zone, die begrenzt ist durch die Breiten $+ 10^0$ bis $+ 35^0$ nördlich und $- 10^0$ bis $- 35^0$ südlich vom Aequator.

§. 256.

Venus- und Merkurdurchgänge.

Mittlere Zeit der Venusconjunctionen für Paris:

Jahr	Datum			Jahr	Datum		
1874	8. Decemb.	16^h	17^m	2360	12. Decemb.	13^h	59^m
1882	6. „	4	25	2368	10. „	2	10
2004	7. Juni	21	0	2490	12. Juni	3	58
2012	5. „	13	27	2498	9. „	20	21
2117	10. Decemb.	15	7	2603	15. Decemb.	12	54
2125	8. „	3	18	2611	13. „	1	11
2247	11. Juni	0	30	2733	15. Juni	7	24
2255	8. „	16	54	2741	12. „	23	44.

Seien

α δ die Aequatorcoordinaten des Planeten,
$\alpha_{\odot}$ $\delta_{\odot}$ jene der Sonne,
Δ wahre Distanz der Mittelpunkte beider,
R ϱ scheinbare Halbmesser der Sonne und des Planeten,
M N n und ψ Hülfsgrössen, so hat man:

$$\Delta \sin M = (\alpha - \alpha_{\odot}) \cos {}^1\!/_2 (\delta + \delta_{\odot})$$

$$\Delta \cos M = \delta - \delta_{\odot}$$

$$n \sin N = \frac{d}{dt} (\alpha - \alpha_{\odot}) \cos {}^1\!/_2 (\delta + \delta_{\odot})$$

$$n \cos N = \frac{d}{dt} (\delta - \delta_{\odot}),$$

$\frac{d}{dt} (\alpha - \alpha_0)$ ist die Differenz der stündlichen Bewegungen.

$$\sin \psi = \frac{\Delta \sin (M - N)}{R \pm \varrho}$$

$$\tau = - \frac{\Delta}{n} \cos (M - N) - \frac{R \pm \varrho}{n} \cos \psi \begin{cases} + \text{ äusserer Contact} \\ - \text{ innerer } \quad " \end{cases}$$

$$\tau' = - \frac{\Delta}{n} \cos (M - N) + \frac{R \pm \varrho}{n} \cos \psi \begin{cases} + \text{ äusserer Contact} \\ - \text{ innerer } \quad " \end{cases}$$

So findet vom Mittelpunkte aus gesehen der Eintritt zur Zeit

$$t + \tau,$$

und der Austritt zur Zeit

$$t + \tau'$$

tatt, wobei t die Zeit der Conjunction bezeichnet, und zwar an en Stellen, die gegeben sind durch die Winkel

$$S = N - \psi + 180^0 \text{ für Eintritt,}$$
$$S = N + \psi \qquad \text{„ Austritt.}$$

S ist der Winkel, den der grösste Kreis zwischen den beiden Mittelpunkten (Sonne-Planet) einschliesst mit demjenigen Declinationskreis, den die Sonne im Moment der Berührung passirt.

Für einen bestimmten Ort von der Länge λ und Breite φ.

Seien

$\pi_{\odot}$ und π die Horizontalparallaxen für Sonne und Planet,
μ Sternzeit zur Zeit T oder T',
$f s g h$ Hülfsvariable.

$$f \sin s = \pi \cos(R \pm \varrho) - \pi_{\odot}$$
$$f \cos s = - \pi \sin(R \pm \varrho)$$
$$\sin(g - \alpha_{\odot}) \cos h = \sin s \sin S$$
$$\cos(g - \alpha_{\odot}) \cos h = \cos s \cos \delta_{\odot} - \sin s \sin \delta_{\odot} \cos S$$
$$\sin h = \cos s \sin \delta_{\odot} + \sin s \cos \delta_{\odot} \cos S$$
$$\cos \zeta = \sin \varphi \sin h + \cos \varphi \cos h \cos(g - \mu - \lambda)$$

(zweimal zu rechnen für μ zu T und μ' zu T').

Man hat für den Eintritt:

$$T = t + \tau + \lambda - \frac{f \cos \zeta}{n \cos \psi},$$

und für den Austritt:

$$T' = t - \tau + \lambda + \frac{f \cos \zeta'}{n \cos \psi}.$$

Man vergleiche Dubois: Les Passages de Venus, Paris 1873.

§. 257.

Berechnung der Saturnringerscheinungen.

Sei ☊ die mittlere Länge des aufsteigenden Knotens des Ringes, bezogen auf die Ekliptik

$$☊ = 166^0\ 53'\ 8{,}9'' + 46{,}462''\ (t - 1800),$$

N dieselbe Grösse in Bezug auf den Aequator,
i die Neigung der Ringebene, bezogen auf die Ekliptik,
I „ „ „ „ „ „ d. Aequator

$$i = 28^0\ 10'\ 44{,}7'' - 0{,}350''\ (t - 1800),$$

ε die Ekliptikschiefe,

α, δ die geocentrischen Saturncoordinaten,

λ, β die heliocentrischen „

a die grosse Axe des Planeten für die mittlere Distan

r die mittlere Saturndistanz von der Sonne,

$$\log a r = 2{,}57416,$$

a' die scheinbare Grösse der grossen Axe des äusser sten Ringes,

b' die scheinbare Grösse der kleinen Axe des äusser sten Ringes,

p der Winkel der kleinen Axe der Ringellipse mit der Declinationskreise (östlich +, westlich —),

ll' Erhöhungswinkel der Erde über der Ringebene von Saturn aus gesehen (nördlich +, südlich —),

Q, φ Hülfswinkel.

$$tg\,\varphi = tg\,i\cos\Omega$$

$$tg\,N = \frac{\sin\varphi}{\sin(\varphi + \varepsilon)}\,tg\,\Omega$$

$$tg\,I = \frac{tg(\varphi + \varepsilon)}{\cos N}$$

$$tg\,Q = tg\,I\sin(\alpha - N)$$

$$tg\,p = -\frac{ctg(\alpha - N)}{\cos(Q - \delta)}\sin Q$$

$$tg\,l = tg(Q - \delta)\cos p$$

$$a' = \frac{a\,r}{\varDelta}$$

$$b' = a'\sin l$$

$$\sin\varphi = \frac{\sin\beta}{\cos\beta\sin(\lambda - \Omega)}$$

$$\sin l' = \frac{\sin\beta\sin(i - \varphi)}{\sin\varphi}.$$

§. 258.

Vorausberechnung der Sternbedeckungen.

(Methode von Bessel.)

Seien α_* die Rectascension, δ_* die Declination } des zu bedeckenden Sternes.

α die Rectascension, β die Declination } des Mondes,

$\left.\begin{array}{l}\Delta\alpha\\ \Delta\delta\end{array}\right\}$ die stündlichen Veränderungen der Rectascension und Declination für den Mond,

π die Aequatorealparallaxe des Mondes,

T die der Bedeckung nächste Stunde (mittl. Ortszeit),

μ die zu T gehörige in Bogen verwandelte Sternzeit,

φ die Polhöhe des Ortes,

e die Excentricität des Erdmeridians.

Man rechne die Grössen:

$$A = \frac{\cos\varphi}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2\varphi}}$$

$$B = \frac{(1 - e^2)\sin\varphi}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2\varphi}}$$

$$p = \frac{(\alpha - \alpha_*)\cos\delta}{\pi} \qquad p' = \frac{\Delta\alpha\cos\delta}{\pi}$$

$$q = \frac{\delta - \delta_*}{\pi} \qquad q' = \frac{\Delta\delta}{\pi}$$

$$\begin{aligned}
a &= A\sin(\mu - \alpha_*)\\
b &= A\cos(\mu - \alpha_*)\\
c &= B\cos\delta_*\\
u &= a\\
v &= c - b\sin\delta_*\\
u' &= \lambda b\\
v' &= \lambda a \sin\delta_*\\
\log\lambda &= 9{,}41916\\
m\sin M &= p - u\\
m\cos M &= q - v \qquad M,\ N \text{ immer } +\\
n\sin N &= p' - u'\\
u\cos N &= q' - v'\\
\cos\psi &= \frac{m}{k}\sin(M - N)\\
\log k &= 9{,}43609\\
\psi &< 180^\circ.
\end{aligned}$$

Dann ist

$$T \mp \left\{- \frac{m\cos(M - N)}{n} \mp \frac{k\sin\psi}{n}\right\} \cdot 3600$$

die Zeit des Ein- und Austrittes.

Wenn

$$\cos\psi > 1,$$

dann findet keine Bedeckung statt.

Endlich ist der Ort des Ein- und Austrittes durch de Winkel Q gegeben. Dieser giebt die Richtung: Mondmittelpunkt Stern und Nordpol von Norden gegen Westen gezählt.

Es ist:

$$Q = N \pm \psi - 90^0 \begin{cases}\text{Eintritt}\\ \text{Austritt.}\end{cases}$$

Die ganze Rechnung ist zu wiederholen, um strenge Resultat zu erhalten. Bei der Wiederholung werden die Grössen α, δ, T, für die Zeit der Mitte der gefundenen Zeit des Ein- und Austrittes gerechnet.

Im Berliner Jahrbuch findet man für gewöhnlich die helleren Sternbedeckungen schon angegeben und auch die Hülfsgrössen

$$p \quad q \quad p' \quad q' \quad T,$$

sowie

$$h \quad \log\sin\delta_* \quad \log\cos\delta_*.$$

Man hat dann zu rechnen wie folgt:

$$a = A\sin(h + \lambda)$$
$$b = A\cos(h + \lambda)$$
$$c = B\cos\delta_*;$$

λ ist die Länge von Berlin (+ östlich, — westlich)

$$u = a$$
$$v = c - b\sin\delta_*$$
$$u' = \lambda b$$
$$v' = \lambda a \sin\delta$$
$$\log\lambda = 9{,}41916.$$

Die übrige Rechnung wird wie oben geführt, und sind

$$p \quad q \quad p' \quad q'$$

dem Berliner Jahrbuch zu entnehmen. In die Zeit des Ein- und Austrittes ist noch die Längendifferenz anzubringen, um den Ein- und Austritt in Ortszeit zu haben.

Ist der bedeckte Stern ein Planet, so hat man statt der Grösse k bei der Berechnung des Winkels ψ zu setzen:

$$k \pm \frac{\sigma}{w} \begin{Bmatrix}\text{Eintritt am I. Austritt am II.}\\ \text{,, ,, II. ,, ,, I.}\end{Bmatrix} \text{Rand,}$$

wobei σ der Halbmesser des Planeten,

ω die Horizontaläquatorealparallaxe des Mondes weniger jener des Planeten,

d statt der Grösse λ_1

$$\lambda - 0{,}0000727\,\mu$$

, wobei μ die stündliche Aenderung der Rectascension des aneten in Secunden ausgedrückt bezeichnet.

§. 259.

erechnung der Längendifferenz aus Sternbedeckungen.

Es wird vorausgesetzt, dass man schon einen rohen Werth ›r Längendifferenz kennt.

Die Sternbeobachtungen werden mit Hülfe dieser Differenz ıf Berlin reducirt und die Mitte der Zeiten T bestimmt. Es erden aus dem Berliner Jahrbuch die

$$\alpha_{☾} \quad \delta_{☾} \quad \pi_{☾}$$

ectascensionen, Declinationen und Parallaxen für die Zeiten

$$T \quad T \pm 1^h \quad T \pm 2^h \ldots$$

ntnommen. Dabei ist T auf Stunde abzurunden. Nun bestimme ıan für die drei Zeiten

$$T \quad T \pm 1^h$$

ie Grössen

$$p = \frac{\cos\delta_*}{\sin\pi_{☾}} \sin(\alpha_{☾} - \alpha_*)$$

$$\beta = \sin\delta_{☾} \cos\delta_*$$

$$\beta' = \cos\delta_{☾} \sin\delta_* \cos(\alpha_{☾} - \alpha_*)$$

$$q = \frac{\beta - \beta'}{\sin\pi_{☾}},$$

α_* und δ_* sind die Rectascension und Declination des bedeckten Sternes. Man bilde für p und q das Schema:

$$\begin{array}{r|lll} (T-1)^h & g-1 & & \\ & & \Delta g_{-1} & \\ T^h & g & & \Delta^2 g \qquad \Delta g = \tfrac{1}{2}(\Delta g_{-1} + \Delta g_{+1}), \\ & & \Delta g_{+1} & \\ (T+1)^h & g+1 & & \end{array}$$

lann wird für

$$
\begin{array}{r|l}
(T-1)^h & \dfrac{dg}{dt} = \Delta g - \tfrac{1}{2}\Delta^2 g \\
T & \dfrac{dg}{dt} = \Delta g \\
(T+1)^h & \dfrac{dg}{dt} = \Delta g + \tfrac{1}{2}\Delta^2 g.
\end{array}
$$

Sei nun:

t_1 die mittlere Ortszeit der Beobachtung⎫
λ_1 die Längendifferenz (genähert) ⎭ am Orte I.

$t_2\, \lambda_2$ dieselben Grössen am Orte II,

ferner

$$(T) = \frac{t_1 + t_2 - (\lambda_1 + \lambda_2)}{2},$$

so bestimme man die zur Zeit

$$T' = t_1 - (T) - \lambda_1$$

gehörigen Werthe von

$$\frac{dp}{dt} \text{ und } \frac{dq}{dt}$$

durch Interpolation.

Nun rechne man:

$$\xi = \varrho \cos\varphi' \sin(\theta - \alpha_*)$$
$$\eta = \varrho \{\sin\varphi' \cos\delta_* - \cos\varphi' \sin\delta_* \cos(\theta - \alpha)\}.$$

Dabei ist φ' die geocentrische Breite,

ϱ der Radiusvector des Beobachtungsortes.

$$m \sin M = p_0 - \xi$$
$$m \cos M = q_0 - \eta$$
$$n \sin N = \frac{dp}{dt}$$
$$n \cos N = \frac{dq}{dt}$$
$$\sin\psi = \frac{m}{k} \sin(M - N).$$

Für Eintritte ψ im I. oder IV. Quadranten, für Austritte im II. oder III. sind zu nehmen:

$$\log \frac{1}{k} = 0{,}5646335$$

$$T'' = \frac{m}{s} \frac{\cos(M - N - \psi)}{\cos\psi}$$

$$log \frac{1}{s} = 1{,}7781512$$

$$h = \frac{s}{206265 \, . \, n \, sin \, \pi_{☾}}$$

$$log \frac{s}{206265} = 6{,}4637256$$

$$A = \frac{h}{sin \, \psi} \, cos \, (N + \psi) \, cos \, \delta_{☾}$$

$$B = \frac{h}{sin \, \psi} \, sin \, (N + \psi).$$

Sind dann $\varDelta \alpha$ und $\varDelta \delta$ die Correctionen der Mondcoordinaten, so hat man für die wahre Längendifferenz:

$$d_1 = t_1 - (T) + T'' - A \, . \, \varDelta \alpha + B \, . \, \varDelta \delta.$$

Ebensolche Gleichung findet man für den anderen Ort, und zwar:

$$d_2 = t_2 - (T) + T_2'' - A \, . \, \varDelta \alpha + B \, . \, \varDelta \delta.$$

So hat man nun für Austritt und Eintritt an beiden Orten vier Gleichungen für die drei Grössen:

$$d_2 - d_1 \, . \, \varDelta \alpha \, . \, \varDelta \delta.$$

§. 260.

Mondesfinsternisse.

Bedingung.

$$\beta_{☾} < \delta + \pi + p - d$$

$\beta_{☾} < 52'$ Finsterniss sicher,

$52' < \beta_{☾} < 63'$ „ möglich,

$\beta_{☾} > 63'$ „ unmöglich,

dabei ist:

π Aequatoreal-Horizontalparallaxe des Mondes,

p „ „ der Sonne,

δ scheinbare halbe Durchmesser des Mondes,

d „ „ „ der Sonne,

$\beta_{☾}$ die Mondbreite im Augenblick der Conjunction.

Anfang, Mitte und Ende der Finsterniss.

Seien $\alpha_{\odot}$ $\delta_{\odot}$ die äquatorealen Coordinaten der Sonne,

$\alpha_{☾}$ $\delta_{☾}$ „ „ „ des Mondes,

$$P' = [9{,}99929]\,\pi$$

$$A = \frac{61}{60}\,(\pi + p - d)$$

$$A' = \frac{61}{60}\,(\pi + p + d).$$

Man rechne:

$$\alpha = \alpha_{☾} - (\alpha_{\odot} \pm 12^h)$$

$$\alpha_1 = \frac{d\alpha}{dt} = \text{stündliche Bewegung von } \alpha$$

$$x = \delta_{☾} + \alpha + \delta_{\odot}$$

$$y = \alpha \cos \delta_{☾}$$

$$x_1 = \frac{dx}{dt}$$

$$y_1 = \alpha_1 \cos \delta_{☾}$$

$$\Delta' = \begin{cases} A \pm \delta \begin{Bmatrix}\text{innere}\\ \text{äussere}\end{Bmatrix} \text{Berührung des Halbschattens} \\ A' \pm \delta \begin{Bmatrix}\text{innere}\\ \text{äussere}\end{Bmatrix} \quad " \quad " \quad \text{Vollschattens} \end{cases}$$

$$tg\,S = \frac{y}{x}$$

$$cotg\,i = \frac{y_1}{x_1}$$

$$W = \frac{y}{\sin S} = \frac{x}{\cos S}$$

$$n = W \cos\{-(S + i)\}$$

$$\cos w = \frac{n}{\Delta'}$$

$$c = \frac{W \cos i}{y_1 \cos w} \cdot 3600''$$

$$t_1 = c \sin\{-(S + i) - w\}$$

$$t_2 = c \sin\{-(S + i) + w\}.$$

Dann ist:

Zeit für den Anfang $T + t_1$

" " das Ende $T + t_2$

" " die Mitte $T + \frac{t_1 + t_2}{2}$,

und im Falle einer partiellen Mondfinsterniss, Grösse der Finsterniss im Monddurchmesser:

$$\frac{\Delta' - n}{2\delta}.$$

Man findet endlich, wenn die Winkel im umkehrenden Fern-hre von Nord über Ost gezählt werden:

$$\text{Eintritt} \quad S_1 = (-i) - w$$
$$\text{Austritt} \quad S_2 = (-i) + w.$$

Dabei ist T die Zeit der Conjunction.

Man hat hierbei angenommen, dass im Maximum

$$\delta = 16'\,45'' \quad d = 16'\,18'' \quad \pi = 61'\,24'' \quad p = 9'',$$

nd im Minimum

$$\delta = 14'\,41'' \quad d = 15'\,45'' \quad \pi = 53'\,38'' \quad p = 8{,}6''$$

ird.

§. 261.

Sonnenfinsterniss.

Bedingung:

$$\lambda_{☾} < d + \delta + \pi - p,$$

s ist überhaupt:

$$\lambda_{☾} < 1^0\,24' \quad \text{Finsterniss sicher,}$$
$$1^0\,24' < \lambda_{☾} < 1^0\,34' \quad \text{„ möglich,}$$
$$\lambda_{☾} > 1^0\,34' \quad \text{„ unmöglich,}$$

labei ist:

π Horizontal-Aequatorealparallaxe des Mondes,
p „ „ der Sonne,
δ wahrer Halbmesser des Mondes,
d „ „ der Sonne.

Man kann auch sagen: Beträgt beim Neumond der Abstand der Sonne vom nächsten Mondknoten

weniger als $9^0\,33'$, so findet eine totale,
„ „ $11^0\,54'$, so kann eine totale stattfinden,
„ „ $15^0\,23'$, so muss eine partiale stattfinden,
„ „ $18^0\,21'$, so kann „ „ „

Es ist:

die grösste Länge des Mondschattens = 51000 geogr. Meilen,
„ kleinste „ „ „ = 49350 „ „
der grösste Durchmesser des Kernschattens = 35 geogr. Meilen.

Man bestimme die relative Bahnneigung i aus

$$tg\, i = \frac{D_1}{\alpha_1 \cos \delta_{\odot}}$$

$$D_1 = \frac{d\,\delta_{☾}}{d\,t} - \frac{d\,\delta_{\odot}}{d\,t} \qquad \alpha_1 = \frac{d\,\alpha_{☾}}{d\,t} - \frac{d\,\alpha_{\odot}}{d\,t}.$$

Die Differentialquotienten drücken die stündliche Bewegung aus:

$$n = \partial \cos i$$

∂ = Differenz der Declinationen im Momente der Opposition

$$c = \frac{n \sin i}{D_1}\ (3{,}55630)$$

$$t = c\, tg\, i.$$

So wird die Zeit der Mitte der Finsterniss:

$$T_m = \text{Zeit der Conjunction} - t.$$

Sei noch:

$$\cos w = \frac{n}{\Delta}$$

$$\tau = c\, tg\, w.$$

Δ wahre Distanz der beiden Centra Sonne, Mond. Dann ist für den Anfang der Finsterniss:

$$T_m - \tau,$$

und für das Ende:

$$T_m + \tau.$$

Für Δ hat man zu nehmen:

$P' + \delta + d$ für eine partielle,
$P' + \delta - d$ „ „ totale,
$P' - \delta + d$ „ „ ringförmige,
P' „ „ centrale,

wobei

$$P' = [9{,}99929]\ (\pi - p).$$

Die Zahl in der Klammer ist ein Log.

Länge und Breite φ der Orte, wo Anfang gesehen wird.

$$a = (-i) - w$$

$$\sin \varphi = \cos a \cos \delta_{\odot}$$

$$tg\, h = -\frac{tg\, a}{\sin \delta_{\odot}}$$

Oestliche Länge $= h - T_m + \tau$.

Länge und Breite φ' der Orte, wo Ende gesehen wird.

$$b = (-i) + w$$
$$\sin \varphi' = \cos b \cos \delta_{\odot}$$
$$tg\, h' = -\frac{tg\, b}{\sin \delta_{\odot}}$$
$$\text{Oestliche Länge} = h' - T_m - \tau.$$

§. 262.

Berechnung der Sonnenfinsternisse nach Bessel.

(Vergl. Bessel's Abhandlungen, herausgegeben von Engelmann, Leipzig, 1876, 3, 369, oder auch Loomis: An introduction to prac. astronomy. New York 1888, p. 277.)

1) Man interpolirt die Declination und Rectascension des Mondes und der Sonne, sowie die Parallaxe des Mondes und des Radiusvectors der Erde etwa für zwei bis drei Stunden vor und nach der Conjunction.

Es sei sodann:

T die ungefähre Zeit der Conjunction,
$\left.\begin{matrix}\alpha\\ \alpha'\end{matrix}\right\}$ die Rectascension $\left\{\begin{matrix}\text{des Mondes,}\\ \text{der Sonne,}\end{matrix}\right.$
$\left.\begin{matrix}\delta\\ \delta'\end{matrix}\right\}$ die Declination $\left\{\begin{matrix}\text{des Mondes,}\\ \text{der Sonne,}\end{matrix}\right.$
π die Aequatoreal-Horizontalparallaxe des Mondes,
r der Radiusvector der Erde,

so sind folgende Grössen zu rechnen:

$$e = \frac{\sin 8{,}84''}{r \sin \pi} \qquad h = \frac{1}{\sin \pi}$$

$$A - \alpha' = -\frac{e \cos \delta \,.\, \sec \delta' \,.\, (\alpha - \alpha')}{1 - e \cos \delta \,.\, \sec \delta'}$$

$$D - \delta' = \frac{e(\delta - \delta')}{1 - e}$$

$$g = \frac{1 - e \cos \delta \sec \delta'}{\cos D \sec \delta'}$$

$$x = h \cos \delta \sin (\alpha - A)$$
$$y = h[\sin (\delta - D) \cos^2 {}^1\!/_2 (\alpha - A) + \sin (\delta + D) \sin^2 {}^1\!/_2 (\alpha - A)]$$
$$z = h[\cos (\delta - D) \cos^2 {}^1\!/_2 (\alpha - A) - \cos (\delta + D) \sin^2 {}^1\!/_2 (\alpha - A)]$$

$$sin f = \begin{cases} \dfrac{7,6688050}{r g} \text{ für die äussere} \\ \dfrac{7,6666896}{r g} \text{ für die innere} \end{cases} \text{ Berührung,}$$

$$i = tg f$$

$$k = 0,2725 \quad log\, k = [9,4353665]$$

$$l = z\, tg f \mp k\, sec f.$$

Sei ferner:

μ die Sternzeit der Conjunction des Beobachtungsortes,
μ' „ „ „ „ „ Meridian der Ephemeride (Berlin),
λ die Länge des Beobachtungsortes (östliche +, westliche —)
φ' die geocentrische Breite
ϱ der Radiusvector der Erde } für den Beobachtungsort,

so sind folgende Grössen zu rechnen:

$$\xi = \varrho\, cos\, \varphi'\, cos\, (\mu - A)$$

$$\eta = \varrho\, [sin\, \varphi'\, cos\, D - cos\, \varphi'\, sin\, D\, cos\, (\mu - A)]$$

$$\zeta = \varrho\, [sin\, \varphi'\, sin\, D + cos\, \varphi'\, cos\, D\, cos\, (\mu - A)]$$

$$d\,\xi = \varrho\, cos\, \varphi'\, cos (\mu - A)\, d\, (\mu - A)$$

$$d\,\eta = \xi\, sin\, D\, d\, (\mu - A) - \zeta\, d\, D$$

Die Variation von A und D sind die ersten Differenzen der durch stündliche Berechnung gefundenen A und D Werthe.

Die Variation von μ ist aus dem Berliner Jahrbuche zu berechnen (= Diff. der zwei auf einander folgenden Tage, dividirt durch 24):

$$m\, sin\, M = x - \xi$$

$$m\, cos\, M = y - \eta$$

$$n\, sin\, N = d\,x - d\,\xi$$

$$n\, cos\, N = d\,y - d\,\eta$$

(m und n sind immer positiv zu nehmen),

wobei $d\,x$ und $d\,y$ die stündlichen Variationen von x und y sind. d. h. die ersten Differenzen der durch stündliche Interpolation gefundenen x und y Werthe.

$$l - i\,\zeta = L$$

$$sin\, \psi = \frac{m}{L}\, sin\, (M - N),$$

wobei ψ nur im ersten oder letzten Quadranten liegen kann; dann ist für den Anfang der Finsterniss:

$$t_1 = -\frac{m}{n} \cos(M - N) - \frac{L}{n} \cos\psi,$$

nd für das Ende:

$$t_2 = -\frac{m}{n} \cos(M - N) + \frac{L}{n} \cos\psi,$$

nd die ungefähre Zeit des Anfanges

$$T + \lambda + t_1,$$

ınd des Endes

$$T + \lambda + t_2.$$

Mit diesen Werthen rechnet man nun, für die genäherte Zeit les Anfangs:

$$T_1 = t_1 + \lambda + T,$$

ınd des Endes:

$$T_2 = t_2 + \lambda + T,$$

lie genaueren, indem man die Formeln wiederholt. Man findet so:

$$t'_1 \text{ und } t'_2,$$

ınd u wird endlich die Zeit des Anfangs resp. Endes:

$$T_{\text{Anfang}} = T_1 + t'_1$$
$$T_{\text{Ende}} = T_2 + t'_2,$$

ferner der Winkel des Berührungspunktes für den Anfang Q vom Nordpunkte aus gerechnet:

$$Q_1 = 180^0 + N - \psi,$$

und derjenige für das Ende:

$$Q_2 = N + \psi.$$

§. 263.

Phase des Mondes.

Sei $L_{\odot}$ die Sonnenlänge,
$L_{☾}$ die Mondlänge

für eine Epoche t, welche unmittelbar vorangeht in den Tafeln jener Zeit, für welche die Differenz

$L_{☾} - L_{\odot} =$ 0° für Neumond,
90° „ Erstes Viertel,
180° „ Vollmond,
270° „ Letztes Viertel.

Seien ferner:

μ' die tägliche Bewegung der Sonne,
μ „ „ „ des Mondes,

so wird:

$$\tau = \frac{t + n + L_{☾} - L_{\odot}}{\mu - \mu'},$$

wobei für n der Reihe nach 0°, 90°, 180°, 270° zu setzen ist. Auf diese Weise bekommt man die genaue Zeit τ der Mondphase.

Will man für eine beliebige Zeit die Grösse g und den Positionswinkel u der Phase des Mondes haben, so seien

$\alpha_{\odot}$ $P_{\odot}$ die Rectascension und Poldistanz der Sonne,

$\alpha_{☾}$ $P_{☾}$ „ „ „ „ des Mondes,

auf das Erdcentrum bezogen,

$\alpha'_{\odot}$ $P'_{\odot}$ dieselben Grössen für die Sonne, bezogen auf den Mondmittelpunkt,

$\alpha'_{☾}$ $P'_{☾}$ dieselben Grössen für den Mond, bezogen auf den Beobachtungsort.

Um diese letzteren zu finden, wende man die gewöhnliche Parallaxenreduction an. Die ersteren erhält man ebenso, nur wird statt der Erdradien ϱ die Entfernung der Erde vom Monde genommen und es werden die strengen Formeln für die Parallaxe angewendet.

Man hat:

$$\cos g = \cos P'_{\odot} \cos P'_{☾} + \sin P'_{\odot} \sin P'_{☾} \cos(\alpha'_{\odot} - \alpha'_{☾})$$

$$\sin g \sin u = \cos P'_{\odot} \sin P'_{☾} - \sin P'_{\odot} \cos P'_{☾} \cos(\alpha'_{\odot} - \alpha'_{☾}).$$

§. 264.

Berechnung der Libration in Länge und Breite.

Sei l die mittlere Länge des Mondes,

☊ „ „ „ „ aufsteigenden Mondknotens,

I „ „ Neigung des Mondäquators gegen die Ekliptik $= 1^{\circ} 32' 9'',0$,

☋ $= 180^{\circ} +$ ☊.

Man rechne:

$$tg B' = tg I \sin(\lambda - ☋)$$

$$D = \sin I \cos(\lambda - ☋)$$

$$E = tg^2 \tfrac{1}{2} I \sin 2(\lambda - ☋),$$

so ist die Libration in Länge

$$\Delta\lambda = \lambda - l - D . \Delta\beta + E$$

nd die Libration in Breite:

$$\varDelta\beta = B' - \beta.$$

β und λ bezeichnen die Mondbreite und die Mondlänge. ie Grössen β und λ können aus α und δ berechnet werden, ie folgt:

$$\sin\gamma = \sin\varepsilon\cos\alpha$$
$$tg\,\eta = tg\,\varepsilon\sin\alpha$$
$$tg\,\chi = \sin\varepsilon\cos\alpha\, tg\,(\delta - \eta)$$
$$tg\,(\alpha + \zeta) = \frac{tg\,\alpha}{\cos\varepsilon},$$

o wird:

$$\lambda = \alpha + \zeta + \chi$$
$$\sin\beta = \cos\gamma\sin(\delta - \eta).$$

Man hat:

Maximum	der	geocentrischen	Libration	in Länge	7° 53′ 51″,0
„	„	„	„	„ Breite	6° 50′ 45″,0
„	„	parallaktischen	„		1° 1′ 35″,0
„	„	geocentrischen	„		10° 25′ 22″,0
„	„	totalen	„		11° 25′ 30″,0

§. 265.

Bestimmung der Position des Mondpoles und Mondäquators.

Sei ε die Ekliptikschiefe,
☊ „ mittlere Länge des aufsteigenden Knotens + 180°,
I „ Neigung des Mondäquators 1° 32′ 9″.

Man rechne:

$$tg\,A = \frac{\cos {}^1/_2\,(\varepsilon - I)}{\cos {}^1/_2\,(\varepsilon + I)}\, tg\, {}^1/_2\, ☊$$
$$tg\,B = \frac{\sin {}^1/_2\,(\varepsilon - I)}{\sin {}^1/_2\,(\varepsilon + I)}\, tg\, {}^1/_2\, ☊,$$

so ist:

$$\sin {}^1/_2\, i = \frac{\sin {}^1/_2\,(\varepsilon - I)}{\sin B}\, \sin {}^1/_2\, ☊.$$

i ist die Neigung des Mondäquators, bezogen auf den Erdäquator:

$$\varDelta = A + B$$
$$☊' = A - B.$$

$\varDelta$ = dem Bogen vom aufsteigenden Knoten des Mondäquators, bezogen auf den Erdäquator bis zum aufsteigenden Knoten des Mondäquators, bezogen auf die Ekliptik.

Ω' = Rectascension des aufsteigenden Knotens des Mondes bezogen auf den Erdäquator.

Die Grössen $\varDelta$, Ω' und i findet man im Nauticalalmanach von zehn zu zehn Tagen angeführt.

Sei ferner ξ der Winkel zwischen dem Declinationskreis und der Mondaxe im scheinbaren Mondmittelpunkte, so ist

$$\sin \xi = -\sin i \, \frac{\cos(\alpha' - \Omega')}{\cos \beta'}$$
$$= -\sin i \, \frac{\cos(l_0 + l' + B)}{\cos \delta'},$$

dabei ist:

α' die geocentrische Rectascension des Mondes,
δ' „ „ Declination „ „
β' „ „ Mondbreite,
l_0 „ mittlere Mondlänge,
l' „ die Mondlibration in der Länge.

§. 266.

Relative Bahnen.

a) Bahnen der Planetenmonde in Bezug auf die Sonne.

(Weyer: Astron. Nachr. S. 3007.)

Seien x und y die heliocentrischen Coordinaten, von einer Opposition als Anfangsrichtung ausgehend,

t die Zeit in mittleren Sonnentagen seit der Opposition,

a und a' die Bahnradien des Planeten und seines Mondes,

μ die mittlere tägliche siderische Bewegung des Planeten um die Sonne,

μ' die mittlere tägliche siderische Bewegung des Mondes um den Planeten,

ϱ der Krümmungsradius der Satellitenbahn um die Sonne,

$$\frac{a}{a'} = R$$

$$\frac{\mu'}{\mu} = M,$$

so ist:

$$x = a \cos \mu t + a' \cos \mu' t$$

$$y = a \sin \mu t + a' \sin \mu' t$$

$$\frac{\varrho}{a'} = \frac{\{R^2 + M^2 + 2 R M \cos(\mu' t - \mu t)\}^{3/2}}{R^2 + M^3 + R M (M + 1) \cos(\mu' t - \mu t)}.$$

Für den Erdmond ist:

$$R^3 + M^3 > R M (M + 1)$$

$$M < R.$$

Demnach hat die Mondbahn um die Sonne ausnahmsweise weder Doppelpunkt noch Inflexion, noch Spitze, sie kehrt vielmehr ständig ihre concave Seite der Sonne zu.

b) Scheinbare Planetenbahnen.

Seien n und N die mittleren Bewegungen } für einen
v „ V „ Geschwindigkeiten } Planeten
r „ R „ Entfernungen von der Sonne } u. die Erde

so wird

$$n dt = \frac{V}{r} dt \qquad N dt = \frac{V}{R} dt.$$

Man hat für die relative Längendifferenz:

$$\frac{dL_1}{dt} = \frac{rv + RV + (Rv + Vr) \cos(\odot - l)}{r_1^2},$$

wobei

$$r_1 \cos L_1 = r \cos l + R \cos \odot.$$

In der Opposition ist:

$$\odot - l = 180^0,$$

also

$$\frac{dL_1}{dt} = \frac{(r - R)(v - V)}{r_1^2} = \text{negativ},$$

d. h. der Planet ist retrograd. Ist

$$\frac{dL_2}{dt} = 0, \text{ d. h.}$$

$$\cos(\odot - l) = -\frac{rv + RV}{Rv + Vr},$$

so wird der Planet stationär. $\odot$ ist die heliocentrische Länge der Sonne.

§. 267.

Aufstellungsfehler beim Aequatorial.

(Vgl. Chauvenet: Spherical Astronomie II, Cap. IX.)

Schema:

Stern	Kreis	Pos. Kreis	Stern-zeit Mittel	Stunden-kreis Mittel	Declinations-kreis Mittel
✱.	praecedens	a	θ_1	t_1	d_1
		b	θ_2 — θ	t_2 — t	d_2 — d
	sequens	b	θ'_1	t'_1	d'_1
		a	θ'_2 — θ'	t'_2 — t'	d'_2 — d'

Statt bei den Beobachtungen in der Nähe des Meridians sofort die Kreislage zu notiren, verzeichnet man zunächst: Fernrohr Ost oder West und benutzt folgende Bezeichnung:

Obere Culm. Fernrohr

O = Kreis praec. = Fernrohr links } Südstern, rechts } Polstern
W = „ sequens = „ rechts } Südstern, links } Polstern

Untere Culm. Fernrohr

O = Kreis sequens = Fernrohr rechts
W = „ praec. = „ links.

1. Man hat nun zunächst an die abgelesenen Stundenwinkel t und die Declination d die Refraction anzubringen und zwar mit folgenden Zeichen:

$$\text{Refr. Corr. an } t\ (t') = +\, k'\, tg\, z\, sin\, q\, sec\, \delta$$
$$\text{„ „ „ } d\ (d') = -\, k'\, tg\, z\, cos\, q,$$

wobei k' die Refraction ist und

$$tg\, N = ctg\, \varphi\, cos\, \tau$$
$$tg\, z\, sin\, q = \frac{tg\, \tau\, sin\, N}{sin\, (\delta + N)}$$
$$tg\, z\, cos\, q = ctg\, (\delta + N).$$

Man bilde:

$$\tau_0 = {}^1/_4\, \{\theta + \theta' - \{\alpha + \alpha'\}\}$$
$$t_0 = {}^1/_2\, (t + t')$$
$$D = {}^1/_2\, (d + d'),$$

nachdem diese Grössen wegen Refraction corrigirt erscheinen.

Dann lauten die Formeln zur Fehlerberechnung:

$$\xi \cos \tau_0 + \eta \sin \tau_0 + B_0 e = D - \delta$$

$$\varDelta t - \xi \sin \tau_0 \, tg\, \delta + \eta \cos \tau_0 \, tg\, \delta + B' e = \tau_0 - t_0,$$

wobei

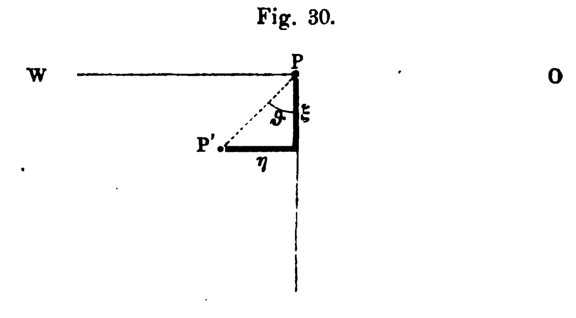
$$B_0 = \sin \varphi \cos \delta - \cos \varphi \sin \delta \cos \tau_0$$

$$B'_0 = \cos \varphi \sec \delta \sin \tau_0$$

und ξ und η die Fehlercoordinaten sind; e ist die Biegung des Fernrohres im Horizont; $\varDelta t$ Indexcorrection für den Stundenkreis.

P ist der wahre, P' der Instrumentalpol.

Fig. 30.



Im Meridian gestalten sich die Gleichungen wesentlich einfacher:

I. $\tau_0 = 0^h$ (obere Culmination).

$$\xi + e \sin (\varphi - \delta) = D - \delta$$

$$\varDelta t + \eta \, tg\, \delta = \tau_0 - t_0.$$

II. $\tau_0 = 12^h$ (untere Culmination).

$$-\xi + e \sin (\varphi + \delta) = D - \delta$$

$$\varDelta t - \eta \, tg\, \delta = \tau_0 - t^0.$$

Der Collimationsfehler findet sich aus der Vergleichung beider Kreislagen. Es ist:

I. Ausserhalb des Meridians.

$$c \sec \delta - i \, tg\, \delta + \varepsilon (\sin \varphi \, tg\, \delta + \cos \varphi \cos \tau_0) = \tfrac{1}{2} [t' - 180 - \tau' - (t - \tau)].$$

NB. Ist t' nicht um 180° abgelesenes t, dann ist recht 180 wegzulassen.

II. Im Meridian.

$$c \sec \delta - i \, tg\, \delta + \varepsilon \cos (\varphi - \delta) \sec \delta = \tfrac{1}{2} [t' - 180 - \tau' - (t - \tau)].$$

Dabei ist:

c der Collimationsfehler,

i die Abweichung des Winkels zwischen Pol- und Declinationsaxe von 90^0,

ε die Maximalbiegung der Declinationsaxe.

§. 268.

Kreismikrometer.

Es seien mit

$$\alpha_{☄} \qquad \delta_{☄}$$

die Rectascension und Declination des zu bestimmenden Objectes, ferner mit

$$\alpha_* \qquad \delta_*$$

dieselben Grössen eines bekannten Sternes bezeichnet. Man beobachtet die Ein- und Austritte beider Objecte am Mikrometer. Die zugehörigen Zeiten seien für

$$\begin{array}{ccccc} ☄ & t_1 & t_2 & t_3 & t_4 \\ * & t_1' & t_2' & t_3' & t_4' \end{array}$$

Sodann bilde man folgendes Schema:

$$\begin{array}{cc|cc} \multicolumn{2}{c|}{☄} & \multicolumn{2}{c}{*} \\ t_1 & t_2 & t_1' & t_2' \\ t_4 & t_3 & t_4' & t_3' \end{array}$$

$$\tau_1 = \frac{t_1 + t_4}{2} \quad \tau_2 = \frac{t_2 + t_3}{2} \quad \tau_1' = \frac{t_1' + t_4'}{2} \quad \tau_2' = \frac{t_2' + t_3'}{2}$$

$$\vartheta_1 = t_4 - t_1 \quad \vartheta_2 = t_3 - t_2 \quad \vartheta_1' = t_4' - t_1' \quad \vartheta_2' = t_3' - t_1'$$

Sodann ist:

$$\alpha_{☄} - \alpha_* = \frac{\tau_1 + \tau_2}{2} - \frac{\tau_1' + \tau_2'}{2}.$$

Zur Berechnung des Declinationsunterschiedes hat man zunächst zu bilden genähert:

$\delta_{☄}$	θ Sternzeit der Mitte der Beobachtung
δ_*	α
$D = \frac{1}{2}(\delta_{☄} + \delta_*)$	$t = \theta - \alpha$
$\frac{1}{2}(D + \delta_{☄})$	
$\frac{1}{2}(D + \delta_*)$.	

Ferner zu berechnen die Grösse f aus den Gleichungen:

$$\cos n = \cos \varphi \sin t$$
$$\sin n \sin N = \cos \varphi \cos t$$
$$\sin n \cos N = \sin \varphi$$

$$f = 1 - \frac{k}{\sin^2(N+D)} \{\cos^2 N \, ctg^2 n + \sin D \sin(2N + D)\}.$$

Dabei ist k die Refractionsconstante.

Hierdurch befreit man zugleich die Declinationsdifferenz von ler Refraction.

Sodann rechne man die Grösse f', welche die Declinations-lifferenz wegen Eigenbewegung des ☄ corrigirt:

$$f' = 1 - \frac{60 \,.\, \Delta\alpha}{15 \times 86\,636}.$$

Dabei ist $\Delta\alpha$ die tägliche Bewegung des Gestirnes in Rectascension.

Die fernere Rechnung stellt sich wie folgt: Seien

$$r_1 \text{ und } r_2$$

die beiden Radien des Ringes, so wird

$$\mu_{☄} = \frac{15}{2}(\vartheta_1 + \vartheta_2) f f' \cos {}^1\!/_2 (D + \delta_{☄})$$

$$\mu_* = \frac{15}{2}(\vartheta_1' + \vartheta_2') f \cos {}^1\!/_2 (D + \delta_*)$$

$$\cos\varphi_{☄} = \frac{\mu_{☄}}{r_1 + r_2} \qquad \cos\varphi_* = \frac{\mu_*}{r_1 + r_2}$$

$$\cos\psi_{☄} = \frac{r_1 - r_2}{\mu_{☄}} \qquad \cos\psi_* = \frac{r_1 - r_2}{\mu_*}$$

$$\Delta_{☄} = \frac{r_1 + r_2}{2} \sin\varphi_{☄} \sin\psi_{☄}$$

$$\Delta_* = \frac{r_1 + r_2}{2} \sin\varphi_* \sin\psi_*.$$

Δ sind die Distanzen der beiden Gestirne vom Mittelpunkte des Mikrometers. Sodann hat man folgende Fälle zu unterscheiden:

I. ☄ + ✱ in der $\left\{\begin{matrix}\text{oberen}\\ \text{unteren}\end{matrix}\right\}$ Hälfte des Mikrometers:

☄ oben ✱ unten $\delta_{☄} - \delta_* = -(\Delta_{☄} - \Delta_*)$

☄ unten ✱ oben $\delta_{☄} - \delta_* = +(\Delta_{☄} - \Delta_*)$.

II. ☄ und ✱ zu verschiedenen Seiten des Mittelpunktes des Mikrometers:

$$☄ \text{ oben} \quad ✱ \text{ unten} \quad \delta_{☄} - \delta_{*} = -(\Delta_{☄} + \Delta_{*})$$

$$☄ \text{ unten} \quad ✱ \text{ oben} \quad \delta_{☄} - \delta_{*} = +(\Delta_{☄} + \Delta_{*}).$$

Es erübrigt nur noch die Correction der Declinations- und Rectascensionsdifferenz wegen Refraction, und die Correction der Rectascensionsdifferenz wegen Eigenbewegung.

§. 269.

Bestimmung des Ringmikrometerradius.

Man beobachtet zwei Sterne.

Sei t_1 der Eintritt am Aeusseren
t_2 „ Austritt „ Inneren
t_3 „ Eintritt „ „
t_4 „ Austritt „ Aeusseren
} des Mikrometerringes

für einen Stern und $t'_1\, t'_2\, t'_3\, t'_4$ dieselben Grössen für den anderen Stern.

Ihre bekannten Declinationen und Rectascensionen seien

$$\alpha \qquad \delta$$
$$\alpha' \qquad \delta'.$$

Sei ferner:

$$\tau_a = t_4 - t_1 \qquad \tau_i = t_3 - t_2$$
$$\tau'_a = t'_4 - t'_1 \qquad \tau'_i = t'_3 - t'_2,$$

so wird:

$$\mu_a = \frac{15}{2}\tau_a \cos\delta = r_a \sin\gamma_1$$

$$\mu'_a = \frac{15}{2}\tau'_a \cos\delta_1 = r_a \sin\gamma'_1$$

$$tg\, A_a = \frac{\mu'_a + \mu_a}{\delta' - \delta}$$

$$tg\, B_a = \frac{\mu'_a - \mu_a}{\delta' - \delta},$$

so ist:

$$r_a = \frac{\delta' - \delta}{2 \cos A_a \cos B_a}$$
$$= \frac{\mu'_a + \mu_a}{2 \sin A_a \cos B_a}$$
$$= \frac{\mu'_a - \mu_a}{2 \cos A_a \sin B_a}$$
$$= \frac{\mu'_a}{\sin (A_a + B_a)}$$
$$= \frac{\mu_a}{\sin (A_a - B_a)}.$$

Dabei ist r_a der Radius des äusseren Ringes. Ersetzt man en Index a durch i, so erhält man die analogen Formeln für en Radius des inneren Ringes.

Will man die Refraction berücksichtigen, so rechne man:

$$tg\, N = ctg\, \varphi \cos \tau_0$$
$$\tau_0 \mp {}^1/_2 (t_1 + t_4),$$

o ist an $\delta' - \delta$ die Correction anzubringen:

$$- \frac{57'' \sin (\delta' - \delta)}{\sin^2 \{{}^1/_2 (\delta + \delta') + N\}}.$$

Man wird am besten die Beobachtung nahe am Zenith ausühren, wo der Einfluss der Refraction ein minimaler ist. Man vähle die Sterne so, dass der eine möglichst hoch oben, der ındere möglichst tief unten den Ring passirt, so dass $\delta' - \delta$ nöglichst gross wird.

§. 270.

Verbesserung der Kreis- und Fadenmikrometer wegen Refraction.

Man berechne mit der Polhöhe φ und dem Stundenwinkel t lie Grössen N und n aus den Gleichungen:

$$\cos n = \cos \varphi \sin t$$
$$\sin n \sin N = \cos \varphi \cos t$$
$$\cos n \cos N = \sin \varphi$$

ınd sodann:

$$A = + \frac{6000\, k}{\sin^2 (N + d)}$$

$$B = + \frac{2}{15} \frac{ctg\, n \cos (N + d)}{\cos d}$$

$$B' = + \frac{1}{15} \frac{ctg\, n \cos (N + 2d)}{\cos^2 d}$$

$$f = 1 - \frac{k}{\sin^2 (N + d)} \{\cos^2 N\, ctg\, n + \sin d \sin (2N + d)\}.$$

wo d das Mittel aus den beiden Declinationen der Gestirne bezeichnet und die Grösse k aus Bessel's astron. Unter. I zu entnehmen ist. k ist die Constante der mittleren Refraction für Mikrometerbeobachtungen.

Sodann lautet die Correction wegen Refraction:

A. Beim Fadenmikrometer.

$$\text{Corr. in } AR = \frac{\delta' - \delta}{100} A \times B' \text{ (in Zeitsecunden)}$$

$$\text{„ „ } \delta = \frac{\delta' - \delta}{100} A,$$

δ ist die Declination des bekannten, δ' jene des zu bestimmenden Gestirnes.

B. Beim Kreismikrometer.

Hier rechnet man zunächst die Distanzen $\varDelta$ und $\varDelta'$ der Sehnen der beiden Gestirne vom Mittelpunkte, nach den Formeln:

$$\varDelta^2 = r^2 - \left[\frac{15}{2} t f \sqrt{\cos \delta \cos (\delta - \varDelta)}\right]^2$$

$$\varDelta'^2 = r^2 - \left[\frac{15}{2} t' f \sqrt{\cos \delta' \cos (\delta' - \varDelta')}\right]^2.$$

Statt

$$\sqrt{\cos \delta \cos (\delta - \varDelta)}$$

kann man hinreichend genau

$$\cos \frac{\delta + D}{2}$$

nehmen, wo D gleich ist der Declination des Mittelpunktes des Mikrometers.

Dann ist:

$$\text{Corr. in } \alpha = + \frac{\varDelta' - \varDelta}{100} A \times B \text{ (in Zeitsecunden)}$$

$$\text{„ „ } \delta = + \frac{\varDelta' - \varDelta}{100} A \qquad \text{(in Bogensecunden)},$$

$\varDelta' - \varDelta$ ist in Bogenminuten auszudrücken.

Correction wegen Eigenbewegung.

Seien $\varDelta\alpha$ und $\varDelta\delta$ die täglichen Bewegungen in Bogen-
:inuten ausgedrückt, so ist:

$$\text{Corr. in } \alpha = + \frac{\varDelta}{54 \cos^2\delta} \cdot \frac{\varDelta\delta}{100} \text{ (in Zeitsecunden).}$$

Die Declination wird vom Einflusse der Eigenbewegung be-
'eit, wenn man die Sehne mit

$$f' = 1 - \frac{60 \,.\, \varDelta\alpha}{15 \,.\, 86\,636}$$

ıultiplicirt. Man wird daher $\varDelta$ nach der Formel

$$\varDelta^2 = r^2 - \left\{\frac{15}{2}\, t f f' \sqrt{\cos\delta \cos(\delta - \varDelta)}\right\}^2$$

echnen. Für f' dient folgende Tafel:

$\varDelta\alpha$ tägliche Bewegung in α in Graden und Minuten, f' in Einheiten der 5. Decimale.

$\varDelta\alpha$	0°	1°	2°	3°	4°	5°	6°	7°
0′	0	121	241	362	484	606	728	850
10′	20	141	262	383	504	626	748	871
20′	40	161	282	403	525	646	769	891
30′	60	181	302	423	545	667	789	912
40′	80	201	322	444	565	687	810	932
50′	100	221	342	464	586	708	830	953
60′	121	241	362	484	606	728	850	973

Eine Kreismikrometerbeobachtung wird also umfassen:

1) ✱ Red. auf Jahresanfang,
2) Red. ad. app. Reductio ad appareus,
3) ☄ — ✱ die berechnete Differenz zwischen dem unbekannten Object und dem bekannten Sterne,
4) Red. wegen Refraction,
5) Red. wegen Eigenbewegung. Dazu kommt noch die Angabe der Zeit für die Mitte der Beobachtung.

In der neuesten Zeit kommt das Balkenmikrometer fasst
allgemein in Gebrauch. Die Correctionen für dasselbe sind:

I. Refraction:

$$\text{Corr. } (\delta' - \delta) = \frac{k\,(\delta' - \delta)}{\sin^2(N + \delta)} \left\{\frac{\cos N \cos(N + \delta)}{\cos\delta} - ctg^2 n\right\}$$

Corr. $(\alpha' - \alpha)$.

a) im wahren Parallel:

$$- 2k(\delta' - \delta) \frac{ctg\, n\; tg\, \delta\; sec\, \delta}{sin\,(N + \delta)},$$

b) im scheinbaren Parallel:

$$+ 2k(\delta' - \delta) \frac{ctg\, n\; cos\,(N + \delta)\, sec\, \delta}{sin^2\,(N + \delta)}.$$

II. Eigenbewegung.

$$\text{Corr. } (\alpha' - \alpha) = - [4.1884]\, d'\, sec^2\, \delta'\, \varDelta\delta',$$

d' der Abstand der vom Wandelstern beschriebenen Sehne vom Mittelpunkte des Kreuzes, $\varDelta\delta'$ die 48stündige Aenderung der Declination in Bogenminuten.

Corr. $(\delta' - \delta)$ wird berücksichtigt durch Verminderung des fünfstelligen Logarithmus des Reductionsfactors der Declination

$$\frac{15}{2}\, cos\, \delta',$$

und die 48stündige Bewegung in Rectascension ausgedrückt in Bogenminuten.

III. Krümmung des Parallels (für Polsterne)

$$\text{Corr. } (\delta' - \delta) = - \frac{sin\, 1''}{2} (d'^2\, tg\, \delta' - d^2\, tg\, \delta).$$

IV. Abweichung des Kreuzes vom rechten Winkel und fehlerhafte Orientirung. Sei der Winkel des nach Nordosten gerichteten Schenkels $45^0 + \alpha$, jener nach Nordwesten $45^0 + \beta$, so wird:

$$\text{Corr.} (\alpha' - \alpha) = \frac{\delta' - \delta}{15}\, sec\, \delta_0\, tg\, (\alpha - \beta)$$

$$\text{Corr.} (\delta' - \delta) = - (\delta' - \delta)\, tg\, (\alpha + \beta).$$

§. 271.

Geocentrische und heliocentrische Coordinaten.

Sei mit N ein beliebiger Anfangswerth bezeichnet, so gilt:

$$r\, cos\, b\, cos\, (l - N) + R\, cos\, B\, cos\, (L - N) = \varrho\, cos\, \beta\, cos\, (\lambda - N)$$
$$r\, cos\, b\, sin\, (l - N) + R\, cos\, B\, sin\, (L - N) = \varrho\, cos\, \beta\, sin\, (\lambda - N)$$
$$r\, sin\, b + R\, sin\, B = \varrho\, sin\, \beta.$$

Sei I. $N = L$, so wird:

$$\varrho\, cos\, (\lambda - L)\, cos\, \beta = r\, cos\, (l - L)\, cos\, b + R\, cos\, B$$
$$\varrho\, sin\, (\lambda - L)\, cos\, \beta = r\, sin\, (l - L)\, cos\, b$$
$$\varrho\, sin\, \beta - R\, sin\, B = r\, sin\, b.$$

Setzt man also

$$\frac{R \cos B}{r \cos(l - L) \cos b} = \pm \, tg^2 m,$$

so wird im Falle, dass $+tg^2 m$ ist:

$$tg(\lambda - L) = tg(l - L) \cos^2 m$$

$$\varrho \cos \beta = \frac{R \cos B}{\sin^2 m \cos(\lambda - L)}$$

$$\varrho \sin \beta = r \sin b + R \sin B,$$

und im Falle, dass $-tg^2 m$ ist:

$$tg(\lambda - L) = tg(l - L) \frac{2 \cos m}{\cos 2m}$$

$$\varrho \cos \beta = \frac{R \cos B \cos 2m}{\sin^2 m \cos(\lambda - L)}$$

$$\varrho \sin \beta = r \sin b + R \sin B.$$

Sei II. $N = l$, so wird:

$$\varrho \cos(\lambda - l) \cos \beta = r \cos b + R \cos B \cos(L - l)$$

$$\varrho \sin(\lambda - l) \cos \beta = \quad + R \cos B \sin(L - l)$$

$$\varrho \sin \beta = r \sin b + R \sin B.$$

Sei III. $N = \lambda$, so wird:

$$r \cos(l - \lambda) \cos b = \varrho \cos \beta - R \cos B \cos(L - \lambda)$$

$$r \sin(l - \lambda) \cos b = \quad - R \cos B \sin(L - \lambda)$$

$$r \sin b = \varrho \sin \beta - R \sin B.$$

IV. Setzt man $N = \frac{1}{2}(l + L)$, so wird:

$$tg\{\lambda - \tfrac{1}{2}(l + L)\} = tg(45^0 + \zeta) \, tg \tfrac{1}{2}(l - L)$$

$$\varrho = \frac{(r' + R') \sin \frac{1}{2}(l - L)}{\sin[\lambda - \frac{1}{2}(l + L)]}$$

$$= \frac{(r' - R') \cos \frac{1}{2}(l - L)}{\cos[\lambda - \frac{1}{2}(l + L)]},$$

dabei ist:

$$r' = r \cos b$$

$$R' = R \cos B$$

$$tg \zeta = \frac{R'}{r}.$$

Differentialformeln.

$$\Delta \lambda = \frac{r \cos(l - \lambda)}{\varrho} \Delta l + \frac{\sin(l - \lambda)}{\varrho} \Delta r$$

$$\Delta \varrho = - r \sin(l - \lambda) \Delta l + \cos(l - \lambda) \Delta r$$

$$\varDelta\beta = \frac{r \sin\beta \cos\beta \sin(l-\lambda)}{\varrho} \varDelta l + \frac{r \cos^2\beta}{\varrho \cos^2 b} \varDelta b$$
$$+ \frac{\cos^2\beta}{\varrho} [tg\, b - \cos(l-\lambda)\, tg\, \beta] \varDelta r$$

$$\varrho \cos(\lambda - \Omega) \cos\beta = r \cos u + R \cos(L - \Omega)$$
$$\varrho \sin(\lambda - \Omega) \cos\beta = r \sin u \cos i + R \sin(L - \Omega)$$
$$\varrho \sin\beta = r \sin u \sin i.$$

Aus dem letzteren ergiebt sich, wenn

$$tg\, A = \frac{tg\, \beta \cos(L - \Omega)}{\sin(L - \lambda)}$$

und

$$tg\, B = \cos i\, tg\, u$$

gesetzt wird:

$$tg\, u = \frac{tg(L - \Omega) \sin A}{\sin(A + i)}$$
$$r = \frac{R \sin(L - \lambda) \cos B}{\cos u \sin(B - \lambda + \Omega)}.$$

§. 272.

Formeln für heliocentrische Coordinaten.

Man hat für die Ekliptik:

$$x = r \cos b \cos l_1$$
$$y = r \cos b \sin l_1$$
$$z = r \sin b,$$

dabei ist b die Breite, l_1 die auf die Ekliptik reducirte Länge, r der Radiusvector. Man hat, wenn l die Länge in der Bahn bezeichnet,

$$x = r \{\cos(l - \Omega) \cos\Omega - \sin(l - \Omega) \sin\Omega \cos i\}$$
$$y = r \{\cos(l - \Omega) \sin\Omega + \sin(l - \Omega) \cos\Omega \cos i\}$$
$$z = r \{\sin i \sin(l - \Omega)\}.$$

Ferner wird:

$$x = r \{\cos b + 2 \sin^2 \frac{i}{2} \sin\Omega \sin(l - \Omega)\}$$

$$y = r \{\sin b - 2 \sin^2 \frac{i}{2} \cos\Omega \sin(l - \Omega)\}$$

$$z = r \{\sin i \sin(l - \Omega)\}.$$

Diese Formel ist besonders für kleine Neigungen verwendbar.

In diesen Formeln ist

$$u = v + w = l - \Omega$$
$$\pi = w + \Omega.$$

v die wahre Anomalie. Die positive X-Axe fällt mit dem Frühlingspunkte (r) zusammen.

Man hat ferner: für eklipticale Coordinaten:

$$x = r\,\{\cos u \cos \Omega - \sin u \sin \Omega \cos i\}$$
$$y = r\,\{\cos u \sin \Omega + \sin u \cos \Omega \cos i\}$$
$$z = r \sin u \sin i,$$

und für äquatoreale Coordinaten:

$$x' = r\,\{\cos u \cos \Omega - \sin u \sin \Omega \cos i\}$$
$$y' = r\,\{\cos u \sin \Omega \cos \varepsilon + \sin u \cos \Omega \cos i \cos \varepsilon - \sin u \sin i \sin \varepsilon\}$$
$$z' = r\,\{\cos u \sin \Omega \sin \varepsilon + \sin u \cos \Omega \cos i \sin \varepsilon + \sin u \sin i \cos \varepsilon\}$$

Setzt man:

$$\sin a \sin A = \cos \Omega$$
$$\sin a \cos A = -\cos i \sin \Omega$$
$$\sin b \sin B = \sin \Omega \cos \varepsilon$$
$$\sin b \cos B = \cos \Omega \cos i \cos \varepsilon - \sin i \sin \varepsilon$$
$$\sin c \sin C = \sin \Omega \sin \varepsilon$$
$$\sin c \cos C = \cos \Omega \cos i \sin \varepsilon + \sin i \cos \varepsilon,$$

so folgt:

$$x' = r \sin a \sin (A + u)$$
$$y' = r \sin b \sin (B + u)$$
$$z' = r \sin c \sin (C + u).$$

Die Berechnung von b, B, c, C kann man sich erleichtern durch Einführung der Grössen:

$$n \sin N = \sin i$$
$$n \cos N = \cos \Omega \cos i,$$

so wird:

$$\sin b \cos B = n \cos (N + \varepsilon)$$
$$\sin c \cos C = n \sin (N + \varepsilon).$$

Als Prüfungsgleichung benutze man:

$$tg\, i = \frac{\sin b \sin c \sin (C - B)}{\sin a \cos A}.$$

Sind die Elemente Ω_1 und i_1 auf den Aequator bezogen, so wird die Berechnung einfacher; man hat:

$$\sin a \sin A = \cos \Omega_1$$
$$\sin a \cos A = -\sin \Omega_1 \cos i_1$$
$$\sin b \sin B = \sin \Omega_1$$
$$\sin b \cos B = \cos \Omega_1 \cos i_1$$
$$\sin C = \sin i_1$$
$$C = 0.$$

Verlangt man die Eklipticalconstanten, so hat man mit Eklipticalelementen:

$$\sin a_1 \sin A_1 = \cos \Omega$$
$$\sin a_1 \cos A_1 = -\sin \Omega \cos i$$
$$\sin b_1 \sin B_1 = \sin \Omega$$
$$\sin b_1 \cos B_1 = \cos \Omega \cos i$$
$$\sin C_1 = \sin i$$
$$C_1 = 0.$$

Und es wird:

$$x = r \sin a_1 \sin (A_1 + u)$$
$$y = r \sin b_1 \sin (B_1 + u)$$
$$z = r \sin c_1 \sin (C_1 + u).$$

Sind die Elemente auf den Aequator bezogen, so folgt, wenn

$$n_1 \sin N_1 = \sin i_1$$
$$n_1 \cos N_1 = \cos \Omega_1 \cos i_1$$
$$\sin a_1 \sin A_1 = \cos \Omega_1$$
$$\sin a_1 \cos A_1 = -\cos i_1 \sin \Omega_1$$
$$\sin b_1 \sin B_1 = \sin \Omega_1 \cos \varepsilon$$
$$\sin b_1 \cos B_1 = n_1 \cos (N_1 - \varepsilon)$$
$$\sin c_1 \sin C_1 = \sin \Omega_1 \sin \varepsilon$$
$$\sin c_1 \cos C_1 = n_1 \sin (N_1 - \varepsilon).$$

Man kann noch andere Transformationen vornehmen. Beachten wir, dass

$$r \sin v = a \sin E \cos \varphi$$
$$r \cos v = a \cos E - a \sin \varphi,$$

wobei

a die halbe grosse Axe,
E „ excentrische Anomalie,
$\sin \varphi = e =$ der Excentricität ist, so können wir statt

$$x = r \sin a \sin (A + u)$$
$$= r \sin a \sin (A + w + v)$$
$$= r \sin v . \sin a \cos (A + w)$$
$$+ r \cos v . \sin a \sin (A + w).$$

Setzt man für $r \sin v$ und $r \cos v$ die Werthe ein, so folgt, wenn gesetzt wird:

$$l \sin L = a \sin a \sin A$$
$$l \cos L = a \sin a \cos A \cos \varphi$$
$$\lambda = - l \sin \varphi \sin L$$
$$m \sin M = a \sin b \sin B$$
$$m \cos M = a \sin b \cos B \cos \varphi$$
$$\mu = - m \sin \varphi \sin M$$
$$n \sin N = a \sin c \sin C$$
$$n \cos N = a \sin c \cos C \cos \varphi$$
$$\nu = - n \sin \varphi \sin N,$$

so folgt:

$$x = l \sin \{E + L\} + \lambda$$
$$y = m \sin \{E + M\} + \mu$$
$$z = n \sin \{E + N\} + \nu.$$

Man findet für die äquatorealen Coordinaten:

$$dA = \frac{\cos i}{\sin^2 a} \cdot d\Omega + \tfrac{1}{2} tg\, i \sin 2A \,.\, di$$

$$\frac{d \sin a}{\sin a} = \tfrac{1}{2} \sin i \; tg\, i \sin 2A \,.\, d\Omega - tg\, i \cos^2 A \,.\, di$$

$$dB = \frac{\sin a \cos \varepsilon}{\sin b} \sin(A - B) d\Omega + \frac{\sin a \sin c}{\sin b} \sin(A - C) \sin B \,.\, di + \frac{\sin c}{\sin b} \sin(B - C)\, d\varepsilon$$

$$\frac{d \sin b}{\sin b} = \frac{\sin a \cos \varepsilon}{\sin b} \cos(A - B) d\Omega - \frac{\sin a \sin c}{\sin b} \sin(A - C) \cos B \,.\, di - \frac{\sin c}{\sin b} \cos(B - C)\, d\varepsilon$$

$$dC = \frac{\sin a \sin \varepsilon}{\sin c} \sin(A - C) d\Omega - \frac{\sin a \sin b}{\sin c} \sin(A - B) \sin C \,.\, di + \frac{\sin b}{\sin c} \sin(B - C)\, d\varepsilon$$

$$\frac{d \sin c}{\sin c} = \frac{\sin a \sin \varepsilon}{\sin c} \cos(A - C) d\Omega + \frac{\sin a \sin b}{\sin c} \sin(A - B) \cos C \,.\, di + \frac{\sin b}{\sin c} \cos(B - C)\, d\varepsilon.$$

Vergl. Berl. Jahrb. 1818, S. 268.

Man hat für das äquatoreale System und die Aequatorconstanten:

$$\Delta a \cos a = -\Delta \Omega \sin b \cos (B - A) + \Delta i \sin \Omega \sin i \cos A$$
$$\Delta b \cos b = \Delta \Omega \sin a \cos (A - B) - \Delta i \cos \Omega \sin i \cos B$$
$$\Delta c = \Delta i$$
$$\Delta A \sin a = -\Delta \Omega \sin b \sin (B - A) + \Delta i \sin \Omega \sin i \sin A$$
$$\Delta B \sin b = \Delta \Omega \sin a \sin (A - B) + \Delta i \cos \Omega \sin i \cos B$$
$$\Delta C = 0.$$

Man hat ferner:

$$\sin (A - B) \sin a \sin b = \cos c$$
$$\sin (B - C) \sin b \sin c = \cos a$$
$$\sin (C - A) \sin a \sin c = \cos b$$
$$ctg (A - B)\, ctg (C - A) = \cos^2 a$$
$$ctg (B - C)\, ctg (A - B) = \cos^2 b$$
$$ctg (C - A)\, ctg (B - C) = \cos^2 c$$
$$\cos (A - B) = -ctg\, a\, ctg\, b = \sin (C - A) \sin (C - B) \sin^2 c$$
$$\cos (B - C) = -ctg\, b\, ctg\, c = \sin (A - B) \sin (A - C) \sin^2 a$$
$$\cos (C - A) = -ctg\, a\, ctg\, c = \sin (B - C) \sin (B - A) \sin^2 b.$$

Vergl. Berlin. Jahrb. 1813, S. 104.

§. 273.

Transformation der Bahnlage.

Seien $i \quad \Omega \quad w$
äquatoreale,
$i_1 \quad \Omega_1 \quad w_1$
ekliptikale Elemente, ε die Schiefe der Ekliptik und σ die im Dreieck, Aequator, Ekliptik und Bahn dem Winkel ε gegenüberliegende Seite, so hat man folgende Beziehungen:

$$\cos {}^1/_2 i_1 \sin {}^1/_2 (\Omega_1 + \sigma) = \cos {}^1/_2 (i - \varepsilon) \sin {}^1/_2 \Omega$$
$$\cos {}^1/_2 i_1 \cos {}^1/_2 (\Omega_1 + \sigma) = \cos {}^1/_2 (i + \varepsilon) \cos {}^1/_2 \Omega$$
$$\sin {}^1/_2 i_1 \sin {}^1/_2 (\Omega_1 - \sigma) = \sin {}^1/_2 (i - \varepsilon) \sin {}^1/_2 \Omega$$
$$\sin {}^1/_2 i_1 \cos {}^1/_2 (\Omega_1 - \sigma) = \sin {}^1/_2 (i + \varepsilon) \cos {}^1/_2 \Omega.$$

Ferner wird:

$$w_1 = w + \sigma$$
$$\pi_1 = w_1 + \Omega_1.$$

Man kann aber auch rechnen wie folgt: Man hat nach den gewöhnlichen Formeln:

$$\begin{aligned}
\sin i_1 \cos \Omega_1 &= \sin \varepsilon \cos i + \cos \varepsilon \sin i \cos \Omega \\
\sin i_1 \sin \Omega_1 &= \sin i \sin \Omega \\
\cos i_1 &= \cos \varepsilon \cos i - \sin \varepsilon \sin i \cos \Omega \\
\sin i_1 \cos \sigma &= \cos \varepsilon \sin i + \sin \varepsilon \cos i \cos \Omega \\
\sin i_1 \sin \sigma &= \sin \varepsilon \sin \Omega .
\end{aligned}$$

Setzt man in diesen Formeln:

$$\begin{aligned}
\sin a \sin A &= \sin i \cos \Omega \\
\sin a \cos A &= \cos i \\
\sin b \sin B &= \sin i \\
\sin b \cos B &= \cos i \cos \Omega ,
\end{aligned}$$

so wird:

$$\begin{aligned}
\sin i_1 \sin \Omega_1 &= \sin i \sin \Omega \\
\sin i_1 \cos \Omega_1 &= \sin a \sin (A + \varepsilon) \\
\sin i_1 \sin \sigma &= \sin \varepsilon \sin \Omega \\
\sin i_1 \cos \sigma &= \sin b \sin (B + \varepsilon) \\
\cos i_1 &= \sin a \cos (A + \varepsilon) \\
w_1 &= w + \sigma \\
\pi_1 &= w_1 + \Omega_1 .
\end{aligned}$$

Für die umgekehrte Aufgabe bestehen analoge Formeln. Man hat:

$$\begin{aligned}
\sin {}^1/_2 i \sin {}^1/_2 (\Omega + \sigma) &= \sin {}^1/_2 (i_1 + \varepsilon) \sin {}^1/_2 \Omega_1 \\
\sin {}^1/_2 i \cos {}^1/_2 (\Omega + \sigma) &= \sin {}^1/_2 (i_1 - \varepsilon) \cos {}^1/_2 \Omega_1 \\
\cos {}^1/_2 i \sin {}^1/_2 (\Omega - \sigma) &= \cos {}^1/_2 (i_1 + \varepsilon) \sin {}^1/_2 \Omega_1 \\
\cos {}^1/_2 i \cos {}^1/_2 (\Omega - \sigma) &= \cos {}^1/_2 (i_1 - \varepsilon) \cos {}^1/_2 \Omega_1 \\
w &= w_1 - \sigma \\
\pi &= w + \Omega
\end{aligned}$$

oder:

$$\begin{aligned}
\sin a_1 \sin A_1 &= \sin i_1 \cos \Omega_1 \\
\sin a_1 \cos A_1 &= \cos i_1 \\
\sin b_1 \sin B_1 &= \sin i_1 \\
\sin b \cos B_1 &= \cos i_1 \cos \Omega_1 \\
\sin i \sin \Omega &= \sin i_1 \sin \Omega_1 \\
\sin i \cos \Omega &= \sin a_1 \sin (A_1 - \varepsilon) \\
\sin i \sin \sigma &= \sin \varepsilon \sin \Omega_1 \\
\sin i \cos \sigma &= \sin b_1 \sin (B_1 - \varepsilon) \\
\cos i &= \sin a_1 \cos (A_1 - \varepsilon)
\end{aligned}$$

§. 274.

Reduction auf die Ekliptik.

Sei l die Länge, b „ Breite } in der Bahn, l_1 in der Ekliptik,
i „ Neigung, Ω „ Länge des Knotens } bezüglich der Ekliptik,
r_1 „ die Projection von r auf die Ekliptik,

so hat man:

$$tg\,(l_1 - \Omega) = \cos i\, tg\,(l - \Omega)$$
$$\sin b = \sin i\, tg\,(l - \Omega)$$
$$tg\, b = tg\, i \sin (l_1 - \Omega)$$
$$r_1 = r \cos b.$$

Für kleine Neigung hat man ferner:

$$l_1 - l = -\, tg^2 \frac{i}{2} \frac{\sin 2\,(l - \Omega)}{\sin 1''} + tg^4 \frac{i}{2} \frac{\sin 4\,(l - \Omega)}{\sin 2''} - \ldots$$

Diese Reihe stellt die **Reduction auf die Ekliptik** dar.

Man hat folgende Differentialgleichungen:

$$\frac{\partial l_1}{\partial l} = \frac{\cos i}{\cos^2 b}$$

$$\frac{\partial l_1}{\partial i} = -\, tg\, b \cos (l_1 - \Omega) = -\, {}^1\!/_2\, tg\, i \sin 2\,(l_1 - \Omega)$$

$$\frac{\partial l_1}{\partial \Omega} = 1 - \frac{\cos i}{\cos^2 b} = \frac{2 \sin^2 \frac{i}{2} - \sin^2 b}{\cos^2 b}$$

$$\frac{\partial b}{\partial l} = -\frac{\partial b}{\partial \Omega} = \sin i \cos (l_1 - \Omega)$$

$$\frac{\partial b}{\partial i} = \frac{\cos i}{\cos b} \sin (l - \Omega) = \sin (l_1 - \Omega)$$

$$\frac{\partial b}{\partial \Omega} = -\, \sin i \cos (l_1 - \Omega)$$

$$\frac{\partial r_1}{\partial r} = \cos b$$

$$\frac{\partial r_1}{\partial l} = -\frac{\partial r_1}{\partial \Omega} = -\, r \sin b \frac{\partial b}{\partial l}$$

$$\frac{\partial r_1}{\partial i} = -\, r \sin b \frac{\partial b}{\partial i}$$

$$\frac{\partial r_1}{\partial \Omega} = -\, r \sin b \frac{\partial b}{\partial \Omega}.$$

§. 275.

Formeln für die gegenseitige Lage zweier Bahnen.

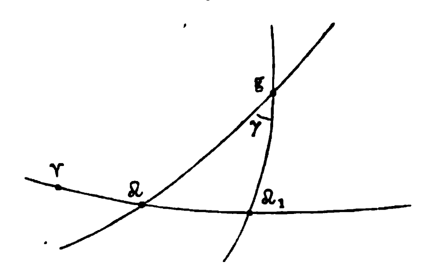
Seien: Ω Ω_1 die Knotenlängen,
i i_1 „ Neigungen.

Sei g der Schnittpunkt beider Bahnen, und

$$\Upsilon\Omega + \Omega G = \tau, \quad \Upsilon\Omega_1 + \Omega_1 G = \tau,$$

γ die gegenseitige Neigung,
Υ der Frühlingspunkt.

Fig. 31.



Man hat:

$$\sin\frac{\gamma}{2}\sin{}^1/_2\,[(\tau_1-\Omega)+(\tau-\Omega)]=\sin\frac{\Omega-\Omega_1}{2}\sin\frac{i+i_1}{2}$$

$$\sin\frac{\gamma}{2}\cos{}^1/_2\,[(\tau_1-\Omega_1)+(\tau-\Omega)]=\cos\frac{\Omega-\Omega_1}{2}\sin\frac{i-i_1}{2}$$

$$\cos\frac{\gamma}{2}\sin{}^1/_2\,[(\tau_1-\Omega_1)-(\tau-\Omega)]=\sin\frac{\Omega-\Omega_1}{2}\cos\frac{i+i_1}{2}$$

$$\cos\frac{\gamma}{2}\cos{}^1/_2\,[(\tau_1-\Omega_1)-(\tau-\Omega)]=\cos\frac{\Omega-\Omega_1}{2}\cos\frac{i-i_1}{2}$$

oder:

$$\cos p=\cos i\cos i_1+\sin i\sin i_1\cos(\Omega-\Omega_1)$$

$$\sin(\Omega-\Omega_1)\,\mathrm{cotg}(\tau_1-\Omega_1)=-\mathrm{cotg}\,i\sin i_1+\cos i\cos(\Omega-\Omega_1)$$

$$\sin(\Omega-\Omega_1)\,\mathrm{cotg}(\tau-\Omega)=+\sin i\,\mathrm{cotg}\,i_1-\cos i\cos(\Omega-\Omega_1)$$

$$\frac{\sin(\tau-\Omega)}{\sin i_1}=\frac{\sin(\tau_1-\Omega_1)}{\sin i}=\frac{\sin(\Omega-\Omega_1)}{\sin\gamma}.$$

Ist die gegenseitige Neigung klein, so kann man genähert setzen:

$$\tau_1 - \tau_1 = \frac{1}{\sin 2''} \, tg\, i \; tg\, i_1 \sin(\Omega_1 - \Omega).$$

Man hat auch:

$$\sin\gamma \cos(\tau - \Omega) = \sin i \sin i_1 - \sin i_1 \cos i \cos(\Omega - \Omega_1).$$

§. 276.

Reduction auf ein anderes Aequinoctium.

Sei t_0 das gegebene, t_1 das gesuchte mittlere Aequinoctium der Elemente (in tropischen Jahren ausgedrückt), so hat man:

a) bei ekliptischen Elementen:

$$\tau = t_0 - 1850$$

$$\vartheta = t_1 - t_0$$

$$\pi = 173^0\; 0'\; 12'' + 32'',869\,\tau + 0{,}000087\,\tau^2$$
$$+ \{-8'',683 - 0'',000026\,\tau\}\,\vartheta + 0'',000011\,\vartheta^2$$

$$\mu = \{0'',47950 - 0'',0000065\,\tau\}\,\vartheta$$

$$l = \{50'',23465 + 0'',0002258\,\tau\}\,\vartheta + 0'',00011290\,\vartheta^2$$

$$\sigma = -\,tg\,{}^1\!/_2\, i_0\; tg\,{}^1\!/_2\,\mu$$

$$\gamma = cotg\,{}^1\!/_2\, i_0\; tg\,{}^1\!/_2\,\mu$$

$$T = \sum \frac{\sigma^k}{arc\,k\,.\,1''} \sin k(\Omega_0 - \pi) \quad k = 1,\,2,\,3\,\ldots$$

$$C = \sum \frac{\gamma^k}{arc\,k\,.\,1''} \sin k(\Omega_0 - \pi)$$

$$\Omega_1 = \Omega_0 + l + T + C$$

$$\pi_1 = \pi_0 + l + 2\,T$$

$$tg\,{}^1\!/_2\,(i_1 - i_0) = -\,\frac{\cos\{\Omega_0 - \pi + {}^1\!/_2(T + C)\}}{\cos{}^1\!/_2(T + C)}\; tg\,{}^1\!/_2\,\mu.$$

b) Bei äquatorealen Elementen.

$$p = \{23'',030 + 0'',000142\,\tau\}\,\vartheta + 0'',000031\,\vartheta^2$$

$$n = \{+\,20'',0515 - 0'',0000867\,\tau\}\,\vartheta - 0'',00004334\,\vartheta^2$$

$$m = \{46'',05931 - 0'',00028391\,\tau\}\,\vartheta + 0'',00014195\,\vartheta^2$$

$$\sigma = tg\,{}^1\!/_2\, i_0\; tg\,{}^1\!/_2\, n$$

$$\gamma = ctg\,{}^1\!/_2\, i_0\; tg\,{}^1\!/_2\, n$$

$$T = \frac{\sigma}{arc\,1''}\cos(\Omega + p) - \frac{\sigma^2}{arc\,2''}\sin 2(\Omega + p)$$
$$- \frac{\sigma^3}{arc\,3''}\cos 3\,(\Omega + p) + \cdots$$

$$C = -\frac{\gamma}{arc\,1''}\cos(\Omega + p) - \frac{\gamma^2}{arc\,2''}\sin 2(\Omega + p) + \frac{\gamma^3}{arc\,3''}\cos 3(\Omega + p) + \cdots$$

$$\Omega_1 = \Omega_0 + m + T + C$$

$$\pi_1 = \pi_0 + m + 2T$$

$$\tfrac{1}{2}(i_1 - i_0) = -\frac{\sin\{\Omega + p + \tfrac{1}{2}(T + C)\}}{\cos\tfrac{1}{2}(T + C)}\, tg\,\tfrac{1}{2}n.$$

§. 277.

Berechnung einer Ephemeride.

Man berechne sich nach §. 272 aus den Elementen zunächst die Constanten

$$\begin{matrix} a & b & c \\ A & B & C, \end{matrix}$$

und zwar für das betreffende Aequinoctium. Sind die Elemente nicht auf das Aequinoctium der Ephemeride bezogen, so müssen sie nach §. 276 auf dasselbe gebracht werden.

Sodann berechne man sich in (gewöhnlich) viertägigen Intervallen die mittlere Anomalie.

Sei T die Epoche der Elemente und M die daselbst angegebene mittlere Anomalie, so wird für die Zeit t

$$M_t = M_T + (t - T)\mu,$$

wobei μ die mittlere tägliche Bewegung bezeichnet.

Dieselbe kann auch aus der grossen Axe a berechnet werden:

$$\mu = \frac{k\sqrt{1 + m}}{a^{3/2}} \quad \begin{cases} m = \text{Masse} \\ \log k = 8{,}235\,581\,441 - 10. \end{cases}$$

Zu dieser wird sodann die excentrische Anomalie gerechnet:

$$E - e'' \sin E = M$$

$$e'' = \frac{e}{arc\,1''} = \frac{\sin\varphi}{arc\,1''},$$

ferner:

$$r\sin v = a\cos\varphi\sin E$$

$$r\cos v = a(\cos E - e).$$

Dieses giebt r und v. Mit v rechne man:

$$u = v + w,$$

wobei

$$w = \pi - \Omega.$$

Dann ist:

$$x = r \sin a \sin (A + u)$$
$$y = r \sin b \sin (B + u)$$
$$z = r \sin c \sin (C + u)$$

Man hat aber:

$$\varrho \cos \delta \cos \alpha = x + X$$
$$\varrho \cos \delta \sin \alpha = y + Y$$
$$\varrho \sin \delta = z + Z.$$

Die Sonnencoordinaten $X\,Y\,Z$ sind für die betreffenden Tage aus dem Berliner Jahrbuche zu entnehmen.

Hierauf werden aus den viertägigen Intervallen die Coordinaten α und δ durch Interpolation gewonnen.

Bei der Parabel wird man, da

$$r = q \sec^2 {}^1\!/_2 v,$$

die Form wählen:

$$x = q \sin a \,.\, \sin (A + w + v) \sec^2 {}^1\!/_2 v$$
$$y = q \sin b \,.\, \sin (B + w + v) \sec^2 {}^1\!/_2 v$$
$$z = q \sin c \,.\, \sin (C + w + v) \sec^2 {}^1\!/_2 v.$$

Ferner wird:

$$M_t = \frac{t - T}{q^{3/2}} = \frac{\sqrt{2}}{k} \left\{ tg \frac{v}{2} + {}^1\!/_3\, tg^3 \frac{v}{2} \right\},$$

wobei T die Zeit des Durchganges durch das Perihel bezeichnet. Eine Tafel, die unmittelbar v durch M giebt, findet man in Oppolzer's Lehrbuch zur Bahnbestimmung. Für die Berechnung der Bahnen mit Excentricitäten nahe $= 1$ muss auf das erwähnte Werk verwiesen werden.

Die Ephemeriden geben dem allgemeinen Gebrauch entsprechend stets die auf das wahre Aequinoctium bezogenen Orte. Da man zufolge der obigen Rechnung die auf das mittlere Aequinoctium reducirten Orte erhält (X, Y, Z sind auf das mittlere Aequinoctium bezogen), so muss man an die berechneten Rectascensionen und Declinationen noch die Correction wegen Präcession und Nutation

$$\Delta \alpha = f + g \sin (G + \alpha) tg \delta$$
$$\Delta \delta = g \cos (g + \alpha)$$

anbringen. Die Fixstern- und Planetenaberration wird durch die Aenderung der Beobachtungszeit schon berücksichtigt.

§. 278.

Vergleichung einer Ephemeride mit den Beobachtungen.

Die Beobachtungen werden gewöhnlich in den astronomischen Nachrichten wie folgt publicirt:

Beobachtung des ...... am Aequatoreal ... der Sternwarte zu ....
Beobachter: ......

Nr.	Datum	Mittlere Ortszeit	$\Delta\alpha$	$\Delta\delta$	Zahl d. Vergleichungen	α app.	$lf\,p\,\alpha$	δ app.	$lf\,p\,\delta$	✱
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11

✱	α-Aequinoctium	Red. ad app.	δ-Aequinoctium	Red. ad app.	Antorität
11	12	13	14	15	16

Bemerkungen zu der Beobachtung.

Die 1. Coll. giebt die laufende Nummer der Beobachtung,
„ 2. „ das Datum,
„ 3. „ die mittlere Ortszeit,
„ 4. und 5. Coll. die Differenz (☄ — ✱) des beobachteten Objectes gegen den Vergleichsstern,
„ 6. Coll. die Zahl der Vergleichungen,
„ 7. „ die scheinbare Rectascension } beide bezogen auf
„ 9. „ „ „ Declination } den Jahresanfang,
„ 8. und 10. Coll. die Factoren (vergl. §. 232, Ueber Parallaxe):

$$lf\,p\,\alpha = \frac{\pi\, h \cos\varphi'}{15} \cdot \frac{\sin(\theta - \alpha)}{\cos\delta}$$

$$lf\,p\,\delta = \pi\, h \sin\varphi' \cdot \frac{\sin(\gamma - \delta)}{\sin\gamma},$$

wobei:

$$tg\,\gamma = \frac{tg\,\varphi'}{\cos(\theta - \alpha)}.$$

Die 11. Coll. giebt die Nummer des Vergleichssternes,
„ 12. und 14 Coll. giebt die Coordinaten des Vergleichssternes,

Die 13. und 15 Coll. giebt die Reductio ad apparens (vergl. §. 232).

Die Ephemeriden geben dem allgemeinen Gebrauch entsprechend stets die auf das wahre Aequinoctium bezogenen Orte.

Die Ephemeriden finden sich gewöhnlich von Tag zu Tag berechnet.

Soll die Beobachtung mit der Ephemeride verglichen werden, so interpolirt man zunächst aus der Ephemeride α und δ für die Beobachtungszeit.

Die Ephemeride giebt geocentrische Orte. Die Beobachtung ist daher vor der Vergleichung um die Parallaxe zu corrigiren.

Man hat also zu rechnen:

1) Beobachtungszeit . . . .
2) — Aberrationszeit ($498^s,65\,\varrho$; $log\ 498^s,65 = 2,6978$ ϱ die geocentrische Distanz) . . . . . .
3) + Längendifferenz gegen den Meridian, giebt die Beobachtungszeit im Meridian . . . .

Diese giebt in Decimaltheile des Tages umgesetzt . . . .

Für diese Zeit interpolirt man α und δ aus der Ephemeride. Dieses giebt das

α_{cal}, d. h. gerechnete Rectascension,

δ_{cal}, d. h. gerechnete Declination.

Nun reducirt man die beobachteten Rectascensionen und Declinationen dadurch auf den Erdmittelpunkt, dass man additiv die Correctionen

$$\frac{lf\,p\,\alpha}{\varrho} \qquad \frac{lp\,p\,\delta}{\varrho}$$

an sie anbringt, wo ϱ die geocentrische Distanz des beobachteten Objectes ist. Dadurch erhält man:

α_{obs}, d. h. beobachtete Rectascension,

δ_{obs}, „ „ „ Declination.

Alsdann giebt:

$$-\alpha_{cal} + \alpha_{obs} = \Delta\alpha$$
$$-\delta_{cal} + \delta_{obs} = \Delta\delta,$$

d. B. „Beobachtung weniger Rechnung" den Fehler der Ephemeride an.

§. 279.

Elliptische Bewegung.

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + k^2(1+m)\frac{x}{r} = 0$$
$$\frac{d^2 y}{dt^2} + k^2(1+m)\frac{y}{r} = 0$$
$$\frac{d^2 z}{dt^2} + k^2(1+m)\frac{z}{r} = 0.$$

Setzt man:

$$x = r\cos b\cos l$$
$$y = r\cos b\sin l$$
$$z = r\sin b,$$

so folgt:

$$\frac{d^2 r}{dt^2} - r\frac{d^2 b}{dt^2} - r\cos^2 b\left(\frac{dl}{dt}\right)^2 + \frac{k^2(1+m)}{r^2} = 0$$
$$\frac{d}{dt}\left\{r^2\cos^2 b\,\frac{dl}{dt}\right\} = 0$$
$$\frac{d}{dt}\left(r^2\frac{db}{dt}\right) + r^2\cos b\sin b\left(\frac{dl}{dt}\right)^2 = 0$$

oder:

$$\frac{d^2}{dt^2}(r\cos b) - r\cos b\left(\frac{dl}{dt}\right)^2 + \frac{k^2(1+m)}{r^3}(r\cos b) = 0$$
$$\frac{d}{dt}\left\{r^2\cos^2 b\,\frac{dl}{dt}\right\} = 0$$
$$\frac{d^2}{dt^2}(r\sin b) + \frac{k^2(1+m)}{r^3}(r\sin b) = 0.$$

Setzt man:

$$\frac{x}{r}i + \frac{y}{r}j + \frac{z}{r}k = e^{i\varphi + j\psi + k\chi},$$

wobei ijk Quaternioneinheiten sind, so folgt, da

$$ii = jj = kk = -1$$
$$ij = -ji$$
$$ik = -ki$$
$$jk = -kj$$

$$\frac{d^2 r}{d t^2} - r\left\{\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\psi}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\chi}{dt}\right)^2\right\} + \frac{k^2(1+m)}{r^2} = 0$$

$$\frac{d}{dt}\left(r^2\frac{d\varphi}{dt}\right) = 0 \quad \frac{d}{dt}\left(r^2\frac{d\psi}{dt}\right) = 0 \quad \frac{d}{dt}\left(r^2\frac{d\chi}{dt}\right) = 0,$$

und es wird:

$$0 = \cos\varphi\cos\psi\cos\chi - \sin\varphi\sin\psi\sin\chi$$
$$x = r\{\sin\varphi\cos\psi\cos\chi + \cos\varphi\sin\psi\sin\chi\}$$
$$y = r\{\sin\psi\cos\varphi\cos\chi + \cos\psi\sin\varphi\sin\chi\}$$
$$z = r\{\sin\chi\cos\varphi\cos\psi + \cos\chi\sin\varphi\sin\psi\}$$

oder:

$$x = r\frac{\sin\psi\sin\chi}{\cos\varphi} = \frac{2m}{\sin 2\varphi}$$
$$y = r\frac{\sin\varphi\sin\chi}{\cos\psi} = \frac{2m}{\sin 2\psi}$$
$$z = r\frac{\sin\varphi\sin\psi}{\cos\chi} = \frac{2m}{\sin 2\chi},$$

wobei $m = \sin\varphi\sin\psi\sin\chi$

$$x = r(\cos u\cos\Omega - \sin u\sin\Omega\cos i)$$
$$y = r(\cos u\sin\Omega + \sin u\cos\Omega\cos i)$$
$$z = r\sin u\sin i$$
$$u = v + w$$
$$w = \pi - \Omega$$
$$x\sin\Omega\sin i - y\cos\Omega\sin i + z\cos i = 0$$
$$(k) = k\sqrt{1+m}$$
$$x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt} = (k)\sqrt{p}\cos i$$
$$y\frac{dz}{dt} - z\frac{dy}{dt} = (k)\sqrt{p}\sin\Omega\sin i$$
$$x\frac{dx}{dt} - x\frac{dz}{dt} = -(k)\sqrt{p}\cos\Omega\sin i$$

$$(k)^2 p = \left\{x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt}\right\}^2 + \left\{y\frac{dz}{dt} - z\frac{dy}{dt}\right\}^2 + \left\{z\frac{dx}{dt} - x\frac{dz}{dt}\right\}^2$$
$$= (x^2+y^2+z^2)\left\{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)\right\}$$
$$- \left\{x\frac{dx}{dt} + y\frac{dy}{dt} + z\frac{dz}{dt}\right\}^2$$

$$\frac{(k)^2}{a} = \frac{2(k)^2}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} - \left\{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2\right\}.$$

Aus der letzten Formel folgt für die Geschwindigkeit in der Bahn:

$$g = k\sqrt{1+m}\sqrt{\frac{2}{r}-\frac{1}{a}},$$

und es ist die Bahn

eine Ellipse, wenn $g < k\sqrt{1+m}\sqrt{\frac{2}{r}}$

„ Parabel, „ $g = k\sqrt{1+m}\sqrt{\frac{2}{r}}$

„ Hyperbel, „ $g > k\sqrt{1+m}\sqrt{\frac{2}{r}}$.

Man hat:

$$a = \left\{\frac{kT\sqrt{1+m}}{2\pi}\right\}^{2/3} \qquad \log\frac{2\pi}{k} = 2{,}562598427,$$

wobei a die halbe grosse Axe, T die Umlaufszeit bezeichnen, und

$$\frac{a^{3/2}}{T\sqrt{1+m}} = \frac{a_1^{3/2}}{T_1\sqrt{1+m_1}} = \ldots = \frac{k}{2\pi}.$$

Es ist:

$$k = 0{,}017202099$$
$$\log k = 8{,}235581441 - 10$$
$$\log k'' = 3{,}550006575$$

Man hat:

$$e = \sin\varphi$$
$$p = a(1-e^2)$$
$$q = \frac{p}{1+e},$$

sowie für die Excentricität e die Formeln:

$$\cos\varphi = \sqrt{1-e^2}$$
$$1 - e = 2\cos^2\left(45^0 + \frac{\varphi}{2}\right)$$
$$1 + e = 2\sin^2\left(45^0 - \frac{\varphi}{2}\right)$$
$$\sqrt{1+e} + \sqrt{1-e} = 2\cos\frac{\varphi}{2}$$
$$\sqrt{1+e} - \sqrt{1-e} = 2\sin\frac{\varphi}{2}.$$

Sei μ die mittlere Bewegung, so wird:

$$\mu = \frac{k}{a^{3/2}} \sqrt{1 + m}$$

und

$$M = M_0 + \mu (t - t_0),$$

dabei ist M_0 die mittlere Anomalie zur Zeit t_0.

Man hat weiter:

$$u = v + w$$
$$w = \pi - \Omega$$
$$L = \pi + M,$$

dabei ist

- v die wahre Anomalie vom Perihel zu zählen,
- π die Perihellänge,
- Ω die Länge des aufsteigenden Knotens,
- L die Länge in der Bahn,
- u der Abstand des Körpers vom aufsteigenden Knoten oder Argument der Breite,
- w Abstand des Perihels vom Knoten.

§. 280.

Relationen zwischen der Zeit und dem Orte.

$$\int_0^t r^2\, d v = \int_0^t \frac{p^2\, d v}{(1 + e \cos v)^2} = k \sqrt{p(1 + m)} \int_0^t d t.$$

Sei

$$\varepsilon = \frac{1 - e}{1 + e}$$
$$\tau = tg\, {}^1\!/_2\, v,$$

so folgt durch Integration:

I. $e < 1$ Ellipse:

$$\frac{k \sqrt{1 + m}\; t (1 + e)^2 (1 - e)}{p^{3/2}} = - \frac{2 e \tau}{1 + \varepsilon \tau^2} + \frac{2}{\sqrt{\varepsilon}}\, arctg \left(\tau \sqrt{\varepsilon}\right) + Constante.$$

II. $e > 1$ Hyperbel:

$$\frac{k \sqrt{1 + m}\; t (1 + e^2) (1 - e)}{p^{3/2}} = - \frac{2 e \tau}{1 + \varepsilon \tau^2} + \frac{1}{\sqrt{- \varepsilon}}\, log\, nat \left\{ \frac{1 + \tau \sqrt{- \varepsilon}}{1 - \tau \sqrt{- \varepsilon}} \right\} + Constante.$$

III. $e = 1$ Parabel:

$$\frac{kt\sqrt{1+m}}{q^{3/2}\sqrt{2}} = \tau + {}^1/_3\,\tau^3 + Constante.$$

Setzt man in der Ellipse:

$$tg\,{}^1/_2 E = \tau\sqrt{\varepsilon},$$

sowie

$$\mu = \frac{k\sqrt{1+m}}{a^{3/2}},$$

so wird:

$$E - e\sin E = M_0 + \mu(t - t_0).$$

Die Berechnung von E aus M durch Versuche mit Hülfe der Taf. XXXII.

Bei der Parabel wird:

$$\frac{kt}{\sqrt{2}\,q^{3/2}} = tg\,{}^1/_2 v + {}^1/_3\,tg^3\,{}^1/_2 v,$$

t die Zeit vom Perihel aus gewählt. v wird am besten wie folgt berechnet. Man setze:

$$log\,c = 1{,}7388423 = log\,\frac{2^{3/2}}{3k}.$$

$$tg\,\beta = \frac{c}{t}\,q^{3/2}$$

$$tg\,\gamma = \sqrt[3]{tg\,{}^1/_2\beta},$$

so wird:

$$tg\,{}^1/_2 v = 2\,ctg\,2\gamma.$$

Bei der Hyperbel kann man setzen:

$$tg\,{}^1/_2 F = \tau\sqrt{-\varepsilon},$$

dadurch wird:

$$\frac{k\sqrt{1+m}\,t}{-a^{3/2}} = e\,tg\,F - log\,tg\left(45^0 + \frac{F}{2}\right).$$

Man hat dann:

$$r = a\left\{\frac{e}{\cos F} - 1\right\}$$

$$tg\,\frac{v}{2} = \sqrt{\frac{e+1}{e-1}}\,tg\,\frac{F}{2}.$$

Führt man hyperbolische Functionen ein, so lassen sich bequeme Formeln darstellen. Es wird:

$$r = a\{e \cos hyp\, E - 1\}$$

$$\sqrt{r}\sin {}^1/_2 v = \sqrt{a(e+1)}\sin hyp\, {}^1/_2 E$$

$$\sqrt{r}\cos {}^1/_2 v = \sqrt{a(e+1)}\cos hyp\, {}^1/_2 E$$

$$\cos hyp\, E = \frac{e + \cos v}{1 + e\cos v}.$$

Wird e nahezu 1 (was allein im Sonnensystem vorkommt), so werden diese Hyperbelformeln keine genaue Werthe liefern.

§. 281.

Relationen zwischen mehreren Orten in der Bahn.

Euler's Gleichung.

$$6k(t_2 - t_1) = (r_1 + r_2 + s)^{3/2} \mp (r_1 + r_2 - s)^{3/2}$$

$+$ wenn die heliocentrische $\begin{Bmatrix}\text{kleiner}\\ \text{grösser}\end{Bmatrix}$ ist als 180°,

$$s^2 = r_1^2 + r_2^2 - 2r_1 r_2 \cos(v_2 - v_1).$$

Setzt man

$$\frac{s}{r_1 + r_2} = \sin\gamma,$$

so wird:

$$\frac{6k(t_2 - t_1)}{(r_1 + r_2)^{3/2}} = (\cos {}^1/_2\gamma + \sin {}^1/_2\gamma)^3 \mp (\cos {}^1/_2\gamma - \sin {}^1/_2\gamma)^3.$$

Beim oberen Zeichen — ist weiter:

$$\frac{kt}{(r_1 + r_2)^{3/2}} = \sin {}^1/_2\gamma - {}^2/_3 \sin^3 {}^1/_2\gamma.$$

Beim unteren Zeichen $+$:

$$\frac{kt}{(r_1 + r_2)^{3/2}} = \cos {}^1/_2\gamma - {}^2/_3 \cos^3 {}^1/_2\gamma.$$

Sei nun:

$$\frac{6kt}{2^{3/2}(r_1 + r_2)^{3/2}} = \sin\theta,$$

so dass

$$\sin {}^1/_2\gamma = \sqrt{2}\sin {}^1/_3\theta \quad \text{resp.} \quad \cos {}^1/_2\gamma = \sqrt{2}\sin {}^1/_3\theta.$$

Im ersteren Falle wird:

$$s = \frac{2kt}{\sqrt{r_1 + r_2}} \cdot \frac{3\sin {}^1/_3\theta}{\sin\theta}\sqrt{\cos {}^2/_3\theta} = \frac{2kt}{\sqrt{r_1 + r_2}} \cdot f,$$

wobei

$$f = \frac{3 \sin {}^1/_3 \theta}{\sin \theta} \sqrt{\cos {}^2/_3 \theta.}$$

Die Berechnung der Sehne s nach Encke's Umformung stellt sich also wie folgt:

Man berechnet das Argument η aus

$$\eta = \frac{2kt}{(r_1 + r_2)^{3/2}},\ \log 2k = 8{,}5366114,$$

sodann wird:

$$s = \frac{2kt}{\sqrt{r_1 + r_2}} \cdot f,$$

wobei f mit dem Argument η aus der Taf. X zu entnehmen ist.

Die Lambert'sche Gleichung.

$$k(t_2 - t_1) = \frac{1}{6}\{m^{3/2} \mp n^{3/2}\}$$
$$+ \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2^3} \left\{\frac{m^{5/2}}{a} \mp \frac{n^{5/2}}{a}\right\}$$
$$+ \frac{1}{7} \cdot \frac{1.3}{2.4} \cdot \frac{1}{2^5} \left\{\frac{m^{7/2}}{a} \mp \frac{n^{7/2}}{a}\right\}$$
$$+ \frac{1}{9} \cdot \frac{1.3.5}{2.4.6} \cdot \frac{1}{2^7} \left\{\frac{m^{9/2}}{a} \mp \frac{n^{9/2}}{a}\right\} + \cdots$$

Das obere Zeichen gilt, wenn die heliocentrische Bewegung kleiner ist als 180°. Für Ellipse ist $\frac{1}{a}$ positiv, für Parabel Null, für die Hyperbel negativ. Dabei ist

$$m = r_1 + r_2 + s$$
$$n = r_1 + r_2 - s.$$

Sei noch:

$$\sin {}^1/_2 \mu = {}^1/_2 \sqrt{\frac{r_1 + r_2 + s}{a}}$$
$$\sin {}^1/_2 \nu = \pm {}^1/_2 \sqrt{\frac{r_1 + r_2 - s}{a}},$$

so wird:

$$k(t_2 - t_1) = a^{3/2}\{(\mu - \sin \mu) - (\nu - \sin \nu)\}.$$

§. 282.

Das Verhältniss: Sector zum Dreieck.

$$\eta = \frac{\text{Sector}}{\text{Dreieck}} = \frac{(t_2 - t_1) k \sqrt{1+m}\sqrt{p}}{r_1 r_2 \cos(v_2 - v_1)}.$$

Setzt man:

$$2f = v_2 - v_1$$

$$\tau = (t_2 - t_1) k \sqrt{1+m},$$

so folgt:

$$\eta = \frac{\tau \sqrt{p}}{2 r_1 r_2 \cos f \sin f}.$$

Setzt man:

$$g = \tfrac{1}{2}(E_2 - E_1),$$

wo E die excentrische Anomalie bezeichnet, so wird:

$$\eta^2 = \frac{\tau^2}{2 r_1 r_2 \cos^2 f \left[r_1 + r_2 - 2 \cos g \cos f \sqrt{r_1 r_2}\right]}.$$

Setzt man:

$$m = \frac{\tau^2}{\left(2 \cos f \sqrt{r_1 r_2}\right)^3}$$

$$l = \frac{r_1 + r_2}{4 \cos f \sqrt{r_1 r_2}} - \frac{1}{2},$$

so wird:

$$\eta^2 = \frac{m}{l + \sin^2 \tfrac{1}{2} g}$$

und

$$\frac{\eta^3}{m} - \frac{\eta^2}{m} = \frac{2g - \sin 2g}{\sin^3 g}.$$

§. 283.

Entwickelung der Coordinaten nach der Zeit.

Sei

$$w = \pi - \Omega$$

$$H = (1-e)\sin w + \frac{M}{1}\sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\cos w - \frac{M^2}{2}\frac{\sin w}{(1-e)^2}$$

$$- \frac{M^3}{6}\sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\frac{\cos w}{(1-e)^3} + \frac{M^4}{24}(1+3e)\frac{\sin w}{(1-e}$$

$$+ \frac{M^5}{120}\sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\frac{1+9e}{(1-e)^6}\cos w - \cdots$$

$$K = (1 - e) \cos w - \frac{M}{1} \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \sin w + \frac{M^2}{2} \frac{\cos w}{(1-e)}$$
$$+ \frac{M^3}{6} \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \frac{\sin w}{(1-e)^3} + \frac{M^4}{24} (1 + 3e) \frac{\cos w}{(1-e)^5}$$
$$- \frac{M^5}{120} \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \frac{1+9e}{(1-e)^6} \sin w + \cdots,$$

so wird:

$$z = a \sin i \,.\, H$$
$$x = a \cos \varphi \,.\, K - a \sin \varphi \cos i \,.\, H$$
$$y = a \sin \varphi \,.\, K + a \cos \varphi \cos i \,.\, H.$$

A. N. 2251. De Casparis. Dabei ist:
a halbe grosse Axe,
i Neigung,
$\sin \varphi = e.$

Allgemeine Formeln. Setzt man:

$$H = \Sigma \alpha_k M^k$$
$$K = \Sigma \beta_k M^k,$$

ferner:

$$\alpha_\lambda = f_\lambda \sin \left(w + \lambda \frac{\pi}{2}\right)$$
$$\beta_\lambda = f_\lambda \cos \left(w + \lambda \frac{\pi}{2}\right),$$

so wird, so lange $k - j$ ungerade ist:

$$\Sigma \Sigma (k - j) f_k f_j \sin (k - j) \frac{\pi}{2} = 0 \qquad k > j;$$

ist $k - j$ gerade, so wird:

$$\Sigma \Sigma \Sigma \Sigma \Sigma \Sigma f_k f_j f_l f_m f_p f_q \, p q (p - 1)(q - 1) \cos (p - q) \frac{\pi}{2}$$
$$\cos (k - j) \frac{\pi}{2} \cdot \cos (l - m) \frac{\pi}{3} = 0,$$

und zugleich:

$$4 f_0^4 f_2^2 = 1.$$

Für hinreichend kleine Zeiten hat man:

$$x = x_{t=0} + t \left(\frac{dx}{dt}\right)_{t=0} + \frac{t^2}{1.2} \left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)_{t=0} + \frac{t^3}{1.2.3} \left(\frac{d^3x}{dt^3}\right)_{t=0} + \cdots$$

und hieraus, wenn

$$T = 1 - \left(\frac{1}{r^3}\right)_{t=0} \frac{t^2}{1.2} + \left(\frac{3s}{r^5}\right)_{t=0} \frac{t^3}{1.2.3}$$

$$+ \left[\left(3s' - 3 \cdot 5 \cdot \frac{s^2}{r^2} + \frac{1}{r}\right)\frac{1}{r^5}\right]_{t=0} \frac{t^4}{1.2.3.4} + \dots$$

$$U = t - \left(\frac{1}{r}\right)_{t=0} \frac{t^3}{1.2.3} + \left(\frac{2.3.s}{r^5}\right)_{t=0} \frac{t^4}{1.2.3.4} - \dots$$

gesetzt wird, wobei der Kürze wegen:

$$s = r\frac{dr}{dt} \quad s' = \frac{ds}{dt}$$

gesetzt wurde,

$$x = x_{t=0}\, T + \left(\frac{dx}{dt}\right)_{t=0} U$$

$$y = y_{t=0}\, T + \left(\frac{dy}{dt}\right)_{t=0} U$$

$$z = z_{t=0}\, T + \left(\frac{dz}{dt}\right)_{t=0} U$$

$$\frac{z}{a \sin i} = (1 - e)\sin(\pi - \Omega) + \frac{M}{1}\sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\cos(\pi - \Omega)$$

$$- \frac{M^2}{2}\frac{\sin(\pi - \Omega)}{(1-e)^2} - \frac{M^3}{6}\sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\frac{\cos(\pi - \Omega)}{(1-e)^3} - \dots$$

De Casparis, Monthly Not. Vol. XXXIX, p. 386.

§. 284.

Formeln für den Radius vector.

$$r = \frac{a(1-e^2)}{1 + e\cos v} = \frac{p}{1 + e\cos v} = \frac{p}{1 - e^2}(1 - e\cos E)$$

$$= \frac{a}{\cos v}(\cos E - e) = \frac{a}{\sin v}\sin E \cos\varphi$$

$$= a(1-e)\frac{\cos^2 {}^1\!/_2 E}{\cos^2 {}^1\!/_2 v} = a(1+e)\frac{\sin^2 {}^1\!/_2 E}{\sin^2 {}^1\!/_2 v}$$

$$= \frac{a(1-e^2)(1 + tg^2\, {}^1\!/_2 v)}{1 + e + (1-e)\,tg^2\, {}^1\!/_2 v}$$

$$= \frac{p}{(1+e)\cos^2 {}^1\!/_2 v + (1-e)\sin^2 {}^1\!/_2 v}$$

$$= \frac{2a}{\cos v}\cos\{{}^1\!/_2 E + {}^1\!/_2 \varphi + 45^0\}\cos\{{}^1\!/_2 E - {}^1\!/_2 \varphi - 45$$

$$= a\,\frac{\sin^2 E\,\sin^2 {}^1\!/_2\,\varphi}{\sin^2 {}^1\!/_2\,(v - E)} = a\,\frac{\sin^2 E\,\cos^2 {}^1\!/_2\,\varphi}{\sin^2 {}^1\!/_2\,(v + E)}$$

$$= \frac{p}{1 + \cos v} = \frac{p}{2\cos^2 {}^1\!/_2\,v} \text{ für die Parabel.}$$

§. 285.

Formeln für die Encke'sche Anomalie.

$$\sin W = \frac{\sin E\,\sqrt{1 - e^2}}{1 + e\cos E} \text{ analog } \sin v = \frac{\sin E\,\sqrt{1 - e^2}}{1 - e\cos E}$$

$$\cos W = \frac{\cos E + e}{1 + e\cos E} \quad \text{„} \quad \cos v = \frac{\cos E - e}{1 + e\cos E}.$$

W ist der Winkel, den der Radius vector vom zweiten Brennpunkte aus mit der Perihelrichtung einschliesst. *W* wird wie *v* vom Perihel im Sinne der Bewegung von 0 bis 360° gezählt.

§. 286.

Formeln für die excentrische Anomalie.

$$E - e''\sin E = M \qquad e'' = \frac{\sin\varphi}{\sin 1''} \qquad M = \frac{k t\,\sqrt{1 + m}}{a^{3/2}}$$

$$\cos E = \frac{\cos v + e}{1 + e\cos v} = \frac{1}{e}\left(1 - \frac{r}{a}\right)$$

$$\sin E = \frac{r\sin v}{a\cos\varphi}$$

$$\cos {}^1\!/_2\,E = \cos {}^1\!/_2\,v\,\sqrt{\frac{r}{a(1 - e)}} = \cos {}^1\!/_2\,v\,\sqrt{\frac{1 + e}{1 + e\cos v}}$$

$$\sin {}^1\!/_2\,E = \sin {}^1\!/_2\,v\,\sqrt{\frac{r}{a(1 + e)}} = \sin {}^1\!/_2\,v\,\sqrt{\frac{1 - e}{1 + e\cos v}}$$

$$tg\,{}^1\!/_2\,E = tg\,{}^1\!/_2\,v\,\sqrt{\frac{1 - e}{1 + e}} = tg\,{}^1\!/_2\,v\;tg\left(45 - \frac{\varphi}{2}\right)$$

$$\sin {}^1\!/_2\,(v - E) = \sqrt{\frac{r}{p}}\,\sin v\,\sin {}^1\!/_2\,\varphi = \sqrt{\frac{a}{r}}\,\sin E\,\sin {}^1\!/_2\,\varphi$$

$$\sin {}^1\!/_2\,(v + E) = \sqrt{\frac{r}{p}}\,\sin v\,\cos {}^1\!/_2\,\varphi = \sqrt{\frac{a}{r}}\,\sin E\,\cos {}^1\!/_2\,\varphi.$$

§. 287.

Formeln für die wahre Anomalie.

$$\sin v = \frac{a}{r} \cos \varphi \sin E = \sqrt{1 - e^2} \frac{\sin E}{1 - e \cos E}$$

$$\cos v = \frac{a}{r} (\cos E - \sin \varphi) = \frac{\cos E - e}{1 - e \cos E} = \frac{p - r}{r e}$$

$$= \frac{2a}{r} \cos \left(\frac{E + \varphi}{2} + 45^0\right) \cos \left(\frac{E - \varphi}{2} - 45^0\right)$$

$$\sin {}^1/_2 v = \sqrt{\frac{a}{r}} \sqrt{1 + e} \sin {}^1/_2 E = \sqrt{\frac{r(1 + e) - p}{2 r e}}$$

$$= \frac{\sqrt{1 + e} \sin \frac{E}{2}}{\sqrt{1 - e \cos E}}$$

$$\cos {}^1/_2 v = \sqrt{\frac{a}{r}} \sqrt{1 - e} \cos {}^1/_2 E = \sqrt{\frac{- r(1 - e) + p}{2 r e}}$$

$$= \frac{\sqrt{1 - e} \cos \frac{E}{2}}{\sqrt{1 - e \cos E}}$$

$$tg {}^1/_2 v = tg {}^1/_2 E \, tg (45^0 + {}^1/_2 \varphi) = \sqrt{\frac{1 + e}{1 - e}} tg {}^1/_2 E.$$

§. 288.

Reihenentwickelungen für *E*, *M*, *r*, *v*.

Nachstehend ist μ statt μt eingeführt.

$$v = \mu + 2 \varepsilon \sin \mu + {}^5/_4 e^2 \sin 2 \mu$$

$$+ \frac{e^3}{2^2 . 3} (13 \sin 3 \mu - 3 \sin \mu)$$

$$+ \frac{e^4}{2^5 . 3} (103 \sin 4 \mu - 44 \sin 2 \mu)$$

$$+ \frac{e^5}{2^6 . 3 . 5} (1097 \sin 5 \mu - 645 \sin 3 \mu + 50 \sin \mu)$$

$$v = \mu + \left(2 e - \frac{1}{4} e^3 + \frac{5}{96} e^5 + \frac{107}{4068} e^7\right) \sin \mu$$

$$+\left(\frac{5}{4}e^2 - \frac{11}{24}e^4 + \frac{17}{192}e^6\right)\sin 2\mu$$

$$+\left(\frac{13}{12}e^3 - \frac{43}{64}e^5 + \frac{95}{512}e^7\right)\sin 3\mu$$

$$+\left(\frac{103}{96}e^4 - \frac{451}{480}e^6\right)\sin 4\mu$$

$$+\left(\frac{1097}{960}e^5 - \frac{5967}{4608}e^7\right)\sin 5\mu$$

$$+\frac{1223}{960}e^6 \sin 6\mu + \frac{47\,273}{32\,256}e^7 \cos 7\mu + \cdots$$

$$\frac{\sin v'}{1-e^2} = \frac{M}{1}\,\frac{1}{1-e} - \frac{M^3}{6}\cdot\frac{1+3e}{(1-e)^5} + \frac{M^5}{120}\,\frac{1+24e+45e^2}{(1-e)^8}$$

$$-\frac{M^7}{5040}\cdot\frac{1+97e+947e^2+1775e^3}{(1-e)^{11}} + \cdots$$

De Casparis, Monthly Not., Vol. 39, p. 386.

$$v = E + 2\left\{\sum_{i=1}^{i=\infty}\frac{1}{i}\,\frac{e^i}{(1+\sqrt{1-e^2})^i}\cos iE\right\}$$

$$\cos v = -e + 2\,\frac{1-e^2}{2}\sum_{i=1}^{i=\infty} J_i \cos iM$$

$$\sin v = 2\sqrt{1-e^2}\sum_{i=1}^{i=\infty}\frac{dJ_i}{de}\cdot\frac{\sin iM}{i}$$

$$E = \mu + e\sin\mu + \frac{e^2}{2}\sin 2\mu$$

$$+\frac{e^3}{2^3}(3\sin 3\mu - \sin\mu)$$

$$+\frac{e^4}{1.2.3}(2\sin 4\mu - \sin 2\mu)$$

$$+\frac{e^5}{2^7.3}(5^3\sin 5\mu - 3^4\sin 3\mu + 2\sin\mu)$$

$$+\frac{e^6}{2^4.3.5}(3^4\sin 6\mu - 2^6\sin 4\mu + 5\sin\mu) + \cdots$$

$$\sin 2E = \sin 2\mu$$

$$+ e(\sin 3\mu - \sin\mu)$$

$$+ e^2(\sin 4\mu - \sin 2\mu)$$

$$+\frac{e^3}{2^3.3}(4\sin\mu - 27\sin 3\mu + 25\sin 5\mu) + \cdots$$

$$\sin 3E = \sin 3\mu + \frac{e}{2}(3\sin 4\mu - 3\sin 2\mu) + \frac{e^2}{2^3}(15\sin 5\mu - 18\sin 3\mu + 3\sin\mu) + \frac{e^3}{4}(9\sin 6\mu - 12\sin 4\mu + 3\sin 2\mu) + \cdots$$

$$tg\,E = tg\,\mu + e\frac{\sin\mu}{\cos^2\mu} + \frac{e^2}{2}\frac{d\frac{\sin^2\mu}{\cos^2\mu}}{d\mu} + \cdots + \frac{e^n}{n!}\frac{d^{n-1}\frac{\sin^{n+1}\mu}{\cos^2\mu}}{d\mu^{n-1}}.$$

$$E = \frac{M}{1-e} - \frac{M^3}{6(1-e)^4} + \frac{M^5}{120}\cdot\frac{e+9e^2}{(1-e)^7} - \frac{M^7}{5040}\frac{e+54e^2+225e^3}{(1-e)^{10}} + \cdots$$

Sei

$$J_i = \frac{1}{1.2.3\ldots i}\left\{\left(\frac{i e}{2}\right)^i - \frac{\left(\frac{i e}{2}\right)^{i+2}}{1.(i+1)} + \frac{\left(\frac{i e}{2}\right)^{i+4}}{1.2.(i+1)(i+2)} - \cdots\right\}$$

so wird:

$$E - M = \sum_{i=1}^{i=\infty}\frac{2}{i}J_i \sin i M.$$

Man hat:

$$E = v - 2\left\{\sum_{i=1}^{i=\infty}(-1)^{i+1}\frac{e^i}{(1+\sqrt{1-e^2})^i}\frac{\sin i v}{i}\right\}$$

$$\frac{r}{a} = 1 - e\cos\mu - \frac{e^2}{2}(\cos 2\mu - 1) - \frac{e^3}{2^3}(3\cos 3\mu - 3\cos\mu) - \frac{e^4}{3}(\cos 4\mu - \cos 2\mu) - \frac{e^5}{2^7.3}(5^3\cos 5\mu - 5.3^3\cos 3\mu + 10\cos\mu) - \frac{e^6}{2^4.5}(3^3\cos 6\mu - 2^5\cos 4\mu + 5\cos 2\mu) + \cdots$$

$$\frac{r}{a} = 1 + \frac{e^2}{2}$$

$$- \left(e - \frac{3}{8} e^3 + \frac{5}{192} e^5 - \frac{7}{9216} e^7\right) \cos \mu$$

$$- \left(\frac{1}{2} e^2 - \frac{1}{3} e^4 + \frac{1}{16} e^6\right) \cos 2 \mu$$

$$\left(\frac{3}{8} e^3 - \frac{45}{128} e^5 + \frac{567}{5120} e^7\right) \cos 3 \mu$$

$$- \left(\frac{1}{4} e^4 - \frac{2}{5} e^2\right) \cos 4 \mu$$

$$- \left(\frac{125}{384} e^5 - \frac{4375}{9216} e^7\right) \cos 5 \mu$$

$$- \frac{27}{80} e^6 \cos 6 \mu$$

$$- \frac{16807}{46080} e^7 \cos 7 \mu$$

$$- \cdots\cdots$$

$$- \frac{e^n}{2^{n-1} \cdot (n-1)!} \Big\{ n^{n-2} \cos n \mu - \frac{n}{1} (n-2)^{n-2} \cos (n-2) \mu + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} (n-4)^{n-2} \cos (n-4) \mu - \cdots \Big\}$$

$$\frac{r}{a} = (1-e) + \frac{\mu^2}{2} \frac{e}{(1-e)^2} - \frac{\mu^4}{24} \frac{e + 3 e^2}{(1-e)^5} + \frac{\mu^6}{720} \cdot \frac{e + 24 e^2 + 45 e^3}{(1-e)^8}$$

$$- \frac{\mu^8}{40320} \cdot \frac{e + 97 e^2 + 947 e^3 + 1755 e^4}{(1-e)^4} \quad \text{A. N. 2251}$$

$$\frac{r^2}{a^2} = 1 + \frac{3}{2} e^2$$

$$- \left(2 e - \frac{1}{4} e^3 + \frac{1}{96} e^5\right) \cos \mu$$

$$- \left(\frac{1}{2} e^2 - \frac{1}{6} e^4\right) \cos 2 \mu$$

$$- \left(\frac{1}{4} e^3 - \frac{9}{64} e^5\right) \cos 3 \mu$$

$$- \frac{1}{6} e^4 \cos 4 \mu - \frac{25}{192} e^5 \cos^5 \mu - \cdots$$

$$\frac{r^3}{a^3} = 1 + 3 e^2 + \frac{3}{8} e^4 - \cdots$$

$$- \left(3 e + \frac{9}{8} e^3 - \frac{15}{64} e^5\right) \cos \mu$$

$$- \frac{5}{8} e^4 \cos 2\mu$$

$$+ \left(\frac{1}{8} e^3 - \frac{45}{128} e^5\right) \cos 3\mu$$

$$+ \frac{1}{8} e^4 \cos 4\mu$$

$$+ \frac{15}{128} e^5 \cos 5\mu$$

$$\frac{r^4}{a^4} = 5e + \frac{15}{8} e^4 - (4e + e^2) \cos\mu + e \cos 2\mu - \cdots$$

$$\left(\frac{r}{a}\right)^i = (1 - e\cos\mu)^i$$

$$+ i e^2 \sin^2\mu\, (1 - e\cos\mu)^{i-1}$$

$$+ \frac{i e^3}{1\,.\,2} \frac{d \sin^3\mu}{d\mu} (1 - e\cos\mu)^{i-1}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$+ \frac{i e^n}{1\,.\,2\,.\,3 \ldots n - 2} \cdot \frac{d^{n-2} \sin^n\mu}{d\mu^{n-2}} (1 - e\cos\mu)^{i-1}$$

$$\frac{a^3}{r^3} = \frac{1}{(1-e)^3} - \frac{M^2}{2} \frac{3e}{(1-e)^6} + \frac{M^4}{24} \frac{3e + 45e^2}{(1-e)^9}$$

$$- \frac{M^6}{720} \frac{3e + 252e^2 + 1575e^3}{(1-e)^{12}} + \cdots$$

A. N. 2256. De Casparis.

Setzt man:

$$C_i = \frac{2}{i} \frac{\left(\frac{ie}{2}\right)^i}{1\,.\,2\,.\,3 \ldots i} \left\{1 - \frac{i+2}{i(i+1)} \frac{\left(\frac{ie}{2}\right)^2}{1}\right.$$

$$\left. + \frac{i+4}{i(i+1)(i+2)} \frac{\left(\frac{ie}{2}\right)^4}{1\,.\,2} - \cdots\right.$$

so wird:

$$\frac{r}{a} = 1 + \frac{e^2}{2} - \sum_{i=1}^{i=\infty} C_i \cos iM.$$

Man hat auch:

$$\frac{a}{r} = 1 + \sum_{i=1}^{i=\infty} J_i \cos iM$$

$$\frac{r^2}{a^2} = 1 + \frac{3}{2} e^2 - 4 \sum_{i=1}^{i=\infty} J_i \frac{\cos iM}{i^2}$$

$$r \cos v = a \left\{-\frac{3}{2} e + \sum_{i=-\infty}^{i=+\infty} J_{i-1} \frac{\cos i M}{i}\right\}$$

$$r \sin v = a \sqrt{1 - e^2} \left\{\sum_{i=-\infty}^{i=+\infty} J_{i-1} \frac{\sin i M}{i}\right\}$$

$$\frac{\cos v}{r^2} = \frac{1}{a^2} \sum_{i=-\infty}^{i=+\infty} i J_{i-1} \cos i M$$

$$\frac{\sin v}{r^2} = \frac{\sqrt{1 - e^2}}{a^2} \sum_{i=-\infty}^{i=+\infty} i J_{i-1} \sin i M.$$

§. 289.

Mittelpunktsgleichung.

Die Mittelpunktsgleichung ist der Werth

$$C = v - M,$$

wobei v die wahre und M die mittlere Anomalie bezeichnen.

$$C = 2 e \sin v + \left(\frac{3}{4} e^2 + \frac{e^4}{8} + \frac{3 e^6}{4 . 16}\right) \sin 2 v$$
$$+ \left(\frac{e^3}{3} + \frac{e^5}{8} - \frac{15}{16} e^7\right) \sin 3 v + \left(\frac{5}{2 . 16} e^4 + \frac{3}{16 . 2} e^6\right) \sin 4 v$$
$$+ \frac{3 e^5}{40} \sin 5 v + \frac{7 e^6}{16 . 12} \sin 6 v + \cdots$$

Man hat im Falle des Maximums:

$$C_{max} = 2 \operatorname{arc} \sin \left\{\frac{\sin {}^1\!/_2 \varphi \sin E}{\sqrt{\cos \varphi}}\right\} + e \sin E$$

$$e = \frac{C_{max}}{2} - \frac{11 C^3_{max}}{3 . 16^2} - \frac{587 C^5_{max}}{2^{16} . 15} - \frac{40583 C^7_{max}}{2^{23} . 5 . 7 . 9} - \cdots$$

Euler, Mem. Berl. 1746. La Caille, Leçons d'astr., §. 315. Hennert, B. A. J. 1804.

$$C_{max} = 2 e + \frac{11}{48} e^3 + \frac{589}{5120} e^5 + \frac{17219}{229376} e^7 + \cdots$$

Mittlere Anomalie.

$$M = v + 2 \sum_1^\infty \frac{(-1)^i}{i} \frac{e^i}{(1 + \sqrt{1 - e^2})^i} (1 + i \sqrt{1 - e^2}) \sin i v.$$

§. 290.

Bahnbestimmung.

Seien

X Y Z die geocentrischen Coordinaten der Sonne,
ξ η ζ „ „ „ des Himmelskörpers,
x y z „ heliocentrischen „ „ „

so besteht die Beziehung:

$$\xi = x + X = \varrho \cos\alpha \cos\delta$$
$$\eta = y + Y = \varrho \sin\alpha \cos\delta$$
$$\zeta = z + Z = \varrho \sin\delta.$$

Man hat auch, wenn

$$l \quad b \quad r$$

die heliocentrische Länge, Breite, Radiusvector des Himmelskörpers,

$$L \quad R \quad B$$

die geocentrische Länge und Radiusvector der Sonne (die Breite B kann meistens gleich 0 angenommen werden),

$$\lambda \quad \beta \quad \varrho$$

die geocentrische Länge, Breite, Entfernung des Himmelskörpers bezeichnen:

$$\varrho \cos\lambda \cos\beta = r \cos l \cos b + R \cos L \cos B$$
$$\varrho \sin\lambda \cos\beta = r \sin l \cos b + R \sin L \cos B$$
$$\varrho \sin\beta = r \sin b \qquad + R \sin B.$$

Seien nun:

$$\begin{matrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{matrix}$$

drei Orte im Raume, so werden dieselben in einer Ebene liegen, wenn die Determinante

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Diese Determinante lässt sich ersetzen durch nachstehende Gleichungen. Sei:

$$y_2 z_3 - y_3 z_2 = [r_2 r_3] \cos\alpha \qquad x_2 z_3 - x_3 z_2 = [r_2 r_3] \cos\beta$$
$$y_1 z_3 - y_3 z_1 = [r_1 r_3] \cos\alpha \qquad x_1 z_3 - x_3 z_1 = [r_1 r_3] \cos\beta$$
$$y_1 z_2 - y_2 z_1 = [r_1 r_2] \cos\alpha \qquad x_1 z_2 - x_2 z_1 = [r_1 r_2] \cos\beta$$
$$x_2 y_3 - x_3 y_2 = [r_2 r_3] \cos\gamma$$
$$x_1 y_3 - x_3 y_1 = [r_1 r_3] \cos\gamma$$
$$x_1 y_2 - x_2 y_1 = [r_1 r_2] \cos\gamma$$

so wird:

$$\frac{[r_2 r_3]}{[r_1 r_3]} x_1 + \frac{[r_1 r_2]}{[r_1 r_3]} x_3 = x_2$$
$$\frac{[r_2 r_3]}{[r_1 r_3]} y_1 + \frac{[r_1 r_2]}{[r_1 r_3]} y_3 = y_2$$
$$\frac{[r_2 r_3]}{[r_1 r_3]} z_1 + \frac{[r_1 r_2]}{[r_1 r_3]} z_3 = z_2.$$

Das Symbol

$$[r_m\ r_n]$$

bezeichnet die doppelte, von den Radiusvectoren r_m, r_n umschlossene Fläche.

Diese Formeln lassen sich nachstehend transformiren. Sei

$$\begin{aligned} K = &- \sin\beta_1 \cos\beta_2 \cos\beta_3 \sin(\lambda_3 - \lambda_2) \\ &+ \cos\beta_1 \sin\beta_2 \cos\beta_3 \sin(\lambda_3 - \lambda_1) \\ &- \cos\beta_1 \cos\beta_2 \sin\beta_3 \sin(\lambda_2 - \lambda_1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_1 = &+ R_1 \{\sin\beta_2 \cos\beta_3 \sin(\lambda_3 - L_1) - \sin\beta_3 \cos\beta_2 \sin(\lambda_2 - L_1)\} \\ &- R_1 \sin(\lambda_3 - \lambda_2) \cos\beta_2 \cos\beta_3 B_1 \operatorname{arc} 1'' \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B_1 = &- R_2 \{\sin\beta_2 \cos\beta_3 \sin(\lambda_3 - L_2) - \sin\beta_3 \cos\beta_2 \sin(\lambda_2 - L_2)\} \\ &+ R_2 \sin(\lambda_3 - \lambda_2) \cos\beta_2 \cos\beta_3 B_2 \operatorname{arc} 1'' \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_1 = &+ R_3 \{\sin\beta_2 \cos\beta_3 \sin(\lambda_3 - L_3) - \sin\beta_3 \cos\beta_2 \sin(\lambda_2 - L_3)\} \\ &- R_3 \sin(\lambda_3 - \lambda_2) \cos\beta_2 \cos\beta_3 B_3 \operatorname{arc} 1'' \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_2 = &+ R_1 \{\sin\beta_1 \cos\beta_3 \sin(\lambda_3 - L_1) - \cos\beta_1 \sin\beta_3 \sin(\lambda_1 - L_1)\} \\ &- R_1 \sin(\lambda_3 - \lambda_1) \cos\beta_1 \cos\beta_3 B_1 \operatorname{arc} 1'' \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B_2 = &- R_2 \{\sin\beta_1 \cos\beta_3 \sin(\lambda_3 - L_2) - \cos\beta_1 \sin\beta_3 \sin(\lambda_1 - L_2)\} \\ &+ R_2 \sin(\lambda_3 - \lambda_1) \cos\beta_1 \cos\beta_3 B_2 \operatorname{arc} 1'' \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_2 = &+ R_3 \{\sin\beta_1 \cos\beta_3 \sin(\lambda_3 - L_3) - \cos\beta_1 \sin\beta_3 \sin(\lambda_1 - L_3)\} \\ &- R_3 \sin(\lambda_3 - \lambda_1) \cos\beta_1 \cos\beta_3 B_3 \operatorname{arc} 1'' \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_3 = &+ R_1 \{\sin\beta_1 \cos\beta_2 \sin(\lambda_2 - L_1) - \cos\beta_1 \sin\beta_2 \sin(\lambda_1 - L_1)\} \\ &- R_1 \sin(\lambda_2 - \lambda_1) \cos\beta_1 \cos\beta_2 B_1 \operatorname{arc} 1'' \end{aligned}$$

$$B_3 = -R_2\{\sin\beta_1\cos\beta_2\sin(\lambda_2 - L_2) - \cos\beta_1\sin\beta_2\sin(\lambda_1 - L_2)\}$$
$$+ R_2\sin(\lambda_2 - \lambda_1)\cos\beta_1\cos\beta_2 B_2\, arc\, 1''$$
$$C_3 = +R_3\{\sin\beta_1\cos\beta_2\sin(\lambda_2 - L_3) - \cos\beta_1\sin\beta_2\sin(\lambda_1 - L_3)\}$$
$$- R_3\sin(\lambda_2 - \lambda_1)\cos\beta_1\cos\beta_2 B_3\, arc\, 1'',$$

so wird:

$$\left.\begin{aligned}\frac{[r_2 r_3]}{[r_1 r_3]} K\varrho_1 &= \frac{[r_2 r_3]}{[r_1 r_3]} A_1 + B_1 + \frac{[r_1 r_2]}{[r_1 r_3]} C_1 \\ K\varrho_2 &= \frac{[r_2 r_3]}{[r_1 r_3]} A_2 + B_2 + \frac{[r_1 r_2]}{[r_1 r_3]} C_2 \\ \frac{[r_1 r_2]}{[r_1 r_3]} K\varrho_3 &= \frac{[r_2 r_3]}{[r_1 r_3]} A_3 + B_3 + \frac{[r_1 r_2]}{[r_1 r_3]} C_3\end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \quad \mathrm{I}$$

Seien nun

$$t_1 \quad t_2 \quad t_3$$

die Beobachtungszeiten, und sei

$$\tau_1 = t_3 - t_2$$
$$\tau_2 = t_3 - t_1$$
$$\tau_3 = t_2 - t_1,$$

so gelten folgende Formeln:

$$\left.\begin{aligned}\frac{[r_1 r_2]}{[r_1 r_3]} &= \frac{\tau_3}{\tau_2}\left\{1 + \frac{4}{3}\frac{\tau_2^2 - \tau_3^2}{(r_1 + r_3)^3} - \frac{4\tau_1\tau_3^2}{\tau_2}\frac{r_3 - r_1}{(r_1 + r_3)^4} + \cdots\right. \\ \frac{[r_2 r_3]}{[r_1 r_3]} &= \frac{\tau_1}{\tau_2}\left\{1 + \frac{4}{3}\frac{\tau_2^2 - \tau_1^2}{(r_1 + r_3)^3} + \frac{4\tau_3\tau_1^2}{\tau_2}\frac{r_3 - r_1}{(r_1 + r_3)^4} + \cdots\right.\end{aligned}\right\} \mathrm{II}$$

Ferner ist:

$$\left.\begin{aligned}r_k^2 = \varrho_k^2 + R_k^2 - 2\varrho_k R_k\cos\beta_k\cos(\lambda_k - L_k) \\ - 2\varrho_k R_k\sin\beta_k B_k\, arc\, 1'' \\ k = 1, 2, 3\end{aligned}\right\} \mathrm{III}$$

Die Gleichungen I), II), III) bestimmen das Bahnproblem.

I. Lösung von Gauss.

Gauss setzt zunächst in II):

$$r_1 + r_3 = 2r_2,$$

und ferner:

$$k = \frac{A_2}{K}\frac{\tau_1}{\tau_2} + \frac{B_2}{K} + \frac{C_2}{K}\frac{\tau_3}{\tau_2}$$

$$l = \frac{1}{6}\left\{\frac{A_2}{K}\frac{\tau_1}{\tau_2}(\tau_2^2 - \tau_1^2) + \frac{C_2}{K}\frac{\tau_3}{\tau_2}(\tau_2^2 - \tau_3^2)\right\},$$

so dass

$$\varrho_2 = k + \frac{l}{r_2^3}.$$

Bezeichnet man ferner in dem zur Zeit der mittleren Beobachtung zwischen den Orten der Sonne, der Erde und des Himmelskörpers bestehenden Dreiecke den Winkel am Himmelskörper mit z_2, jenen an der Erde mit ψ_2, so folgt:

$$\varrho_2 = \frac{R_2 \sin(\psi_2 + z_2)}{\sin z_2}$$

$$r_2 = \frac{R_2 \sin \psi_2}{\sin z_2}.$$

Führt man diese Gleichungen in die vorstehenden ein, so ergiebt sich, wenn

$$\Omega \sin w = R_2 \sin \psi_2$$
$$\Omega \cos w = R_2 \cos \psi_2 - k$$
$$M = \frac{l}{\Omega R_2^3 \sin \psi_2^3}$$

gesetzt wird:

$$M \sin^4 z = \sin(z + w).$$

Wird z durch Versuche aus dieser Gleichung bestimmt, so erhält man leicht ϱ_2 und r_2.

II. Lösung. Man kann also verfahren wie folgt. Setzt man:

$$m = -2 R_2 \cos\beta_2 \cos(\lambda_2 - L_2) - 2 R_2 \sin\beta_2 B_2 \sin 1'',$$

so folgt mit Auslassung des Index 2):

$$r^2 = \varrho^2 + m\varrho + R^2.$$

Ferner hatten wir:

$$\varrho = k + \frac{l}{r^3},$$

also wird:

$$r^2 = \left\{k^2 + mk + R^2 + \frac{l^2}{r^6}\right\} + \frac{l}{r^3}(2k + m),$$

setzt man:

$$k^2 + mk + R^2 = W$$
$$A = w + \frac{l^2}{r^6}$$
$$B = l(2k + m),$$

so folgt:

$$r^5 = A r^3 + B.$$

Werden zwei neue Variable

$$(r) \text{ und } f$$

so eingeführt, dass

$$r = (r) f$$

$$f = \sqrt{A}$$
$$q = \frac{B}{f^5},$$

so geht die Gleichung 6) über in:

$$(r)^5 \pm (r)^3 = q,$$

die sich leicht tabuliren lässt.

Der Gebrauch der Tafel ist einfach. Man berechnet zunächst die Grössen

$$w \text{ und } B$$

ein- für allemal. Sodann mit einem geeigneten Werthe von r die Grössen

$$A, f, q.$$

Mit dem letzteren Argumente wird aus der Tafel (r) entnommen, mit welcher Grösse sodann r aus der Gleichung 7) zu berechnen ist.

Für Kometen ist in A für den ersten Versuch $r = 1$, für Planetoiden $r = 2{,}5$ zu nehmen.

Für die Verhältnisse hat Gibbs (Nat. Ac. of Sc., Vol. IV, vergl. A. N. 3061, 3075) folgende Formeln gegeben:

$$\frac{[r_2 r_3]}{[r_1 r_3]} = \frac{\tau}{\tau_2} \frac{1 + \frac{\mu_1}{r_1^3}}{1 - \frac{\mu_2}{r_2^3}}$$

$$\frac{[r_1 r_2]}{[r_1 r_3]} = \frac{\tau_3}{\tau_2} \frac{1 + \frac{\mu_3}{r_3^3}}{1 - \frac{\mu_2}{r_1^3}},$$

wobei

$$\mu_1 = {}^1/_{12}(- \tau_1^2 + \tau_1 \tau_3 + \tau_3^2)$$
$$\mu_2 = {}^1/_{12}(+ \tau_1^2 + 3 \tau_1 \tau_3 + \tau_3^2)$$
$$\mu_3 = {}^1/_{12}(+ \tau_1^2 + \tau_1 \tau_3 - \tau_3^2).$$

Dieselben sind bis auf die Glieder vierter Ordnung (incl.) genau.

§. 291.

Berechnung einer geradlinigen Bahn aus drei Beobachtungen.

$$A = tg\,\beta_1 \sin(\lambda_3 - \lambda_2) - tg\,\beta_2 \sin(\lambda_3 - \lambda_1) + tg\,\delta_3 \sin(\lambda_2 - \lambda_1)$$
$$B = tg\,\beta_2 \sin(L_1 - \lambda_3) - tg\,\beta_3 \sin(L_1 - \lambda_2)$$

$$C = tg\,\beta_2 \sin(L_2 - \lambda_3) - tg\,\beta_3 \sin(L_2 - \lambda_2)$$
$$D = tg\,\beta_2 \sin(L_3 - \lambda_3) - tg\,\beta_3 \sin(L_3 - \lambda_3)$$
$$E = tg\,\beta_1 \sin(L_2 - \lambda_2) - tg\,\beta_2 \sin(L_2 - \lambda_1)$$
$$\eta_1 = \frac{t_3 - t_1}{t_3 - t_2} \frac{C R_2}{A} - \left(\frac{t_2 - t_1}{t_3 - t_2}\right) \frac{D R_3}{A} - \frac{B R_1}{A}$$
$$\eta_2 = \eta_1 \frac{t_3 - t_2}{t_2 - t_1} \frac{E}{C},$$

sodann ist:

$$r_1 \cos b_1 \cos l_1 = \eta_1 \cos \lambda_1 + R_1 \cos L_1$$
$$r_1 \cos b_1 \sin l_1 = \eta_1 \sin \lambda_1 + R_1 \sin L_1$$
$$r \sin b_1 = \eta_1\, tg\,\beta_1$$
$$r_2 \cos b_2 \cos l_2 = \eta_2 \cos \lambda_2 + R_2 \cos L_2$$
$$r_2 \cos b_2 \sin l_2 = \eta_2 \sin \lambda_2 + R_2 \sin L_2$$
$$r_2 \sin b_2 = \eta_2\, tg\,\beta_2.$$

Damit sind $r_1\, l_1\, b_1$ und $r_2\, l_2\, b_2$ gegeben.

§. 292.

Berechnung einer Kreisbahn.

Es seien:

$t_1\, t_2$ die Beobachtungszeiten,
$\lambda_1\, \lambda_2$ „ Längen } geocentrisch,
$\beta_1\, \beta_2$ „ Breiten } geocentrisch,
$L_1\, L_2$ „ Sonnenlängen,
$R_1\, R_2$ „ Radienvectoren.

Man rechne:

$$\cos\psi_{\rm I} = \cos\beta_1 \cos(\lambda_1 - L_1)$$
$$\sin\psi_{\rm I} \cos P_{\rm I} = \cos\beta_1 \sin(\lambda_1 - L_1)$$
$$\sin\psi_{\rm I} \sin P_{\rm I} = \sin\beta_1$$
$$\cos\psi_{\rm II} = \cos\beta_2 \cos(\lambda_2 - L_2)$$
$$\sin\psi_{\rm II} \cos P_{\rm II} = \cos\beta_2 \sin(\lambda_2 - L_2)$$
$$\sin\psi_{\rm II} \sin P_{\rm II} = \sin\beta_2,$$

sodann:

$$w \sin W = \sin {}^1\!/_2 (L_2 - L_1) \sin {}^1\!/_2 (P_2 + P_1)$$
$$w \cos W = \cos {}^1\!/_2 (L_2 - L_1) \sin {}^1\!/_2 (P_2 - P_1)$$
$$W' = W - {}^1\!/_2 (\psi_2 + \psi_1)$$

$$h \sin H = \sin \tfrac{1}{2}(L_2 - L_1) \cos \tfrac{1}{2}(P_2 + P_1)$$
$$h \cos H = \cos \tfrac{1}{2}(L_2 - L_1) \cos \tfrac{1}{2}(P_2 - P_1)$$
$$H' = H + \tfrac{1}{2}(\psi_2 - \psi_1).$$

Probe. $w^2 + h^2 = 1.$

Nun bestimmt man unter einer Annahme für a

$$\sin z_1 = \frac{R_1 \sin \psi_1}{a} \qquad \text{NB.} \quad \psi_1 + z_1 < 180^0$$
$$\sin z_2 = \frac{R_2 \sin \psi_2}{a} \qquad \psi_2 + z_2 < 180^0$$

so wird:

$$\sin^2 f = w^2 \sin^2 \{W' - \tfrac{1}{2}(z_2 + z_1)\} + h^2 \sin^2 \{H' + \tfrac{1}{2}(z_2 - z_1)\}.$$

Der hieraus sich ergebende Werth für f muss, falls eine richtige Hypothese über a gemacht wurde, identisch sein mit

$$f = \frac{k}{a^{3/2}} \frac{t_2 - t_1}{2\, arc\, 1''}, \text{ wobei } \log \frac{k}{2\, arc\, 1''} = 3.2489766.$$

Ist a ermittelt, so folgt:

$$\varrho_1 = R_1 \cos \psi_1 + a \cos z_1$$
$$\varrho_2 = R_2 \cos \psi_2 + a \cos z_2.$$

§. 293.

Berechnung der Meteoritenbahnen aus einem Radianten.

Sei α, δ der gegebene Radiant für die Zeit t (in Tagen). Man verwandle α und δ in λ und β nach bekannten Formeln (p...) und suche für t aus dem Berliner Jahrbuch die Sonnenlänge L und den Radiusvector R. Dann hat man zu rechnen:

$$\log e' = 1{,}7609$$
$$\pi' = 280^0 21' + 1'{,}03\,(t - 1850)$$
$$L' - L = e' \sin(\pi' - L) \text{ (in Einheiten einer Bogenminute)}$$
$$ctg\, z = \frac{1}{R} \cos b \sin(l - L')$$
$$z < 180^0$$
$$\gamma = tg\, \tfrac{1}{2} z$$
$$f = R\gamma$$

$\sin b$ positiv	$\sin b$ negativ
$\Omega = L$	$\Omega = L + 180^0$
$\sqrt{2q}\, \sin i = f \sin b$	$\sqrt{2q}\, \sin i = - f \sin b$
(absteigender Schwarm)	(aufsteigender Schwarm)

$$\sqrt{2q}\, \cos i = 1 + f \cos b \sin (e - L)$$

$$tg\, {}^1\!/_2\, v = \frac{f \cos b \cos (l - L) - \sin (L' - L)}{\sqrt{2q}}$$

$${}^1\!/_2\, v < + 90^0$$

$$\pi = L - v + 180^0.$$

Probe.

$$q = R \cos {}^1\!/_2\, v^2.$$

Daraus ergeben sich die Elemente:

$$\pi,\ \Omega,\ i,\ q.$$

Man vergl. Dr. R. Lehmann-Filhés: Die Bestimmung von [eteorbahnen nebst verwandten Aufgaben. Berlin 1883.

Es ist oft wünschenswerth, zu wissen, ob eine elliptische der parabolische Bahn der Erde genügend nahe kommen kann, m Meteoriten erwarten zu können. In diesem Falle muss

$$1 \pm e \cos (\Omega - \pi) = p$$

ein. Gilt das obere Zeichen, so kommt die Erde der Bahn im ufsteigenden, sonst im niedersteigenden Knoten nahe. Im Falle iner parabolischen Bahn hat man für den ersteren Fall, da $= 1$ wird:

$$\cos^2 \frac{\Omega - \pi}{2} = q,$$

nd für den letzteren

$$\sin^2 \frac{\Omega - \pi}{2} = q.$$

Soll aus einem parabolischen Elementensystem

$$\Omega\ \pi\ i\ q$$

er Radiationspunkt berechnet werden, so hat man, wenn β die reite, λ die Länge des Radianten bezeichnet, und L die Sonnen-inge

$$tg (\lambda - L) = \frac{2 \cos i \cos \frac{\vartheta}{2} - \sqrt{2}}{2 \sin \frac{\vartheta}{2}}$$

$$tg\, \beta = \mp \frac{2 \sin i \cos \frac{\vartheta}{2}}{2 \cos i \cos \frac{\vartheta}{2} - \sqrt{2}} \sin (\lambda - L),$$

labei ist ϑ die wahre Anomalie der Erde.

Man hat für

$L = \Omega$, wenn der Schnitt im niedersteigenden Knoten.

$L = \Omega - 180^0$, wenn der Schnitt im aufsteigenden Knoten.

§. 294.

Bahnbestimmung der Doppelsterne.

Methode von Klinkerfuess. A. N. 990.

Seien

t die Zeiten, φ die Winkel, d die Distanzen

t_1 „ „ φ_1 „ „ d_1 „ „

t_2 „ „ φ_2 „ „ d_2 „ „

des Doppelsterns. Man rechne

$$2f = \varphi + \varphi_1$$
$$2f_1 = \varphi_1 + \varphi_2$$

$$a_1 = \frac{\cos\varphi_1}{d_1} - \frac{\cos\varphi}{d}, \quad a_2 = \frac{\cos\varphi_2}{d_2} - \frac{\cos\varphi}{d}$$

$$b_1 = \frac{\sin\varphi_1}{d_1} - \frac{\sin\varphi}{d}, \quad b_2 = \frac{\sin\varphi_2}{d_2} - \frac{\sin\varphi}{d}$$

$$c_1 = \frac{1}{d_1^2} - \frac{1}{d^2}, \quad c_2 = \frac{1}{d_2^2} - \frac{1}{d^2};$$

ferner

$$A = \frac{\sin(f - \varphi_2)}{\sin(\varphi_1 - \varphi)} a_1 + \frac{\sin(\varphi_1 - f)}{\sin(\varphi_2 - \varphi)} a_2 - \frac{\sin(\varphi_2 - \varphi_1)}{\sin(f - \varphi)} \frac{\cos\varphi}{d}$$

$$A_1 = \frac{\sin(f_1 - \varphi_2)}{\sin(\varphi_1 - \varphi)} a_1 + \frac{\sin(\varphi_1 - f_1)}{\sin(\varphi_2 - \varphi)} a_2 - \frac{\sin(\varphi_2 - \varphi_1)}{\sin(f_1 - \varphi)} \frac{\cos\varphi}{d}$$

$$B = \frac{\sin(f_1 - \varphi_2)}{\sin(\varphi_1 - \varphi)} b_1 + \frac{\sin(\varphi_1 - f)}{\sin(\varphi_2 - \varphi)} b_2 - \frac{\sin(\varphi_2 - \varphi_1)}{\sin(f - \varphi)} \frac{\sin\varphi}{d}$$

$$B_1 = \frac{\sin(f_1 - \varphi_2)}{\sin(\varphi_1 - \varphi)} b_1 + \frac{\sin(\varphi_1 - f_1)}{\sin(\varphi_2 - \varphi)} b_2 - \frac{\sin(\varphi_2 - \varphi_1)}{\sin(f_1 - \varphi)} \frac{\sin\varphi}{d}$$

$$C = \frac{\sin(f - \varphi_2)}{\sin(\varphi_1 - \varphi)} c_1 + \frac{\sin(\varphi_1 - f)}{\sin(\varphi_2 - \varphi)} c_2 - \frac{\sin(\varphi_2 - \varphi_1)}{\sin(f - \varphi)} \frac{1}{d^2}$$

$$C_1 = \frac{\sin(f_1 - \varphi_2)}{\sin(\varphi_1 - \varphi)} c_1 + \frac{\sin(\varphi_1 - f_1)}{\sin(\varphi_2 - \varphi)} c_2 - \frac{\sin(\varphi_2 - \varphi_1)}{\sin(f_1 - \varphi)} \frac{1}{d^2}.$$

Sei weiter:

$$M = \frac{\sin(\varphi_2 - \varphi_1)}{\sin(f - \varphi)}$$

$$M_1 = \frac{\sin(\varphi_2 - \varphi_1)}{\sin(f_1 - \varphi)},$$

o wird:

$$n \cos N = A + M \cos f \frac{1}{R}$$

$$n \sin N = B + M \sin f \frac{1}{R}$$

$$k = C + M \frac{1}{R^2}$$

$$n_1 \cos N_1 = A_1 + M_1 \cos f_1 \frac{1}{R_1}$$

$$n_1 \sin N_1 = B_1 + M_1 \sin f_1 \frac{1}{R_1}$$

$$k_1 = C_1 + M_1 \frac{1}{R_1^2}.$$

Nun wählt man für die Distanzen R und R_1 geeignete Näherungswerthe, und zwar immer:

$$Q R^2 = {}^3/_2\, m \frac{t_1 - t}{\varphi_1 - \varphi} - {}^1/_4 \{d^2 + d_1^2\}$$

$$Q_1 R_1^2 = {}^3/_2\, m \frac{t_2 - t_1}{\varphi_2 - \varphi_1} - {}^1/_4 \{d_1^2 + d_2^2\}.$$

$\frac{m}{2}$ ist die in der Zeiteinheit beschriebene Fläche, die durch die Beobachtung gegeben ist. $Q = Q_1 = 1$ (erste Näherung).

Sodann ist

$$\beta \cos (N - \Pi) = \frac{k}{2n}$$

$$\beta \cos (N_1 - \Pi) = \frac{k_1}{2n_1}$$

und

$$\frac{r_k}{p} = 1 - \beta d_k \cos (\varphi_k - \Pi) \quad k = 1, 2, 3.$$

Sodann rechnet man aus

$$\left(\frac{d}{r}\right)^2 tg^2 i \sin (\varphi_1 + \varphi - 2 \Omega) = \left(\left(\frac{r_1}{r} \frac{d}{d_1}\right)^2 - 1\right) \operatorname{cosec} (\varphi_1 - \varphi)$$

$$\left(\frac{d}{r}\right)^2 tg^2 i \sin (\varphi_2 + \varphi - 2 \Omega) = \left(\left(\frac{r_2}{r} \frac{d}{d_2}\right)^2 - 1\right) \operatorname{cosec} (\varphi_2 - \varphi)$$

die Grössen

$$\Omega \text{ und } \frac{d}{r}\, tg^2 i,$$

mit diesen ergiebt sich

$$\frac{d^2}{r^2} = 1 - \frac{d^2}{r^2} tg^2 i \sin^2(\varphi - \Omega),$$

nachdem nun

$$\frac{r}{p}$$

bekannt ist, erhält man hieraus p und i.

Für die Rechnung von e und $\pi - \Omega$ hat man die Formeln:

$$\frac{e}{p} \cos(\pi - \Omega) = \beta \cos(\Pi - \Omega)$$

$$\frac{e}{p} \sin(\pi - \Omega) = \beta \cos i \sin(\Pi - \Omega).$$

Nun rechne man die Verbesserungen der drei Hypothesen von Q und Q_1 nach den Formeln:

$$\varDelta Q = \frac{p^2 \cos i}{(1 - e^2)^{3/2}} \frac{M_1 - M}{m(t_1 - t)}$$

$$\varDelta Q_1 = \frac{p^2 \cos i}{(1 - e^2)^{3/2}} \frac{M_2 - M_1}{m(t_2 - t_1)}.$$

M M_1 M_2 sind die mittleren Anomalien. Diese werden aus den Formeln der excentrischen Anomalie berechnet.

$$e \cos E_k = 1 - \frac{r_k}{p}(1 - e^2) \qquad k = 0, 1, 2.$$

Hieraus E_k und endlich M_k aus

$$M_k = E_k - e'' \sin E_k$$

$$e'' = \frac{\sin \varphi}{\sin 1''} = \frac{e}{\sin 1''}.$$

Dieses Verfahren wird so lange fortgesetzt, bis die Verbesserungen $\varDelta Q$ und $\varDelta Q_1$ so klein werden, als man sie haben will.

§. 295.

Bestimmung einer Planetenbahn aus drei Beobachtungen nach Tietjen.

(Berliner Jahrbuch 1879.)

Seien

	app.		app.	
t_1	α_1	$lfp\,\alpha_1$	δ_1	$lfp\,\delta_1$
t_2	α_2	$lfp\,\alpha_2$	δ_2	$lfp\,\delta_2$
t_3	α_3	$lfp\,\alpha_3$	δ_3	$lfp\,\delta_3$

die gegebenen Beobachtungen.

Diese müssen auf den Jahresanfang reducirt werden nach en Formeln:

$$\Delta\alpha = -\{f + g \sin(G+\alpha) \, tg\,\delta + h \sin(H+\alpha) \sec\delta\} - h^0 \sec\delta \sin(H^0+\alpha)$$

$$\Delta\delta = -\{g \cos(G+\alpha) + h \cos(H+\alpha) \sin\delta + i \cos\delta\} - h_0^0 \sin\delta \cos(H^0+\alpha)$$

ie Grössen

$$f\ g\ h\ G\ H\ i$$

ind dem Berliner Jahrbuch zu entnehmen. h^0 und H^0 haben olgende Werthe:

	$\log h_0$	H^0
für 1850:	9,5340	350° 29′
„ 1900:	9,5338	349° 42′

Iierauf sind α in Bogen umzuwandeln und in Länge und Breite , β, nach den Formeln:

$$m \sin M = \sin\delta$$
$$m \cos M = \cos\delta \sin\alpha$$
$$\cos\beta \sin\lambda = m \cos(M-\varepsilon)$$
$$\cos\beta \cos\lambda = \cos\delta \cos\alpha$$
$$\sin\beta = m \sin(M-\varepsilon);$$

ε ist die Schiefe der Ekliptik für Jahresanfang.

Controlformeln:

$$\cos\beta \sin(\lambda-\alpha) = 2\cos\alpha \,.\, m \sin{}^1/_2\,\varepsilon \sin(M - {}^1/_2\,\varepsilon)$$

$$\sin{}^1/_2(\delta-\beta) = \sec{}^1/_2(\delta+\beta) \,.\, m \sin{}^1/_2\,\varepsilon \cos(M - {}^1/_2\,\varepsilon).$$

Hierauf werden die Zeiten durch Anbringung des Längenunterschiedes der Beobachtungsstation auf Berlin reducirt.

$$t_{\text{Berlin}} = t_{\text{Ort}} + \text{Längendifferenz} \begin{array}{l} + \text{westlich.} \\ - \text{östlich.} \end{array}$$

Längendifferenz im Berliner Jahrbuch.

Für diese Zeiten werden aus dem Berliner Jahrbuch die Grössen Sonnenlänge $\odot$, Sonnenbreite B und Radiusvector der Erde R

$$\odot_1 \quad B_1 \quad \log R_1$$
$$\odot_2 \quad B_2 \quad \log R_2$$
$$\odot_3 \quad B_3 \quad \log R_3$$

entnommen und

$$L_1 = \odot + 180^0$$
$$L_2 = \odot + 180^0$$
$$L_3 = \odot + 180^0$$

gebildet.

Bei der ersten Planetenbahnbestimmung kann man einfach die Parallaxe unberücksichtigt lassen und die Sonnenbreite = 0 setzen. Es handelt sich ja gewöhnlich nur darum, schnell eine Auffindungsephemeride zu haben, an welche nach den ferneren Beobachtungen vor der Hand empirische Correctionen angebracht werden.

Man hat weiter zu rechnen:

$$tg\,J\,sin\,(\lambda_1 - K) = tg\,\beta_1$$

$$tg\,J\,cos\,(\lambda_1 - K) = \frac{tg\,\beta_2 - tg\,\beta_1\,cos\,(\lambda_3 - \lambda_1)}{sin\,(\lambda_3 - \lambda_1)}$$

Controle:

$$tg\,J\,sin(\lambda_2 - K) = tg\,\beta_2;$$

ferner:

$$tg\,\beta_2^0 = tg\,J\,sin(\lambda_2 - K)$$

$$a_1 = \frac{tg\,J\,sec\,\beta_2}{tg\,\beta_2 - tg\,\beta_2^0}$$

$$\theta_1 = t_3 - t_2$$

$$\theta_2 = t_3 - t_1$$

$$\theta_3 = t_2 - t_1$$

$$q_0 = \frac{k^2}{6}\,\theta_1\,\theta_3, \quad \text{wobei} \quad log\,\frac{k^2}{6} = 5{,}6930116 - 10$$

$$N_1 = \frac{R_2\,R_3\,sin(L_3 - L_2)}{R_1\,R_3\,sin(L_3 - L)}$$

$$N_3 = \frac{R_2\,R_1\,sin(L_2 - L_1)}{R_1\,R_3\,sin(L_3 - L_1)}$$

$$n_0 = \frac{\theta_1}{\theta_2}$$

$$n_2^0 = \frac{\theta_3}{\theta_2}$$

$$c_1 = a_1\,R_1\,sin(L_1 - K)$$

$$c_2 = a_1\,R_2\,sin(L_2 - K)$$

$$c_3 = a_1\,R_3\,sin(L_3 - K)$$

$$tg\,\delta_2 = \frac{tg(\lambda_2 - L_2)}{cos\,w_2} \ldots$$ NB. δ_2 stets so zu nehmen, dass $cos\,\delta_2 = cos\,\beta_2\,cos\,(\lambda_2 - L_2)$.

wo

$$tg\,w_2 = \frac{tg\,\beta_2}{sin\,(\lambda_2 - L_2)}.$$

un werden berechnet:

$$g_1 = \frac{R_3 \sin(\lambda_3 - L_3)}{f c_3}$$

$$g_3 = \frac{R_1 \sin(\lambda_1 - L_1)}{f c_1},$$

o

$$f = \cos\beta_2 \sin(\lambda_3 - \lambda_1)$$

$$l_1 = \frac{\sin(\lambda_3 - \lambda_1)}{a_1 R_1 R_3 \sin(L_3 - L_1)}.$$

Veiter rechne man:

$$M_1 = \frac{\sin(\lambda_3 - \lambda_2)}{\sin(\lambda_3 - \lambda_1)} + g_1$$

$$M_3 = \frac{\sin(\lambda_2 - \lambda_1)}{\sin(\lambda_3 - \lambda_1)} - g_3$$

$$M_1' = \frac{\sin(\lambda_3 - K)}{h c_3}$$

$$M_2' = \frac{\sin(\lambda_1 - K)}{h c_1}.$$

I. Näherung.

$$k_2 = c_1(N_1 - n_0) + c_3(N_3 - n_2^0)$$

$$l_2 = c_1 v_1 + c_3 v_3$$

wobei

$$v_1 = q_0(1 + n_0)$$

$$v_3 = q_0(1 + n_2^0)$$

$$\mu \sin q = R_2 \sin\delta_2$$

$$\mu \cos q = R_2 \cos\delta_2 + k_2$$

$$m = \frac{l_2}{\mu(R_2 \sin\delta_2)^3}.$$

Die Gleichung

$$\sin(z_2 - q) = m \sin^4 z_2$$

durch Versuche zu lösen. Als ersten Näherungswerth nehme man z'_2 aus

$$\sin(z'_2 - q) = \frac{m \sin q^4}{1 - 4m \sin^4 q \, ctg\, q}$$

und leite z''_2 aus

$$\sin(z'' - q) = m \sin z'^4$$

ab, notire aber dabei die logarithmische Differenz d für 1″ bei $\log \sin z'$ und jene D für 1″ bei $\log \sin(z'' - q)$, sodann ist ein sehr genäherter dritter Werth:

$$z_2''' = z_2'' + \frac{4d}{D - 4d}(z_2'' - z');$$

hat man z_2 gefunden, so wird gerechnet:

$$\Delta_2 = R_2 \frac{\sin(\delta_2 - z_2)}{\sin z_2}$$

$$r_2 = R_2 \frac{\sin \delta_2}{\sin z_2}$$

$$\varrho_2 = \Delta_2 \cos \beta_2.$$

Sodann

$$n_1 = n_0 + \frac{v_1}{r_2^3}$$

$$n_3 = n_2^0 + \frac{v_3}{r_2^3}.$$

$$n_1 \varrho_1 = M_1 \varrho_2 + M_1' (N_1 - n_1)$$

$$n_3 \varrho_3 = M_3 \varrho_2 + M_3' (N_3 - n_3)$$

und für Controle:

$$\varrho_2 \, tg\, \beta_2 = n_1 \varrho_1 \, tg\, \beta_1 + n_3 \varrho_3 \, tg\, \beta_3.$$

Hiermit sind

$$\varrho_1 \quad \varrho_2 \quad \varrho_3$$

genähert gegeben.

Hierauf werden die Beobachtungszeiten wegen Aberration corrigirt nach der Formel

$$t_k' = t_k - (7{,}76057)\, \varrho_k \cos \beta_k \qquad k = 1, 2, 3.$$

Die Zahl in der Klammer ist Logarithmus und giebt die Correction in Einheiten des mittleren Tages.

Dann rechne man:

$$\begin{matrix} r_1 & r_2 & r_3 \\ r_2 & b_2 & l_2 \\ r_3 & b_3 & l_3 \end{matrix}$$

aus

$$\left.\begin{aligned} r \cos b \sin(l - L) &= \varrho \sin(\lambda - L) \\ r \cos b \cos(l - L) &= \varrho \cos(l - L) + R \\ r \sin b \quad &= \varrho \, tg\, \beta \end{aligned}\right\} r, l, b,$$

sowie

$$\left.\begin{aligned} tg\, i \sin(l_1 - \Omega) &= tg\, b_1 \\ tg\, i \cos(l_1 - \Omega) &= \frac{tg\, b_3 - \cos(l_3 - l_1)\, tg\, b_1}{\sin(l_3 - l_1)} \end{aligned}\right\} i, \Omega,$$

und weiter

$$\left.\begin{aligned} tg\, u_1 &= tg(l_1 - \Omega) \sec i \\ tg\, u_2 &= tg(l_2 - \Omega) \sec i \\ tg\, u_3 &= tg(l_3 - \Omega) \sec i \end{aligned}\right\} u_1 \; u_2 \; u_3$$

$$\left\{\begin{aligned} \cos\gamma_1 &= \frac{2\sqrt{r_2 r_3}}{r_2 + r_3}\cos {}^1/_2 (u_3 - u_2) \\ \Gamma &= \log\frac{1}{2\sin^2 {}^1/_2 \gamma} \\ \eta_1 &= \frac{(t'_3 - t'_2)^2}{(r_3 + r_2)^3} \\ \log y_1 &= a'\eta + (a''\eta - b''\eta^2); \end{aligned}\right.$$

analog rechnet man y_2 und y_3. Es ist für Zwischenzeiten von etwa zwei Monaten ausreichend:

$$\left.\begin{aligned} \log a' &= 3{,}2338859 \\ \log a'' &= 3{,}614097 - \Gamma \\ \log b'' &= 0{,}034108 \end{aligned}\right\} \text{ in Einheiten der siebenten Decimalstelle.}$$

Mit den Werthen:

$$n_0 = \frac{t'_3 - t'_2}{t'_3 - t'_1} \qquad n_2^0 = \frac{t'_2 - t'_1}{t'_3 - t'_1}$$

$$v_1 = n_0 r_2^3 \left\{\frac{y_2}{y_1} - 1\right\} \qquad v_3 = n_2^0 r_2^3 \left\{\frac{y_2}{y_3} - 1\right\}$$

wiederhole man die Auflösung der Gleichung $\sin(z - q) = m \sin z^4$, indem man setzt:

$$k_2 = c_1 (N_1 - n_0) + c_3 (N_3 - n_2^0)$$
$$l_2 = c_1 v_1 + c_3 v_3.$$

Die Berechnung der Elemente wird dann auf die in §. 297 mitgetheilte Art gemacht.

NB. Dieses Verfahren kann nur dann angewendet werden, wenn die Zwischenzeiten nicht mehr als drei Monate übersteigen. Es reicht also für die ersten Bahnbestimmungen vollkommen aus. Die strengen Methoden findet man in Oppolzer's Lehrbuch zur Bahnbestimmung.

§. 296.

Gauss-Olber'sche Methode zur Berechnung einer Kometenbahn.

Es seien

$\varrho\ \varrho'\ \varrho''$ die kurtirten Abstände (zu bestimmen),

$\lambda\ \lambda'\ \lambda''$ „ Längen } (geocentrisch),

$\beta\ \beta'\ \beta''$ „ Breiten }

$L\ L'\ L''$ die Sonnenlängen
$R\ R'\ R''$ „ Radienvectoren } (aus Berliner Jahrbuch),
$t\ t'\ t''$ „ Beobachtungszeiten.

Man rechne:

$$M = \frac{t'' - t'}{t' - t} \cdot \frac{tg\,\beta' \, sin\,(\lambda - L') - tg\,\beta \, sin\,(\lambda' - L')}{tg\,\beta'' \, sin\,(\lambda' - L') - tg\,\beta' \, sin\,(\lambda'' - L')}$$

$$\left.\begin{aligned} R'' \cos(L'' - L) - R &= g \cos(G - L) \\ R'' \sin(L'' - L) &= g \sin(G - L) \end{aligned}\right\} g,\ G.$$

$$\left.\begin{aligned} M - \cos(\lambda'' - \lambda) &= h \cos\xi \cos(H - \lambda'') \\ \sin(\lambda'' - \lambda) &= h \cos\xi \sin(H - \lambda'') \\ M\,tg\,\beta'' - tg\,\beta &= h \sin\xi \end{aligned}\right\} h\ \xi\ H$$

$$\cos\xi \ \cos(G - H) = \cos\varphi$$
$$\cos\beta \ \cos(\lambda - L) = \cos\psi$$
$$\cos\beta'' \cos(\lambda'' - L'') = \cos\psi''$$

$$g \ \sin\varphi = A$$
$$R \ \sin\psi = B$$
$$R'' \sin\psi'' = B''$$

$$h \cos\beta = b$$
$$\frac{h \cos\beta''}{M} = b''$$

$$g \cos\varphi - b\,R \cos\psi = c$$
$$g \cos\varphi - b''\,R'' \cos\psi'' = c''.$$

Dann wird:

$$r^2 = \left(\frac{u + c}{b}\right)^2 + B^2$$
$$r''^2 = \left(\frac{u + c''}{b''}\right)^2 + B''^2$$
$$k^2 = u^2 + A^2$$

und der Werth u muss so bestimmt werden, dass

$$(r + r'' + k)^{3/2} - (r + r'' - k)^{3/2} = \frac{t'' - t}{m},$$

wobei

$$log\ m = 0{,}9862673.$$

Erscheint der Werth von M zu unbestimmt, wegen der Kleinheit des Zählers und Nenners, so wählt man statt M entweder

$$M' = \frac{t'' - t'}{t'' - t} \cdot \frac{\sin(\lambda' - \lambda)}{\sin(\lambda'' - \lambda')}$$

oder

$$M'' = \frac{t'' - t'}{t'' - t} \cdot \frac{tg\,\beta' \cos(\lambda - L') - tg\,\beta \cos(\lambda' - L')}{tg\,\beta'' \cos(\lambda' - L') - tg\,\beta' \cos(\lambda'' - L')},$$

e nachdem die Differenzen der geocentrischen Längen oder der Breiten die bedeutenderen sind.

Sind sodann genäherte Werthe von r und r'' bestimmt, so hat man den Werth von M' mit dem Factor:

$$1 - \tfrac{1}{2}\,\tau''\,\tau' \frac{\sin(\lambda' - L')}{\sin(\lambda' - \lambda)} \frac{R'}{\varrho} \left(\frac{1}{r'^3} - \frac{1}{R'^3}\right)$$

und den Werth von M'' mit dem Factor:

$$1 - \tfrac{1}{2}\,\tau''\,\tau' \frac{tg\,\beta'}{tg\,\beta' \cos(\lambda - L') - tg\,\beta \cos(\lambda' - L')} \frac{R'}{\varrho} \left(\frac{1}{r'^3} - \frac{1}{R'^3}\right)$$

zu multipliciren, um genauere Werthe zu erhalten. Ist u gefunden, dann ist

$$\varrho = \frac{u + g \cos\varphi}{h}$$

$$\varrho'' = M\varrho.$$

§. 297.

Bahnbestimmung aus zwei heliocentrischen Orten.

Gegeben

$$\begin{matrix} \varrho_1 & \lambda_1 & \beta_1 \\ \varrho_2 & \lambda_2 & \beta_2. \end{matrix}$$

Man rechne

$$\begin{matrix} r_1 & l_1 & b_1 \\ r_2 & l_2 & b_2 \end{matrix}$$

nach den Formeln:

$$\varrho \cos\lambda \cos\beta = r \cos l \cos b + R \cos L$$

$$\varrho \sin\lambda \cos\beta = r \sin l \cos b + R \sin L$$

$$\varrho \sin\beta = r \sin b.$$

R Radiusvector, L die Sonnenlänge.

Man rechnet

$$\left.\begin{aligned} tg\,i \sin(l_1 - \Omega) &= tg\,b_1 \\ tg\,i \cos(l_1 - \Omega) &= \frac{tg\,b_2 - tg\,b_1 \cos(l_2 - l_1)}{\sin(l_2 - l_1)} \end{aligned}\right\} i\ \Omega;$$

i ist positiv, d. h. $< 90^0$, wenn die heliocentrischen Längen zunehmen, also

$$l_2 > l_1$$

ist

$$l_1 > l_2,$$

dann ist

$$90^0 < i < 180^0.$$

Ferner wird, wenn $sin\, i < \frac{1}{\sqrt{2}}$

$$tg\, u_1 = \frac{tg\,(l_1 - \Omega)}{cos\, i}$$

$$tg\, u_2 = \frac{tg\,(l_2 - \Omega)}{cos\, i}.$$

Ist dagegen

$$sin\, i > \frac{1}{\sqrt{2}},$$

so hat man:

$$tg\, u_1 = \frac{tg\, b_1}{cos\,(l_1 - \Omega)\, sin\, i} \quad \left\{ \begin{array}{l} sin\, u \text{ dasselbe Zeichen} \\ \text{wie } sin\, b \end{array} \right.$$

$$tg\, u_2 = \frac{tg\, b_2}{cos\,(l_2 - \Omega)\, sin\, i}.$$

Zur Probe kann man rechnen:

$$tg\, u_1 = \frac{sin\,(l_1 - \Omega)\, cos\, i + tg\, b_1\, sin\, i}{cos\,(l_1 - \Omega)}$$

$$tg\, u_2 = \frac{sin\,(l_2 - \Omega)\, cos\, i + tg\, b_2\, sin\, i}{cos\,(l_2 - \Omega)}$$

($sin\, u$ wie Zähler, $cos\, u$ wie Nenner bezeichnet).

Zur ferneren Probe rechne man:

$$2f = u_2 - u_1$$

und

$$sin\, f^2 = sin^2\, {}^1\!/_2\,(l_2 - l_1)\, cos\, b_1\, cos\, b_2 + sin^2\, {}^1\!/_2\,(b_2 - b_1),$$

welche Werthe f übereinstimmen müssen.

Die weitere Rechnung ist durch die Bahngestalt bestimmt.

A. Parabolische Bahnen.

$$\frac{1}{\sqrt{q}}\, cos\, {}^1\!/_2\, v_1 = \frac{1}{\sqrt{r_1}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{q}}\, sin\, {}^1\!/_2\, v_1 = \frac{ctg\, {}^1\!/_2\,(u_2 - u_1)}{\sqrt{r_1}} - \frac{cosec\, {}^1\!/_2\,(u_2 - u_1)}{\sqrt{r_2}}$$

$\sqrt{q}$ ist stets positiv.

$$v_2 = v_1 + (u_2 - u_1)$$
$$\omega = u_1 - v_1 = u_2 - v_2$$
$$\pi = \omega + \Omega.$$

Mit den Werthen v_1 und v_2 rechnet man ferner die Perihelzeit aus:

$$\frac{k(t_1 - T)}{\sqrt{2}\, q^{3/2}} = tg\, {}^1/_2\, v_1 + {}^1/_3\, tg^3\, {}^1/_2\, v_1$$
$$\frac{k(t_2 - T)}{\sqrt{2}\, q^{3/2}} = tg\, {}^1/_2\, v_2 + {}^1/_3\, tg^3\, {}^1/_2\, v_2.$$

Darstellung des mittleren Ortes:

$$\frac{k(t' - T)}{\sqrt{2}\, q^{3/2}} = tg\, {}^1/_2\, v' + {}^1/_3\, tg^3\, {}^1/_2\, v'$$
$$r' = q\, sec^2\, {}^1/_2\, v'$$
$$u' = v' + \pi - \Omega = v' + \omega$$
$$\varrho \cos \beta' \cos(\lambda' - \Omega) = r' \cos u' + R' \cos(L' - \Omega)$$
$$\varrho' \cos \beta' \sin(\lambda' - \Omega) = r' \sin u' \cos i + R' \sin(L' - \Omega)$$
$$\varrho' \sin \beta' = r' \sin u' \sin i.$$

B. Planetenbahnen.

$$T_1 = t_1 - \alpha \varrho_1$$
$$T' = t' - \alpha \left\{ \varrho_1 + (\varrho_2 - \varrho_1) \frac{t' - t_1}{t_2 - t_1} \right\}$$
$$T_2 = t_2 - \alpha \varrho_2$$
$$\log \alpha = 7{,}7613 - 10$$
$$f = {}^1/_2 (u_2 - u_1)$$
$$\tau = (T_2 - T_1)\, k$$
$$\log k = 8{,}2355814 - 10$$
$$tg\,(45^0 + \omega) = \sqrt[4]{\frac{r_2}{r_1}}$$
$$m = \frac{\tau^2}{(2 \cos f \sqrt{r_1 r_2})^3}$$
$$l = \frac{\sin^2 {}^1/_2 f + tg^2\, 2\omega}{\cos f}$$
$$h = \frac{m}{{}^5/_6 + l + \xi}.$$

ξ mit dem Argumente w aus der Tafel XXXIV.

Für w hat man zu setzen $sin^2 \, {}^1\!/_2 f$;

als erste Näherung

$$w = \frac{m}{\eta^2} - l = sin^2 \, {}^1\!/_2 \, g;$$

η mit dem Argumente h aus der Tafel XXXV.

Mit diesem w geht man noch einmal in die Tafeln ein und wiederholt die Rechnung für h und w. Man hat weiter:

$$\gamma^2 \sin {}^1\!/_2 (F - G) \cos {}^1\!/_2 \varphi = \cos {}^1\!/_2 (f + g) \, tg \, 2\omega$$
$$\gamma^2 \cos {}^1\!/_2 (F - G) \cos {}^1\!/_2 \varphi = \sin {}^1\!/_2 (f + g) \sec 2\omega$$
$$\gamma^2 \sin {}^1\!/_2 (F + G) \sin {}^1\!/_2 \varphi = \cos {}^1\!/_2 (f - g) \, tg \, 2\omega$$
$$\gamma^2 \cos {}^1\!/_2 (F + G) \sin {}^1\!/_2 \varphi = \sin {}^1\!/_2 (f - g) \sec 2\omega.$$

Zur Probe:

$$\gamma^2 = \frac{\sqrt{2 m \cos f}}{\eta}$$

$$v_1 = F - f \qquad E_1 = G - g$$
$$v_2 = F + f \qquad E_2 = G + g$$

$$p = \left(\frac{\eta \, r_1 \, r_2 \sin 2f}{\tau}\right)^2$$

$$e'' = \frac{\sin \varphi}{arc \, 1''}$$

$$a = p \sec^2 \varphi$$

$$\mu = \frac{k''}{a^{3/2}} \qquad \log k'' = 3{,}5500066$$

$$M_1 = E_1 - e'' \sin E_1$$
$$M_2 = E_2 - e'' \sin E_2.$$

Probe:

$$\mu = \frac{M_2 - M_1}{T_2 - T_1}$$

$$\pi = u_1 + \Omega - v_1 = u_2 + \Omega - v_2.$$

Zur Darstellung des mittleren Ortes hat man zu rechnen:

$$M' = M_1 + (T' - T_1)\mu = M_2 - (T_2 - T')\mu$$
$$E' = M' + e'' \sin E'$$
$$r' \sin v' = a \cos \varphi \sin E'$$
$$r' \cos v' = a (\cos E' - \sin \varphi)$$
$$u' = v' + \pi - \Omega$$

$$\varrho' \cos\beta' \cos(\lambda' - \Omega) = r' \cos u' + R' \cos(L' - \Omega)$$
$$\varrho' \cos\beta' \sin(\lambda' - \Omega) = r' \sin u' \cos i + R' \sin(L' - \Omega)$$
$$\varrho' \sin\beta' = r' \sin u' \sin i + R' B' \operatorname{arc} 1''.$$

§. 298.

Verbesserung der Elemente.

I. Man betrachtet α und δ als Function zweier Distanzen ϱ'. Und macht folgende Hypothesen:

I.	II.	III.
ϱ_0	$\varrho_0 + \Delta\varrho_0$	ϱ_0
ϱ_0'	ϱ_0'	$\varrho_0' + \Delta\varrho_0'$,

o folgt:

α_0	α_0'	α_0''
δ_0	δ_0'	δ_0''.

)ann wird:

$$\alpha_0' - \alpha_0 = \frac{\partial\alpha}{\partial\varrho}\Delta\varrho_0$$

$$\delta_0' - \delta_0 = \frac{\partial\delta}{\partial\varrho}\Delta\varrho_0$$

$$\alpha_0'' - \alpha_0 = \frac{\partial\alpha}{\partial\varrho'}\Delta\varrho_0'$$

$$\delta_0'' - \delta_0 = \frac{\partial\delta}{\partial\varrho'}\Delta\varrho_0'$$

lso:

$$\frac{\partial\alpha}{\partial\varrho} = \frac{\alpha_0' - \alpha_0}{\Delta\varrho_0}, \quad \frac{\partial\delta}{\partial\varrho} = \frac{\delta_0' - \delta_0}{\Delta\varrho_0}$$
$$\frac{\partial\alpha}{\partial\varrho'} = \frac{\alpha_0'' - \alpha_0}{\Delta\varrho_0'}, \quad \frac{\partial\delta}{\partial\varrho'} = \frac{\delta_0'' - \delta_0}{\Delta\varrho_0'}.$$

)ie wahren Verbesserungen

$$\Delta\varrho \text{ und } \Delta\varrho'$$

echnet man sodann aus

$$\alpha = \alpha_0 + \frac{\partial\alpha}{\partial\varrho}\Delta\varrho + \frac{\partial\alpha}{\partial\varrho'}\Delta\varrho'$$

$$\delta = \delta_0 + \frac{\partial\delta}{\partial\varrho}\Delta\varrho + \frac{\partial\delta}{\partial\varrho'}\Delta\varrho'$$

ach der Methode der kleinsten Quadrate.

II. Man kann aber auch α und δ als Functionen der Elemente betrachten. Dann ist:

$$(\alpha - \alpha_0)\cos\delta = \frac{\partial\alpha}{\partial L}\Delta L + \frac{\partial\alpha}{\partial\mu}\Delta\mu + \frac{\partial\alpha}{\partial\varphi}\Delta\varphi + \frac{\partial\alpha}{\partial\pi}\Delta\pi + \frac{\partial\alpha}{\partial\Omega}\Delta\Omega + \frac{\partial\alpha}{\partial i}\Delta i$$

$$\delta - \delta_0 = \frac{\partial\delta}{\partial L}\Delta L + \frac{\partial\delta}{\partial\mu}\Delta\mu + \frac{\partial\delta}{\partial\varphi}\Delta\varphi + \frac{\partial\delta}{\partial\pi}\Delta\pi + \frac{\partial\delta}{\partial\Omega}\Delta\Omega + \frac{\partial\delta}{\partial i}\Delta i.$$

Für diese Differentialquotienten hat man nach Oppolzer folgende Schemata:

A. Für Planetenbahnen.

(Sitzungsberichte der Wiener Akademie 61, II. Abth., S. 701.)

Sei

$$\cos(\alpha - \Omega)\cos i = A\sin A_1 \qquad \sin i = m\sin M$$

$$\sin(\alpha - \Omega) = A\cos A_1 \qquad -\sin(\alpha - \Omega)\cos i = m\cos M$$

$$m\sin(M + \delta) = B\sin B_1$$

$$\cos(\alpha - \Omega)\sin\delta = B\cos B_1$$

$$-\frac{a}{r}\,tg\,\varphi\sin v = F\sin F_1 \qquad a^{3/2}\left\{\frac{t\,F\sin F_1}{a^{3/2}} + \frac{2}{3k}\right\} = G\sin G_1$$

$$\frac{a^2}{r^2}\cos\varphi = F\cos F_1 \qquad t\,.\,F\cos F_1 = G\cos G_1$$

$$\frac{2}{3k} = 38{,}7550$$

$$u = v + w$$

$$L = \pi + M$$

$$\frac{a}{r}\cos\varphi\cos v = H\sin H_1$$

$$\sin v\,\frac{2 + e\cos v}{\cos\varphi} = H\cos H_1$$

$$-F\sin F_1 = P\sin P_1$$

$$\frac{a^2}{r^2}\sin\varphi\left\{tg\,{}^1\!/_2\,\varphi - \cos E\left(\frac{r}{a} + 1\right)\right\} = P\cos P_1,$$

so wird:

$$\cos\delta\,\frac{d\alpha}{dL} = \frac{r}{\Delta}\,A\,F\sin(F_1 + A_1 + u_x)$$

$$\frac{d\delta}{dL} = \frac{r}{\Delta}\,B\,F\sin(F_1 + B_1 + u_x)$$

$$\cos\delta \frac{d\alpha}{d\mu} = \frac{r}{\varDelta} A\, G \sin(G_1 + A_1 + u_x)$$

$$\frac{d\delta}{d\mu} = \frac{r}{\varDelta} B\, G \sin(G_1 + B_1 + u_x)$$

$$\cos\delta \frac{d\alpha}{d\varphi} = \frac{r}{\varDelta} A\, H \sin(H_1 + A_1 + u_x)$$

$$\frac{d\delta}{d\varphi} = \frac{r}{\varDelta} B\, H \sin(H_1 + B_1 + u_x)$$

$$\cos\delta \frac{d\alpha}{d\pi} = \frac{r}{\varDelta} A\, P \sin(P_1 + A_1 + u_x)$$

$$\frac{d\delta}{d\pi} = \frac{r}{\varDelta} B\, P \sin(P_1 + B_1 + u_x)$$

$$\frac{\cos\delta}{\sin i} \frac{d\alpha}{d\Omega} = \frac{r}{\varDelta} \cos(\alpha - \Omega + u_x)\, tg\, {}^1\!/_2\, i$$

$$\frac{1}{\sin i} \frac{d\delta}{d\Omega} = -\frac{r}{\varDelta} \{ \sin\delta \sin(\alpha - \Omega + u_x)\, tg\, {}^1\!/_2\, i + \cos u_x \cos\delta \}$$

$$\frac{\cos\delta}{\cos i} \frac{d\alpha}{d i} = -\frac{r}{\varDelta} \sin u_x \cos(\alpha - \Omega)\, tg\, i$$

$$\frac{1}{\cos i} \frac{d\delta}{d i} = \frac{r}{\varDelta} \{ \sin(\alpha - \Omega) \sin\delta\, tg\, i + \cos\delta \} \sin u.$$

B. Bei Bahnen periodischer Kometen von kurzer Umlaufszeit.

Man hat:

$$P \sin P' = \frac{a}{r} \cos\varphi \cos v$$

$$P \cos P' = \frac{\sin v}{\cos\varphi} (2 + e \cos v),$$

dann wird:

$$\cos\delta \frac{\partial\alpha}{\partial\varphi} = \frac{r}{\varDelta} A\, P \sin(P' + A' + u)$$

$$\frac{\partial\delta}{\partial\varphi} = \frac{r}{\varDelta} B\, P \sin(P' + B' + u)$$

$$\cos\delta \frac{\partial\alpha}{\partial\pi} = \frac{r}{\varDelta} A \sin(A' + u)$$

$$\frac{\partial\delta}{\partial\pi} = \frac{r}{\varDelta} B \sin(B' + u).$$

Die übrigen Differentialquotienten bleiben dieselben.

Die Elemente in den vorstehenden Formeln sind die äquatorealen. Will man die Eklipticalelemente einführen, so ist

$$\Delta i = \cos\sigma \, \Delta i' + \sin\sigma \sin i' \, \Delta \Omega'$$

$$\Delta \Omega = -\frac{\sin\sigma}{\sin i} \Delta i' + \frac{\cos\sigma}{\sin i} \sin i' \, \Delta \Omega'$$

$$(\Delta \pi) = -\sin\sigma \, tg\, {}^1/_2 i \, \Delta i' + (\cos\sigma \, tg\, {}^1/_2 i - tg\, {}^1/_2 i') \sin i' \, \Delta \Omega'$$

$$\Delta \pi = \Delta \pi' + (\Delta \pi)$$

$$\Delta L = \Delta L' + (\Delta \pi),$$

wobei

$$\cos\sigma = \frac{\sin\varepsilon \cos\Omega + \cos i' \sin i}{\cos i \sin i'}.$$

C. Bei stark excentrischen Ellipsen- und Parabel-Bahnen.

$$A \sin A' = \cos(\alpha - \Omega) \cos i$$
$$A \cos A' = \sin(\alpha - \Omega)$$
$$m \sin M = \sin i$$
$$m \cos M = -\sin(\alpha - \Omega) \cos i$$
$$B \sin B' = m \sin(M + \delta)$$
$$B \cos B' = \cos(\alpha - \Omega) \sin\delta$$
$$u = v + \omega$$
$$F \sin F' = \frac{k e \sin v}{r \sqrt{p}}$$
$$F \cos F' = -\frac{k \sqrt{p}}{r^2}$$

bei der Parabel wird

$$F' = 180 - {}^1/_2 v$$

$$G \sin G' = -\frac{\sin^2 v}{4(1+e)} \{E_0^r + tg^2\, {}^1/_2 v + E_4^r \, tg^4\, {}^1/_4 v\}$$

$$G \cos G' = \frac{\sin v \cos^2 {}^1/_2 v}{2(1+e)} \{1 + E_2^v \, tg^2\, {}^1/_2 v + E_4^v \, tg^4\, {}^1/_2 v\}.$$

Dabei ist

$$E_2^v = -1 - {}^4/_5 \theta + \theta S$$
$$E_4^v = -{}^4/_5 + S$$
$$E_0^r = 2 + \theta - {}^1/_5 \theta^2 + \sigma \theta^2$$
$$E_4^r = {}^1/_5 - \sigma$$

nd

$$\theta = \frac{1-e}{1+e}\, tg^2 \frac{v}{2}.$$

iese Grössen können mit dem Argumente θ der Tafel XXXIII ntnommen werden:

$$S = 12\left\{\frac{1}{105}\,\theta - \frac{1}{315}\,\theta^2 + \frac{1}{693}\,\theta^3 - \frac{1}{1287}\,\theta^4 + \cdots\right.$$

$$\sigma = 3\left\{\frac{1}{35}\,\theta - \frac{1}{63}\,\theta^2 + \frac{1}{99}\,\theta^3 - \frac{1}{143}\,\theta^4 + \cdots\right.$$

$$H \sin H' = -\frac{1}{\text{mod}}\left\{\frac{q}{r}\cos v - (1-e)\, G \sin G'\right\}$$

$$H \cos H' = -\gamma\,\frac{t-T}{r^2}\sqrt{p},$$

abei ist

$$p = q\,(1+e)$$

$$\log k = 8{,}23558 - 10$$

$$\log(-\gamma) = 8_n 77389 - 10$$

$$\log\left(\frac{1}{\text{mod}}\right) = 0_n 36222$$

$\varDelta T$ wird dadurch in Einheiten des mittleren Sonnentages erhalten.

Man hat sodann:

$$\cos\delta\,\frac{\partial\alpha}{\partial T} = \frac{r}{\varDelta}\,A\,F \sin(A' + F' + u)\sin 1''$$

$$\frac{\partial\delta}{\partial T} = \frac{r}{\varDelta}\,B F \sin(B' + F' + u)\sin 1''$$

$$\cos\delta\,\frac{\partial\alpha}{\partial e} = \frac{r}{\varDelta}\,A\,G \sin(A' + G' + u)\sin 1''$$

$$\frac{\partial\delta}{\partial e} = \frac{r}{\varDelta}\,B\,G \sin(B' + G' + u)\sin 1''$$

$$\cos\delta\,\frac{\partial\alpha}{\partial \log q} = \frac{r}{\varDelta}\,A H \sin(A' + H' + u)\sin 1''$$

$$\frac{\partial\delta}{\partial \log q} = \frac{r}{\varDelta}\,B H \sin(H' + B' + u)\sin 1''$$

$$\cos\delta\,\frac{\partial\alpha}{\partial\pi} = \frac{r}{\varDelta}\,A \sin(A' + u)$$

$$\frac{\partial\delta}{\partial\pi} = \frac{r}{\varDelta}\,B \sin(B' + u)$$

$$\frac{\cos\delta}{\sin i}\frac{\partial\alpha}{\partial\Omega} = \frac{r}{\Delta}\, tg\, i \cos(\alpha - \Omega + u)$$

$$\frac{1}{\sin i}\frac{\partial\delta}{\partial\Omega} = -\frac{r}{\Delta}\{\sin(\alpha - \Omega + u)\sin\delta\, tg\, {}^1\!/_2\, i + \cos u \cos\delta$$

$$\cos\delta\,\frac{\partial\alpha}{\partial i} = -\frac{r}{\Delta}\sin u\cos(\alpha - \Omega)\sin i$$

$$\frac{\partial\delta}{\partial i} = \frac{r}{\Delta}\{\sin(\alpha - \Omega)\sin\delta\sin i + \cos\delta\cos i\}\sin u.$$

Ist i wenig von 180° verschieden (Bewegung retrograd), dann führe man das Element

$$A = \pi - 2\Omega$$

und man hat:

$$\cos\delta\,\frac{\partial\alpha}{\partial A} = \frac{r}{\Delta} A \sin(A' + u)$$

$$\frac{\partial\delta}{\partial A} = \frac{r}{\Delta} B \sin(B' + u)$$

$$\frac{\cos\delta}{\sin i}\frac{\partial\alpha}{\partial\Omega} = \frac{r}{\Delta}\cos(\alpha - \Omega - u)\, ctg\, {}^1\!/_2\, i$$

$$\frac{\partial\delta}{\sin i\,\partial\Omega} = \frac{r}{\Delta}\{\cos u\cos\delta - \sin(\alpha - \Omega - u)\sin\delta\, ctg\, {}^1\!/_2\, i\}.$$

Diese Formeln treten dann an die Stelle der früheren:

$$\cos\delta\,\frac{\partial\alpha}{\partial\pi},\quad \frac{\partial\delta}{\partial\pi},\quad \frac{\cos\delta}{\sin i}\frac{\partial\alpha}{\partial\Omega},\quad \frac{\partial\delta}{\partial i}.$$

§. 299.

Das allgemeine Problem.

Seien

$$m_1 \quad m_2 \ldots \quad m_n$$

die Massen der gegebenen Körper, sowie

$$x_k,\ y_k,\ z_k \qquad k = 1, 2, \ldots n$$

ihre Coordinaten,

$$r_{k\lambda}$$

die Entfernung von $m_k m_\lambda$, und setzt man:

$$Q = {}^1\!/_2 \sum_p \sum_q \frac{m_p m_q}{r_{pq}},$$

so lauten die Bewegungsgleichungen:

$$\left.\begin{aligned} m_k \frac{d^2 x_k}{dt^2} - \frac{\partial Q}{\partial x_k} = 0 \\ m_k \frac{d^2 y_k}{dt^2} - \frac{\partial Q}{\partial y_k} = 0 \\ m_k \frac{d^2 z_k}{dt^2} - \frac{\partial Q}{\partial z_k} = 0 \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \ldots \quad \text{I)}$$

Zu diesen $3n$ Gleichungen sollen $6n$ Integrale mit $6n$ Constanten bestimmt werden. Bisher ist es gelungen, nur zehn von ihnen darzustellen. Und zwar liefert das Princip des Schwerpunktes sechs, das Flächenprincip drei, und das Princip der lebendigen Kraft ein Integral.

Addirt man die Gleichungen I), so ergiebt sich wegen

$$0 = \sum \frac{\partial Q}{\partial x_k}$$

$$\sum m_k \frac{d^2 x_k}{dt^2} = 0 \qquad \sum m_k \frac{d^2 y_k}{dt^2} = 0 \qquad \sum m_k \frac{d^2 z_k}{dt^2} = 0,$$

also wenn

$$\xi \quad \eta \quad \zeta$$

die Coordinaten des Schwerpunktes sind,

$$\frac{d^2 \xi}{dt^2} = 0 \qquad \frac{d^2 \eta}{dt^2} = 0 \qquad \frac{d^2 \zeta}{dt^2} = 0.$$

Diese Gleichungen liefern sechs Integrale:

$$\xi = a_1 + b_1 t, \qquad \eta = a_2 + b_2 t, \qquad \zeta = a_3 + b_3 t.$$

Multiplicirt man die Gleichungen für z mit y und jene für y mit $-z$, und addirt, so folgt wegen

$$\sum \left(z_k \frac{\partial Q_k}{\partial y_k} - y_k \frac{\partial Q_k}{\partial z_k} \right) = 0$$

durch Integration:

$$\sum m_k \left(y_k \frac{d z_k}{dt} - z_k \frac{d y_k}{dt} \right) = c_1$$

$$\sum m_k \left(z_k \frac{d x_k}{dt} - x_k \frac{d z_k}{dt} \right) = c_2$$

$$\sum m_k \left(x_k \frac{d y_k}{dt} - y_k \frac{d x_k}{dt} \right) = c_3.$$

Dieses sind drei weitere Integrale.

Wird die erste Gleichung mit dx_k, die zweite mit dy_k, die dritte mit dz_k multiplicirt und hierauf alle Gleichungen addirt und integrirt, so folgt:

$$\sum m_k \left\{\left(\frac{d x_k}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d y_k}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d z_k}{dt}\right)^2\right\} - 2\,Q = h$$

und dieses ist das letzte Integral.

Den allgemeinen Beweis, dass bei dem Vielkörperproblem der Kreis der algebraisch aus den Coordinaten und Geschwindigkeiten zusammengesetzten und von t freien Integrale mit den obigen geschlossen ist, hat Prof. H. Bruns geliefert (Sitzungsber. der k. sächs. Akademie 1887).

Das Dreikörperproblem erfordert 18 Integrale, davon liefern die obigen Gleichungen zehn, es bleiben also acht zu bestimmen. Lagrange (Prix de l'Acad. Roy. des Sciences de Paris, t. IX, p. 1772) hat bewiesen, dass man nur sieben Integrale zu bestimmen hat, nach deren Auffindung sich das achte sofort ergiebt. Diese Arbeit hat Serret commentirt (Oeuvres de Lagrange, t. VI, p. 324 bis 330).

Die Ausbildung, welche der Theorie der linearen partiellen Differentialgleichungen in der neuesten Zeit durch die Arbeiten von Jacobi, Clebsch, Weiler, Mayer und Sophus Lie zu Theil wurde, ermöglichte einen wesentlichen Fortschritt in der Behandlung des Dreikörperproblems.

Es ist gelungen, das ursprüngliche System achter Ordnung auf ein solches von sechster Ordnung zu reduciren.

Sei

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

$$\cos H = \frac{x}{r}\frac{x_1}{r_1} + \frac{y}{r}\frac{y_1}{r_1} + \frac{z}{r}\frac{z_1}{r_1}$$

$$\Omega = k^2 m_1 \left(\frac{1}{\Delta} - \frac{r}{r_1^2}\cos H\right)$$

$$\Delta^2 = r^2 + r_1^2 - 2\,r\,r_1 \cos H,$$

(die Masse der gestörten Körper $= 0$),

so wird:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + k^2\frac{x}{r^3} = X = \frac{\partial \Omega}{\partial x}$$

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + k^2\frac{y}{r^3} = Y = \frac{\partial \Omega}{\partial y}$$

$$\frac{d^2 z}{dt^2} + k^2\frac{z}{r^3} = Z = \frac{\partial \Omega}{\partial z}.$$

Sei

$$x = r\cos b\cos l$$

$$y = r\sin b\sin l$$

$$z = r\sin b,$$

› folgt:

$$\frac{d^2 r}{dt^2} - r\cos^2 b\left(\frac{dl}{dt}\right)^2 - r\left(\frac{db}{dt}\right)^2 + \frac{k^2}{r^2} = \frac{\partial \Omega}{\partial r}$$

$$\frac{d}{dt}\left(r^2 \cos b\,\frac{dl}{dt}\right) = \frac{\partial \Omega}{\partial l}$$

$$r^2 \cos b \sin b\left(\frac{dl}{dt}\right)^2 + \frac{d}{dt}\left(r^2\frac{db}{dt}\right) = \frac{\partial \Omega}{\partial b},$$

ird weiter gesetzt:

$$\sin b = \sin i \sin(v - \omega)$$

$$\cos b \cos(l - \Omega) = \cos(v - \omega)$$

$$\cos b \sin(l - \Omega) = \cos i \sin(v - \omega)$$

o ergiebt sich:

$$\frac{d^2 r}{dt^2} - r\left(\frac{dv}{dt}\right)^2 + \frac{k^2}{r^2} = \frac{\partial \Omega}{\partial r}$$

$$\frac{d}{dt}\left(r^2\frac{dv}{dt}\right) = \frac{\partial \Omega}{\partial v}$$

$$r^2 \sin i\,\frac{dv}{dt}\cdot\frac{di}{dt} = -\,r\cos i\,\frac{\partial \Omega}{\partial \omega}$$

oder:

$$r^2 \sin i\,\frac{dv}{dt}\cdot\frac{d\Omega}{dt} = r\,\frac{\partial \Omega}{\partial i}.$$

§. 300.

Störungsrechnung in rechtwinkligen Coordinaten.

(Methode von Encke.)

Die gegebenen osculirenden Elemente für die Epoche I und das Aequinoctiom Aequim. seien:

$$L,\ M,\ \pi,\ \Omega,\ i,\ \varphi,\ \mu,\ a.$$

Aus ihnen folgen die Coordinaten:

$$x_0 \quad y_0 \quad z_0.$$

Seien nun:

$$\xi \quad \eta \quad \zeta$$

die Störungen, so wird:

$$x = x_0 + \xi$$

$$y = y_0 + \eta$$

$$z = z_0 + \zeta.$$

Und man hat die Gleichungen:

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} = \sum k^2 m_1 \left\{\frac{x_1 - x}{\rho^3} - \frac{x_1}{r_1^3}\right\} + k^2 (1 + m) \left\{\frac{x_0}{r_0^3} - \frac{x}{r^3}\right\}$$

$$\frac{d^2\eta}{dt^2} = \sum k^2 m_1 \left\{\frac{y_1 - y}{\rho^3} - \frac{y_1}{r_1^3}\right\} + k^2 (1 + m) \left\{\frac{y_0}{r_0^3} - \frac{y}{r_3}\right\}$$

$$\frac{d^2\zeta}{dt^2} = \sum k^2 m_1 \left\{\frac{z_1 - z}{\rho^3} - \frac{z_1}{r_1^3}\right\} + k^2 (1 + m) \left\{\frac{z_0}{r_0^3} - \frac{z}{r^3}\right\}$$

Setzt man:

$$\frac{x_0}{r_0^3} - \frac{x}{r^3} = \frac{1}{r_0^3} \{f q x - \xi\}$$

$$\frac{y_0}{r_0^3} - \frac{y}{r^3} = \frac{1}{r_0^3} \{f q y - \eta\}$$

$$\frac{z_0}{r_0^3} - \frac{z}{r^3} = \frac{1}{r_0^3} \{f q z - \zeta\},$$

wobei

$$q = \frac{x_0 \xi + y_0 \eta + z_0 \zeta}{r_0^2} + \cdots$$

$$f = 3 \left\{1 - \frac{5}{2} q + \frac{5 \cdot 7}{2 \cdot 3} q^2 - \frac{5 \cdot 7 \cdot 9}{2 \cdot 3 \cdot 4} q^3 + \cdots,\right.$$

so wird, wenn $m = 0$ (für Planetoiden und Kometen) gesetzt wird, und wenn zugleich die zweiten Potenzen ausser Acht gelassen werden:

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} + k^2 \sum m_1 \left\{\frac{x_1 - x_0}{\rho^3} - \frac{x_1}{r_1^3}\right\} + \frac{k_2}{r_0^3} \{3 q x - \xi\}$$

$$\frac{d^2\eta}{dt^2} + k^2 \sum m_1 \left\{\frac{y_1 - y_0}{\rho^3} - \frac{y_1}{r_1^3}\right\} + \frac{k^2}{r_0^3} \{3 q y - \eta\}$$

$$\frac{d^2\zeta}{dt^2} + k^2 \sum m_1 \left\{\frac{z_1 - z_0}{\rho^3} - \frac{z_1}{r_1^3}\right\} + \frac{k_2}{r_0^3} \{3 q z - \zeta\},$$

wobei

$$\rho^2 = (x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2 + (z_1 - z_0)^2$$

und x, y, z die Coordinaten der störenden Planeten sind.

Setzt man weiter noch:

$$\frac{k^2}{r^3} = h$$

$$\Sigma k^2 m_1 \left\{\frac{x_1 - x}{\rho^3} - \frac{x_1}{r^3}\right\} = \Sigma X$$

$$\Sigma k^2 m_1 \left\{\frac{y_1 - y}{\rho^3} - \frac{y_1}{r^3}\right\} = \Sigma Y$$

$$\Sigma k_2 m_1 \left\{\frac{z_1 - z}{\rho^3} - \frac{z_1}{r^3}\right\} = \Sigma Z,$$

so wird:

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} + h\xi = \Sigma X + fhqx$$

$$\frac{d^2\eta}{dt^2} + h\eta = \Sigma Y + fhqy$$

$$\frac{d^2\zeta}{dt^2} + h\zeta = \Sigma Z + fhqz.$$

Man hat also zu rechnen:

I.

$$e = \sin\varphi \qquad \frac{\sin\varphi}{\sin 1''} = e''$$

$$M = M_0 + \mu t$$

$$M = E - e'' \sin E$$

$$r_0 \sin v_0 = a \cos\varphi \sin E$$

$$r_0 \cos v_0 = a (\cos E - e)$$

$$x_0 = r_0 \sin a \sin (A + v_0)$$

$$y_0 = r_0 \sin b \sin (B + v_0)$$

$$z_0 = r_0 \sin c \sin (C + v_0).$$

Ueber die Berechnung der Constanten:

$$\sin a, \quad \sin b, \quad \sin c$$

$$A, \quad B, \quad C,$$

vergleiche §. 272.

Sodann:

$$h = \frac{[9{,}675283]}{r_0^3}$$

$$R^2 = r_0^2 (1 + {}^1\!/_{12} h)$$

$$h' = \frac{h}{1 + {}^1\!/_{12} h},$$

dabei ist die Zahl in der Klammer ein Logarithmus. Es wird übrigens, wie üblich, ein vierzigtägiges Intervall vorausgesetzt.

Nun setze man:

$$x = x_0 + \xi$$

$$y = y_0 + \eta$$

$$z = z_0 + \zeta,$$

wobei ξ, η, ζ die Störungen sind. Diese setzt man für die ersten vier Intervalle gleich 0, da man ja von einer osculirenden Bahn ausgeht.

Nun rechne man für jeden störenden Planeten:

$$\varrho \cos\vartheta \cos\theta = x_1 - x$$
$$\varrho \cos\vartheta \sin\theta = y_1 - y$$
$$\varrho \sin\vartheta \qquad = z_1 - z$$

$$X_1 = \nu \frac{x_1 - x}{\varrho^3}$$

$$Y_1 = \nu \frac{y_1 - y}{\varrho^3}$$

$$Z_1 = \nu \frac{z_1 - z}{\varrho^3},$$

x_1, y_1, z_1 sind die Coordinaten störender Planeten. Die Grösse
ist vierzigtägiges Intervall, vorausgesetzt für

Mercur	9,7924 — 10
Venus	1,0712
Erde mit Mond	1,1244
Mars	0,2471
Jupiter	3,654972
Saturn	3,13102
Uranus	2,3329
Neptun	2,3808

in *log* der 7. Decimalstelle.

Ferner:

$$X_2 = -\nu \frac{x_1}{r_1^3}$$

$$Y_2 = -\nu \frac{y_1}{r_1^3}$$

$$Z_2 = -\nu \frac{z_1}{r_1^3}$$

und bilde

$$X = X_1 + X_2$$
$$Y = Y_1 + Y_2$$
$$Z = Z_1 + Z_2.$$

Diese Grössen für jeden der störenden Planeten besonders gerechnet, und dann summirt, geben:

$$\Sigma X \quad \Sigma Y \quad \Sigma Z.$$

Anfang der Rechnung: $\xi = 0$, $\eta = 0$, $\zeta = 0$, für die ersten vier Intervalle. Man setze:

$$\Sigma X = f_k \qquad k = 1, 2, 3, 4,$$

wobei $\Sigma X = f_1$ die Summe ΣX für den ersten Intervall bezeichnet u. s. w.

$$f_1 = f(a - 2w)$$
$$f_2 = f(a - w)$$
$$f_3 = f(a)$$
$$f_4 = f(a + w).$$

Ferner:

$$\underline{'f(a - 1\tfrac{1}{2} w)} = -\frac{1}{24} f'(a - \tfrac{1}{2} w) + \left\{\frac{17}{5760} f'''(a - \tfrac{1}{2} w)\right\}$$

$$\underline{''f(a - w)} \quad = +\frac{1}{24} f(a) - \left\{\frac{17}{5760} [2 f''(a) + f''(a - w)]\right\},$$

und bilde das Schema (siehe Quadraturen):

$$\begin{array}{lllll}
''f(a - 2w) & & f(a - 2w) & & \\
 & 'f(a - \tfrac{3}{2} w) & & f'(a - \tfrac{3}{2} w) & \\
\underline{''f(a - w)} & & f(a - w) & & f''(a - w) \\
 & \underline{'f(a - \tfrac{1}{2} w)} & & f'(a - \tfrac{1}{2} w) & \\
''f(a) & & f(a) & & f''(a) \\
 & 'f(a + \tfrac{1}{2} w) & & f'(a + \tfrac{1}{2} w) & \\
''f(a + w) & & f(a + w) & &
\end{array}$$

Dieselben Reihen werden auch für ΣX und ΣZ entwickelt. Sodann ist für

$$S_{(x)} = ''f_{(x)}(a + iw) + \frac{1}{12} \Sigma X_i - \frac{1}{240} f''_{(x)}(a + iw)$$

$$S_{(y)} = ''f_{(y)}(a + iw) + \frac{1}{12} \Sigma Y_i - \frac{1}{240} f''_{(y)}(a + iw)$$

$$S_{(z)} = ''f_{(z)}(a + iw) + \frac{1}{12} \Sigma Z_i - \frac{1}{420} f''_{(z)}(a + iw)$$

Nun rechnet man:

$$a = \frac{x_0}{R^2}$$

$$b = \frac{y_0}{R^2}$$

$$c = \frac{z_0}{R^2}$$

$$q = \frac{a S_{(x)} + b S_{(y)} + c S_{(z)}}{1 - \frac{h}{12} f(ax + by + cz)},$$

wobei

$$f = \frac{1 - (1 + 2q)^{-3/2}}{q}.$$

Für f hat Oppolzer im zweiten Bande seines Lehrbuches der Bahnbestimmung eine Tafel gerechnet.

Als Argument zur Ermittelung des ersten f-Werthes kann hinreichend genau

$$q = a S_{(x)} + b S_{(y)} + c S_{(z)}$$

genommen werden.

Dann wird:

$$\frac{d^2 \xi}{dt^2} = \Sigma X + h' \{f q x - S_{(x)}\}$$

$$\frac{d^2 \eta}{dt^2} = \Sigma Y + h' \{f q y - S_{(y)}\}$$

$$\frac{d_2 \zeta}{dt^2} = \Sigma Z + h' \{f q z - S_{(z)}\}.$$

Nun bildet man für $\frac{d^2 \xi}{dt^2}$ dasselbe Schema wie früher für ΣX und bestimmt die Anfangsconstanten der Integration genau wie früher, sodann wird:

$$\xi = {}''f_{(x)}(a + iw) + \frac{1}{12} f_{(x)}(a + iw)$$

$$\eta = {}''f_{(y)}(a + iw) + \frac{1}{12} f_{(y)}(a + iw)$$

$$\zeta = {}''f_{(z)}(a + iw) + \frac{1}{12} f_{(z)}(a + iw).$$

Man erhält so vier Werthe für ξ, η, ζ. Durch Extrainterpolation werden nun die Werthe ξ, η, ζ für den nächsten Intervall bestimmt. Für diesen wird nun

$$x = x_0 + \xi$$
$$y = y_0 + y$$
$$z = z_0 + \zeta$$

gesetzt, und es wird

$$\Sigma X \quad \Sigma Y \quad \Sigma Z$$

berechnet. Man hat dann:

$$S_{(x)} = {}''f_{(x)}(a + iw) + \frac{1}{12} \Sigma X - \frac{1}{240} f''_{(x)}(a + iw)$$

$$S_{(y)} = {}''f_{(y)}(a + iw) + \frac{1}{12} \Sigma Y - \frac{1}{240} f''_{(y)}(a + iw)$$

$$S_{(z)} = {}''f_{(z)}(a + iw) + \frac{1}{12} \Sigma Z - \frac{1}{240} f''_{(z)}(a + iw)$$

$$a = \frac{x_0 + {}^1/_2 \xi}{R^2}$$

$$b = \frac{y_0 + {}^1/_2 \eta}{R^2}$$

$$c = \frac{z_0 + {}^1/_2 \zeta}{R^2}$$

$$q = \frac{a S_{(x)} + b S_{(y)} + c S_{(z)}}{1 - \frac{h}{12} f \{ax + by + cz\}}$$

und anolog wie oben:

$$\frac{d^2 \xi}{dt^2} \quad \frac{d^2 \eta}{dt^2} \quad \frac{d^2 \zeta}{dt^2}.$$

In dieser Weise wird die Rechnung fortgesetzt.

Die Werthe von ξ, η, ζ ergeben sich dann aus $\frac{d^2 \xi}{dt^2}, \frac{d^2 \eta}{dt^2}, \frac{d^2 \zeta}{dt^2}$.

$$\xi = {}''f_{(x)}(a + iw) + \frac{1}{12} f_{(x)}(a + iw) - \frac{1}{240} f''_{(x)}(a + iw)$$

$$\eta = {}''f_{(y)}(a + iw) + \frac{1}{12} f_{(y)}(a + iw) - \frac{1}{240} f''_{(y)}(a + iw)$$

$$\zeta = {}''f_{(z)}(a + iw) + \frac{1}{12} f_{(z)}(a + iw) - \frac{1}{240} f''_{(z)}(a + iw).$$

Das letzte Glied

$$-\frac{1}{240} f''$$

kann zumeist vernachlässigt werden.

§. 301.

Brünnow'sche Uebertragung der Encke'schen Methode auf Polarcoordinaten.

(Astron. Nachr. Bd. 34.)

Seien die gegebenen Gleichungen:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\mu}{r} + \Omega\right)$$

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\mu}{r} + \Omega\right)$$

$$\frac{d^2 z}{dt^2} = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\mu}{r} + \Omega\right).$$

Setzt man

$$x = r \cos\beta \cos u$$

$$y = r \cos\beta \sin u$$

$$z = r \sin\beta$$

und schreibt die Gleichungen in Lagrange'scher Form:

$$\frac{d}{dt}\cdot\frac{\partial T}{\partial d\varphi}-\frac{\partial T}{\partial \varphi}+\frac{\partial V}{\partial \varphi}=0$$
$$\frac{d}{dt}\cdot\frac{\partial T}{\partial d\psi}-\frac{\partial T}{\partial \psi}+\frac{\partial V}{\partial \psi}=0$$
$$\frac{d}{dt}\cdot\frac{\partial T}{\partial d\chi}-\frac{\partial T}{\partial \chi}+\frac{\partial V}{\partial \chi}=0,$$

wobei

$$\varphi = r$$
$$\psi = \beta$$
$$\chi = u$$
$$T = {}^1/_2\, r^2 \left\{cos^2\beta\left(\frac{du}{dt}\right)^2+\left(\frac{d\beta}{dt}\right)^2\right\}+\left(\frac{dr}{dt}\right)^2$$
$$V = -\frac{\mu}{r}-\Omega$$

gesetzt wurde, so lassen sich leicht die Variablen transformiren und man erhält:

$$\frac{d^2r}{dt^2}-r\frac{d^2\beta}{dt^2}-r\,cos^2\beta\left(\frac{du}{dt}\right)^2+\frac{\mu}{r^2}=\frac{\partial\Omega}{\partial r}$$
$$\frac{d}{dt}\left\{r^2\,cos^2\beta\,\frac{du}{dt}\right\}=\frac{\partial\Omega}{\partial v}$$
$$\frac{d^2z}{dt^2}=\frac{\partial\Omega}{\partial z}-\mu\frac{z}{r^3}.$$

Setzt man nun

$$r = r_0+\delta r$$
$$u = u_0+\delta u,$$

und verlegt die Coordinatenebene in die Bahnebene, so wird:

$$\frac{d^2}{dt^2}\delta r=\frac{\partial\Omega}{\partial r}+\frac{2\sqrt{\mu p_0}}{r_0^3}\int\frac{\partial\Omega}{\partial u}dt-\frac{2\mu}{r_0^4}\{{}^3/_2 p_0-r_0\}\,\delta r$$
$$\frac{d}{dt}\delta u=\frac{1}{r_0^2}\int\frac{\partial\Omega}{\partial u}dt-\frac{2\sqrt{\mu p_0}}{r_0^3}\delta r$$
$$\frac{d^2z}{dt^2}=\frac{\partial\Omega}{\partial z}-\mu\frac{z}{r_0^3},$$

dabei ist für die Osculationsepoche:

$$\beta = 0$$
$$\int\frac{\partial\Omega}{\partial u}dt=0$$
$$r_0^2\frac{du_0}{dt}=\sqrt{\mu p_0}$$

und

$$\frac{\partial \Omega}{\partial z} = \Sigma m_1 k^2 \left\{ -\frac{1}{\Delta^2} \frac{\partial \Delta}{\partial z} - \frac{z_1}{r_1^3} \right\}$$

$$= \Sigma m_1 k^2 \left\{ r_1 \sin \beta_1 \left(\frac{1}{\Delta^3} - \frac{1}{r_1^3} \right) - \frac{r \sin \beta}{\Delta^3} \right\}$$

$$\frac{\partial \Omega}{\partial r} = \Sigma m_1 k^2 \left\{ -\frac{r}{\Delta^3} + r_1 \left[\cos \beta \cos \beta_1 \cos (u_1 - u) \right. \right.$$

$$\left. \left. + \sin \beta \sin \beta_1 \right] \left(\frac{1}{\Delta^3} - \frac{1}{r_1^3} \right) \right\}$$

$$\frac{\partial \Omega}{\partial u} = \Sigma m_1 k^2 r r_1 \cos \beta \cos \beta_1 \sin (u_1 - u) \left(\frac{1}{\Delta_3} - \frac{1}{r_1^3} \right)$$

z_1, r_1, β_1 sind die Coordinaten des störenden Planeten.

§. 302.

Variation der Constanten.

Für die ungelöste Bewegung finden sich:

$$\frac{d p_0}{d t} - \frac{\partial T_0}{\partial q_0} - \frac{\partial V_0}{\partial q_0} = 0 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 1)$$

Im gelösten Problem treten noch neue Kräfte hinzu, aus

$$V_0 \text{ wird } V + \Omega,$$

wo Ω wie gewöhnlich die Störungsfunction bezeichnet. Die Gleichungen des gelösten Problems sind sodann:

$$\frac{d p}{d t} - \frac{\partial T}{\partial q} - \frac{\partial V}{\partial q} = \frac{\partial \Omega}{\partial q} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 2)$$

Denkt man sich die Gleichungen 1) integrirt, und seien

$$q_0 = f_0 (t, a, b, c \ldots) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 3)$$

ihre Integrale, wo $a, b, c \ldots$ Integrationsconstanten sind, so wird

$$\frac{d q_0}{d t} = \frac{\partial f_0}{\partial t} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 4)$$

Obgleich nun die Gleichungen 2) nicht dieselbe Form haben, wie die Gleichungen 1), so kann man ihnen doch durch die Integrale 3) Genüge leisten, wenn man nur annimmt, dass die Constanten $a, b, c \ldots$ ebenfalls variabel sind. Sodann wird aber:

$$\frac{d q}{d t} = \frac{\partial f_0}{\partial t} + \left\{ \frac{\partial f_0}{\partial a} \frac{d a}{d t} + \frac{\partial f_0}{\partial b} \frac{d b}{d t} + \cdots \right\} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 5)$$

Führt man nun die Bedingungsgleichungen

$$\frac{\partial f_0}{\partial a}\frac{da}{dt}+\frac{\partial f_0}{\partial b}\frac{db}{dt}+\frac{\partial f_0}{\partial c}\frac{dc}{dt}+\cdots=0\;.\;.\;.\;.\;.\;\quad 6)$$

ein, so wird

$$\frac{dq_0}{dt}=\frac{dq}{dt}.$$

Sodann müssen auch p für beide Systeme gleich sein. und aus

$$\frac{dp}{dt}=\frac{\partial p}{\partial t}+\frac{\partial p}{\partial a}\cdot\frac{da}{dt}+\frac{\partial p}{\partial b}\cdot\frac{db}{dt}+\frac{\partial p}{\partial c}\cdot\frac{dc}{dt}+\cdots$$

folgt

$$\frac{\partial p}{\partial a}\cdot\frac{da}{dt}+\frac{\partial p}{\partial b}\cdot\frac{db}{dt}+\cdots=\frac{dp}{dt}-\frac{\partial p}{\partial t}$$

$$=\frac{\partial \Omega}{\partial q}+\frac{\partial T}{\partial q}+\frac{\partial V}{\partial q}-\left\{\frac{\partial T}{\partial q}+\frac{\partial V}{\partial q}\right\}$$

oder

$$\frac{\partial p}{\partial a}\cdot\frac{da}{dt}+\frac{\partial p}{\partial b}\cdot\frac{db}{dt}+\frac{\partial p}{\partial c}\cdot\frac{dc}{dt}+\cdots=\frac{\partial \Omega}{\partial q}\;.\;.\;.\quad 7)$$

Wir haben also $a, b, c \ldots$ als Functionen von t so zu wählen, dass sie den beiden Gleichungssystemen 6) und 7) genügen.

Eliminirt man aus 6) und 7) nach einander die Grössen

$$\frac{da}{dt},\quad \frac{db}{dt},\quad \frac{dc}{dt}\cdots$$

und setzt:

$$\frac{\partial q}{\partial a}\frac{\partial p}{\partial b}-\frac{\partial q}{\partial b}\frac{\partial p}{\partial a}=(ab),$$

so dass also:

$$(aa)=0$$
$$(ab)+(ba)=0$$

wird, so erfolgt:

$$\left.\begin{array}{l}(aa)\dfrac{da}{dt}+(ab)\dfrac{db}{dt}+(ac)\dfrac{dc}{dt}+\cdots=\dfrac{\partial \Omega}{\partial a}\\[2ex](ba)\dfrac{da}{dt}+(bb)\dfrac{db}{dt}+(bc)\dfrac{dc}{dt}+\cdots=\dfrac{\partial \Omega}{\partial b}\end{array}\right\}\;.\;.\;.\quad 8)$$

. . . .

Dieses System vertritt die Gleichungen 6) und 7).

Hieraus ergiebt sich:

$$\left.\begin{aligned}\frac{da}{dt} &= A\frac{\partial\Omega}{\partial a} + B\frac{\partial\Omega}{\partial b} + C\frac{\partial\Omega}{\partial c} + \cdots \\ \frac{db}{dt} &= A'\frac{\partial\Omega}{\partial a} + B'\frac{\partial\Omega}{\partial b} + C'\frac{\partial\Omega}{\partial c} + \cdots \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\end{aligned}\right\} \quad 9)$$

Die Coëfficienten der Gleichungen 8) und in Folge dessen auch jene der Gleichungen 9) besitzen eine merkwürdige Eigenschaft, sie sind in Bezug auf t constant.

Es ist aber die Grösse Ω eine Grösse erster Ordnung, demnach sind auch

$$\frac{da}{dt}, \quad \frac{db}{dt}, \quad \frac{dc}{dt} \cdots$$

solche. Man kann demnach bei einer ersten Annäherung rechter Hand

$$a = a_0, \quad b = b_0, \quad c = c_0 \ldots$$
$$x = x_0, \quad y = y_0. \quad z = z_0 \ldots$$

setzen, wodurch man einen Fehler begeht, der von der zweiten Ordnung ist. Sodann wird:

$$a = \int_{t_0}^{t} \left\{ A\frac{\partial\Omega}{\partial a} + B\frac{\partial\Omega}{\partial b} + \cdots \right\} dt \quad \ldots \quad 10)$$

wobei unter dem Integralzeichen nur bekannte Functionen vorkommen.

Für die praktische Anwendung dieser Methode möge Folgendes angeführt sein: Man erhält nach geeigneten Transformationen folgende Differentialgleichungen der Elemente nach der Zeit:

$$\frac{di}{dt} = \frac{W}{k\sqrt{1+m}\,\sqrt{p}}\, r\cos u$$

$$\frac{d\Omega}{dt} = \frac{W}{k\sqrt{1+m}\,\sqrt{p}}\, \frac{r\sin u}{\sin i}$$

$$\frac{dw}{dt} = \frac{c}{k^2(1+m)}\,\frac{1}{e}\,\{2aT\sin w + rN\cos w\} - \cos i\,\frac{d\Omega}{dt}$$

$$\frac{de}{dt} = \frac{c}{k^2(1+m)}\,\{2aT(\cos w - e) - rN\sin w\}$$

$$\frac{da}{dt} = \frac{ac}{k^2(1+m)}\, 2aT$$

$$\frac{d\mu}{dt} = -\frac{3ac}{k^2(1+m)}\,\mu T$$

$$\frac{dM}{dt} = -\sqrt{1-e^2}\left\{\frac{dw}{dt} + \cos i\,\frac{d\Omega}{dt}\right\} - 2\left\{e \sin E \cdot \frac{T}{c}\right.$$

$$\left. - \sqrt{1-e^2}\,\frac{N}{c}\right\} + \int \frac{d\mu}{dt} \cdot dt.$$

Dabei ist:

$$c = k\sqrt{\frac{1+m}{r}}$$

$$u = v + w$$

$$\sin w = \frac{\sin E \,.\, \sqrt{1-e^2}}{1 + e \cos E}$$

$$\cos w = \frac{\cos E + e}{1 + e \cos E}.$$

Zur Berechnung der Grössen $T N W$ merke man:

T ist die Componente der störenden Kraft nach der Richtung der Tangente, positiv, wenn sie die Geschwindigkeit vermehrt;

N ist die Componente der störenden Kraft in der Normale, positiv, wenn sie den Planeten nach der inneren Fläche der Ellipse sich bewegen lässt;

W ist die Componente normal zur Bahnebene, positiv in der Richtung nach dem Nordpol der Ekliptik;

R ist die Componente der Störungsfunction in der Richtung des Radiusvectors;

S ist die Componente der Störungsfunction senkrecht auf den Radiusvector.

Um diese Componenten zu berechnen, rechne man die Grössen:

$$A \quad A' \quad T$$

aus

$$\sin {}^1\!/_2 I \sin {}^1\!/_2 (A + A') = \sin {}^1\!/_2 (\Omega_1 - \Omega) \sin {}^1\!/_2 (i + i_1)$$
$$\sin {}^1\!/_2 I \cos {}^1\!/_2 (A + A') = \cos {}^1\!/_2 (\Omega_1 - \Omega) \sin {}^1\!/_2 (i_1 - i)$$
$$\cos {}^1\!/_2 I \sin {}^1\!/_2 (A - A') = \sin {}^1\!/_2 (\Omega_1 - \Omega) \cos {}^1\!/_2 (i_1 + i)$$
$$\cos {}^1\!/_2 I \cos {}^1\!/_2 (A - A') = \cos {}^1\!/_2 (\Omega_1 - \Omega) \cos {}^1\!/_2 (i_1 - i).$$

sodann λ_1 und β_1 aus

$$\cos \beta_1 \cos \lambda_1 = \cos (w_1 + v_1 - A')$$
$$\cos \beta_1 \sin \lambda_1 = \sin (w_1 + v_1 - A') \cos I$$
$$\sin \beta_1 = \sin (w_1 + v_1 - A') \sin I,$$

so wird

$$x_1 = r_1 \cos\beta_1 \cos\{\lambda_1 - (w + v) + A\}$$
$$y_1 = r_1 \cos\beta_1 \sin\{\lambda_1 - (w + v) + A\}$$
$$z_1 = r_1 \sin\beta_1$$

und

$$\cos\gamma_1 = \frac{x_1}{r_1}$$
$$\varrho^2 = (r - x_1)^2 + r_1^2 \sin\gamma_1^2.$$

Damit wird:

$$R = m_1 k^2 \left(\frac{1}{\varrho^3} - \frac{1}{r_1^3}\right) x_1 - \frac{r}{\varrho^3}$$
$$S = m_1 k^2 \left(\frac{1}{\varrho^3} - \frac{1}{r_1^3}\right) \gamma_1$$
$$W = m_1 k^2 \left(\frac{1}{\varrho^3} - \frac{1}{r_1^3}\right) z_1$$
$$c\,T = \frac{k\sqrt{1+m}}{\sqrt{p}}\, e \sin v \,.\, R + \frac{p}{r} \cdot S\Big\}$$
$$c\,N = \frac{k\sqrt{1+m}}{\sqrt{p}} \left\{-\frac{p}{r} \cdot R + e \sin v \,.\, S\right\}.$$

Wir geben nachstehend das Oppolzer'sche Schema zur Berechnung der Elementenstörungen:

$$a^{3/2} = \frac{k''}{\mu} \qquad \log k'' = 3{,}550007$$
$$e'' = \frac{\sin\varphi}{\sin 1''} \qquad \log\frac{1}{\sin 1''} = 5{,}314425$$
$$M = L - \pi$$
$$E - e'' \sin E = M$$
$$r \sin v = a \cos\varphi \sin E$$
$$r \cos v = a(\cos E - \sin\varphi)$$
$$w = \pi - \Omega$$
$$u = v + w$$
$$p = a \cos^2\varphi$$
$$(i : W) = r \cos u$$
$$(\Omega : W) = \frac{r \sin u}{\sin i}$$
$$(\mu : R) = -\frac{3kw}{\sqrt{a}} \sin\varphi \sin v$$
$$(\mu : S) = -\frac{3kw}{\sqrt{a}} \frac{p}{r}$$

w das Intervall in Tagen. Für $w = 40$ wird $\log 3\,k\,w = 0{,}314763$.

$$(L:R) = -\,p\,tg\,{}^1/_2\,\varphi\,\cos v - 2\,r\cos\varphi$$
$$(L:S) = (p+r)\sin v\,tg\,{}^1/_2\,\varphi$$
$$(L:W) = r\sin u\,tg\,{}^1/_2\,i$$
$$(\pi:R) = -\frac{p}{\sin\varphi}\cos v$$
$$(\pi:S) = (p+r)\frac{\sin v}{\sin\varphi}$$
$$(\varphi:R) = a\cos\varphi\sin v$$
$$(\varphi:S) = a\cos\varphi(\cos v + \cos E).$$

Nun rechnet man die störenden Kräfte: Seien $r_1\,b_1\,l_1$ die heliocentrischen Coordinaten des störenden Planeten, bezogen auf das Aequinoctium der Elemente:

$$q\sin Q = \sin b_1$$
$$q\cos Q = \cos b_1 \sin(l_1 - \Omega)$$
$$\cos B\cos L = \cos b_1\cos(l_1 - \Omega)$$
$$\cos B\sin L = q\cos(Q - i)$$
$$\sin B = q\sin(Q - i)$$
$$\xi = r_1\cos B\cos(L - u)$$
$$\eta = r_1\cos B\sin(L - u)$$
$$\zeta = r_1\sin B$$
$$\varrho\cos\vartheta\cos\theta = \xi - r_1$$
$$\varrho\cos\vartheta\sin\theta = \eta$$
$$\varrho\sin\vartheta = \zeta$$
$$K = \frac{1}{\varrho^3} - \frac{1}{r^3}$$
$$R = \frac{w\,k''\,m_1}{\sqrt{p}}\left\{K\xi - \frac{r}{\varrho^3}\right\}$$
$$S = \frac{w\,k''\,m_1}{\sqrt{p}}\cdot K\eta$$
$$W = \frac{w\,k''\,m_1}{\sqrt{p}}\cdot K\zeta,$$

m_1 ist die Masse des störenden Planeten in Einheiten der Sonnenmasse. Dann hat man:

$$\varDelta i = (i:W)\,.\,W$$
$$\varDelta\Omega = (\Omega:W)\,.\,W$$

$$w\,\varDelta\mu = (\mu : R)\,.\,R + (\mu : S)\,.\,S$$
$$\varDelta L = (L : R)\,.\,R + (L : S)\,.\,S + (L : W)\,.\,W$$
$$\varDelta\pi = (\pi : R)\,.\,R + (\pi : S)\,.\,S + (L : W)\,.\,W$$
$$\varDelta\varphi = (\varphi : R)\,.\,R + (\varphi : S)\,.\,S.$$

Man beachte, dass diese Methode in nahezu parabolischen Bahnen nicht für den Gebrauch geeignet ist.

Der Gang der Rechnung ist nun folgender: Mit den ungestörten Elementen bestimmt man sich für vier Zeitintervalle die Grössen

$$w\frac{di}{dt} \quad w\frac{d\Omega}{dt} \quad w\frac{dL}{dt} \quad w\frac{d\pi}{dt} \quad w\frac{d\varphi}{dt} \quad w^2\frac{d\mu}{dt}.$$

Für jedes Element bildet man sich nun die Reihen

$$\begin{array}{cccc}
 & f(a-2w) & & \\
{}'f(a-{}^3\!/_2 w) & & f'(a-{}^3\!/_2 w) & \\
 & f(a-w) & & f''(a-w) \\
\underline{{}'f(a-{}^1\!/_2 w)} & & f'(a-{}^1\!/_2 w) & \\
 & f(a) & & f''(a) \\
{}'f(a+{}^1\!/_2 w) & & f'(a+{}^1\!/_2 w) & \\
 & f(a+w) & &
\end{array}$$

und bestimmt die Integrationsconstante aus der Gleichung

$${}'f(a-{}^1\!/_2 w) = -\frac{1}{24}f'(a-{}^1\!/_2 w) + \frac{17}{5760}f''(a-{}^1\!/_2 w),$$

worauf man das Integral selbst durch

$$\int^{a+iw} f(x)\,dx = {}'f(a+iw) - \frac{1}{12}f'(a+iw)$$

erhält. Durch Extrapolation gewinnt man dann genäherte Werthe der Elementencorrection für das nächste Intervall. In dieser Weise wird die Rechnung fortgesetzt. Da

$$L = L_0 + \mu_0 t + \int \frac{dL}{dt}\cdot dt + \int\!\!\int \left(\frac{d\mu}{dt}\right) dt^2$$

ist, so wird man also hier eine Doppelintegration auszuführen haben. Für diese ist die Anfangsconstante

$$''f(a) = \frac{1}{24}f(a-w) - \frac{17}{5760}\{2f''(a-w) + f''(a)\}$$

und das Integral

$$\int\!\!\int^{a+iw} f(x)\,dx^2 = {}''f(a+iw) + \frac{1}{12}f(a+iw).$$

Nachdem so die Anfangswerthe bestimmt sind, wird man aus bekannten Summen und Differenzwerthen leicht die für die nächsten Intervalle geltenden Störungsgrössen ermitteln.

Man hat für die Rechnung nach vorwärts

$$\int^{a+(i+1)w} f(x)\,dx = {}'f[a+(i+{}^1\!/_2)w] + {}^1\!/_2 f(a+iw)$$
$$+ {}^1\!/_{24}\,\{10 f'[a+(i-{}^1\!/_2)w] + 9 f''[a+(i-1)\ldots$$
$$+ 8 f'''[a+(i-{}^3\!/_2)w] + 7 f^{IV}[a+(i-2)w] + \cdot$$

für die Rechnung nach rückwärts

$$\int^{a+(i-1)w} f(x)\,dx = {}'f[a+(i-{}^1\!/_2)w] - {}^1\!/_2 f(a+iw)$$
$$+ {}^1\!/_{24}\,\{10 f'[a+(i+{}^1\!/_2 w)] - 9 f''[a+(i+1)\ldots$$
$$+ 8 f'''[a+(i+{}^3\!/_2 w)] - 7 f^{IV}[a+(i+2)w] + \cdot$$

Für das Doppelintegral hat man zunächst zu ermitteln, b der Rechnung nach vorwärts,

$$''f[a+(i+1)w] = f(a+iw) + f'[a+(i-{}^1\!/_2)w]$$
$$+ f''[a+(i-1)w] + f'''[a+(i-{}^3\!/_2 w)] + \cdots$$

bei der Rechnung nach rückwärts,

$$''f[a+(i-1)w] = f(a+iw) - f'[a+(i+{}^1\!/_2)w]$$
$$+ f''[a+(i+1)w] - f'''[a+(i+{}^3\!/_2)w] + \cdots$$

worauf

$$\int\int^{a+(i\pm1)w} f(x)\,dx^2 = {}''f[a+(i\pm1)w] + \frac{1}{12} f[a+(i\pm1)w]$$

§. 303.

Hansen-Tietjen'sche Integrationsmethode der Störungsgleichungen.

Setzt man

$$x = r\cos b\cos l$$
$$y = r\cos b\sin l$$
$$z = r\sin b$$
$$x_1 = r_1\cos B_1\cos L_1$$
$$y_1 = r_1\cos B_1\sin L_1$$
$$z_1 = r_1\sin B_1,$$

so gehen die Störungsgleichungen über in

$$(r\cos b)^2\frac{dl}{dt} = k\sqrt{p_0} + \int \Sigma u\,dt$$

$$\frac{d^2(r\cos b)}{dt^2} - r\cos b\left(\frac{dl}{dt}\right)^2 + \frac{k^2\cos b}{r^3} = r\cos b\,(\Sigma R - \Sigma w_1)$$

$$\frac{d^2 z}{dt^2} + z\left\{\frac{k^2}{r^3} + \Sigma w_1\right\} = \Sigma W_1.$$

Dabei ist

$$\begin{aligned}
&\Sigma k^2 m_1\left(\frac{1}{\varrho^3} - \frac{1}{r_1^3}\right) r r_1 \cos b \cos B_1 \sin(L_1 - l) &&= \Sigma U\\
&\Sigma k^2 m_1\left(\frac{1}{\varrho^3} - \frac{1}{r_1^3}\right) \frac{r_1\cos B_1}{r\cos b}\cos(L_1 - l) &&= \Sigma R\\
&\Sigma k^2 m_1 \frac{1}{\varrho^3} &&= \Sigma w_1\\
&\Sigma k^2 m_1\left(\frac{1}{\varrho^3} - \frac{1}{r_1^3}\right) r_1 \sin B_1 &&= \Sigma W.
\end{aligned}$$

Hansen führt nun folgende Grössen ein

$$(r\cos b)^2\frac{dV}{dt} = k\sqrt{p_0}$$

$$(r\cos b)^2\frac{d\varDelta w}{dt} = \int \Sigma\, U dt,$$

wodurch

$$l = V + \varDelta w + \text{Constante}.$$

Ferner setzt er

$$r\cos b = \frac{p_0(1+\nu)}{1 + e_0\cos V}.$$

Dadurch wird

$$\frac{d^2\nu}{dt^2} + h\nu = H_0,$$

wobei

$$h = \frac{k^2}{(r\cos b)^3} - H_0$$

und

$$H_0 = \frac{2k\sqrt{p_0}}{(r\cos b)^4}\left\{1 + \frac{\int\Sigma\, U dt}{2k\sqrt{p_0}}\right\}\int\Sigma\, U dt + \Sigma R - \Sigma w_1 + {}^3/_2\, k^2\frac{z^2}{(r\cos b)^5}\left(\frac{f}{3}\right),$$

wobei f der Encke'sche Werth (vergl. Encke, Methode der Störungsrechnung). Wird noch

$$\frac{dM}{dt} = \mu_0 + \frac{d}{dt}\varDelta M$$

gesetzt, so folgt

$$\frac{d}{dt}\,\varDelta M = -\,2\mu_0\,\nu\,\frac{1+\frac{1}{2}\nu}{(1+\nu)^2}.$$

Diese Gleichung in Verbindung mit den früher entwickelten bestimmt das Problem.

Man hat also als Hauptgleichungen

$$\frac{d^2\nu}{dt^2} + h\nu = H_0$$

$$\frac{d}{dt}\,\varDelta M = -\,2\mu_0\,\nu\,\frac{1+\frac{1}{2}\nu}{(1+\nu)^2}$$

$$\frac{d}{dt}\,\varDelta w = \frac{1}{(r\cos b)^2}\int \Sigma U\,dt$$

$$\frac{d^2 z}{dt^2} + z\left\{\frac{k^2}{(r\cos b)^3} + \Sigma w_1\right\} = \Sigma W_1,$$

welche die Fundamentalgleichungen sind und integrirt werden müssen.

Die Differentialgleichungen haben die Form

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} + \frac{\mu}{r^3}\,\xi = A,$$

wobei ξ klein von der Ordnung der Störungen ist. Man kann also schreiben

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} + \frac{\mu}{r_0^3}\,\xi = A,$$

wenn man nur die Störungen erster Ordnung berücksichtigen will. Verbindet man diese Gleichung mit

$$\frac{d^2 x_0}{dt^2} + \frac{\mu}{r_0^3}\,x_0 = 0$$

$$\frac{d^2 y_0}{dt^2} + \frac{\mu}{r_0^3}\,y_0 = 0,$$

so folgt

$$x_0\,\frac{d\xi}{dt} - \xi\,\frac{dx_0}{dt} = \int A\,x_0\,dt$$

$$y_0\,\frac{d\xi}{dt} - \xi\,\frac{dy_0}{dt} = \int A\,y_0\,dt.$$

Für die Osculationsepoche werden diese $\int = 0$, also sind auch die Constanten $= 0$. Multiplicirt man die erste Gleichung mit y_0, die zweite mit $-x_0$ und addirt, so folgt, da

$$x_0\,\frac{dy_0}{dt} - y_0\,\frac{dx_0}{dt} = r_0^2\,\frac{dv_0}{dt} = k\sqrt{p_0\,(1+m)},$$

sofort

$$\xi = \frac{y_0}{k\sqrt{p_0}} \int A x_0\, dt - \frac{x_0}{k\sqrt{p_0}} \int A y_0\, dt.$$

Wir sind also im Stande, uns Näherungswerthe, die bis auf die Grössen erster Ordnung inclusive genau sind, zu verschaffen.

§. 304.

Delaunay's Mondtheorie.

Die Gleichungen erscheinen in der kanonischen Form

$$\frac{dG}{dt} = \frac{\partial R}{\partial g} \qquad \frac{dg}{dt} = -\frac{\partial R}{\partial G}$$
$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial R}{\partial h} \qquad \frac{dh}{dt} = -\frac{\partial R}{\partial H}$$
$$\frac{dL}{dt} = \frac{\partial R}{\partial l} \qquad \frac{dl}{dt} = -\frac{\partial R}{\partial L},$$

dabei ist

$$R = \frac{\mu}{2a} + m' \left\{ \frac{1}{\sqrt{(x_1 - x)^2 + (y_1 - y)^2 + (z_1 - z)^2}} - \frac{x x_1 + y y_1 + z z_1}{r_1^3} \right\}$$

$h = \Omega$, die Länge des Knotens des Mondes,
$g = \pi - \Omega$, Länge des Perihels — Länge des Knotens,
$l = M$, die mittlere Anomalie des Mondes,
$L = \sqrt{a\mu}$.
$G = L\sqrt{1 - e^2}$,
$H = G \cos i$,
a halbe grosse Axe des Mondes,
l die Excentricität des Mondes,
i die Neigung des Mondes,
$\mu = M + m$, die Summe der Massen der Erde und des Mondes,
v der Winkel zwischen dem Ω und dem Radiusvector des Mondes.

Die Mondcoordinaten, bezogen auf die Ekliptik der Anfangsepoche, sind

$$x = r \cos v \cos h - r \sin v \sin h \cos i$$
$$y = r \cos v \sin h + r \sin v \cos i \cos h$$
$$z = r \sin v \sin i.$$

Sei ferner

r_1 die Sonnenentfernung von der Erde,
v_1 der Winkelabstand der Sonne vom ☊ der beweglichen Ekliptik,
h_1 die Länge des aufsteigenden Knotens der beweglichen Ekliptik, bezogen auf die fixe von der x-Axe gerechnet.
i_1 die gegenseitige Neigung dieser beiden Ekliptiken,

so sind die Sonnencoordinaten

$$x_1 = r_1 \cos v_1 \cos h_1 - r_1 \sin v_1 \cos i_1 \sin h_1$$
$$y_1 = r_1 \cos v_1 \sin h_1 + r_1 \sin v_1 \cos i_1 \cos h_1$$
$$z_1 = r_1 \sin v_1 \sin i_1.$$

Sei noch

$$S = \frac{x x_1 + y y_1 + z z_1}{r r_1}$$

$$\sin i = 2\gamma\sqrt{1-\gamma^2} \qquad \sin i_1 = 2\gamma_1\sqrt{1-\gamma_1^2}$$
$$\cos i = 1 - 2\gamma^2 \qquad \cos i_1 = 1 - 2\gamma_1^2$$
$$\gamma = \sin^2 {}^1\!/_2\, i \qquad \gamma_1 = \sin^2 {}^1\!/_2\, i_1,$$

so wird

$$\begin{aligned} S = {} & (1 - \gamma^2 - \gamma_1^2 + \gamma^2\gamma_1^2) \cos\{v + h - v_1 - h_1\} \\ & + (\gamma^2 - \gamma_1^2\gamma^2) \cos\{v - h + v_1 + h_1\} \\ & + (\gamma_1^2 - \gamma^2\gamma_1^2) \cos\{v + h + v_1 - h_1\} \\ & + \gamma^2\gamma_1^2 \cos(v - h - v_1 + h_1) \\ & + 2\gamma\gamma_1\sqrt{1-\gamma^2}\sqrt{1-\gamma_1^2} \cos(v - v_1) \\ & - 2\gamma\gamma_1\sqrt{1-\gamma^2}\sqrt{1-\gamma_1^2} \cos(v + v_1) \end{aligned}$$

und

$$R = m_1 \, funct \, \{\gamma\gamma_1,\ h h_1,\ v v_1,\ a l e g\}$$

$$m_1 = \frac{a_1^3 n_1^2}{1 + \frac{M}{m}}.$$

a_1 die halbe grosse Axe der Erdbahn,
n_1 die mittlere siderische Bewegung.

Man vergleiche Delaunay: Théorie du mouvement de la Lune. Mém. de l'acad., Tom. XXVIII. Paris 1860.

§. 305.

Gylden's Behandlung des Dreikörperproblems.

Gylden schreibt die Gleichung der Bahncurve

$$r = \frac{a(1 - \eta^2)}{1 + \varrho},$$

η und ϱ sind Functionen von der Ordnung der Störungen, resp. der Excentricität.

Die Abhängigkeit des Ortes von der Zeit wird dargestellt durch

$$r^2 \frac{dv}{dt} = \frac{\sqrt{am_1 (1 - \eta^2)}}{1 + S},$$

S ebenfalls immer eine kleine Grösse.

Die Grössen ϱ und S bestimmen sich aus

$$\frac{d^2 \varrho}{d v^2} + (1 - \beta) \varrho = \Sigma a_n \cos (\lambda_n v - B_n)$$

$$\frac{d S}{d v} = \Sigma \beta_n \sin (\lambda_n v - B_n),$$

durch deren Integration

$$\varrho = k \cos \{\sqrt{1 - \beta} \, . \, v - \Gamma\} + \sum \frac{a_n}{1 - \beta - \lambda_n^2} \cos (\lambda_n v - B_n)$$

$$S = \frac{\beta_n}{\lambda_n} \cos (\lambda_n v - B_n)$$

folgt. $\alpha_n \beta_n$ und β sind von der Ordnung der störenden Masse, λ_n ist eine Constante. B_n, α_n, β_n enthalten die Unbekannten η, S, ϱ.

§. 306.

Entwickelung der Störungsfunction.

Sei

$$(1 + \alpha^2 - 2 \alpha \cos \psi)^{-1/2} = {}^1/_2 \sum_{-\infty}^{+\infty} b^i \cos i \psi \qquad b^{-i} = b^i$$

$$(1 + \alpha^2 - 2 \alpha \cos \psi)^{-3/2} = {}^1/_2 \sum_{-\infty}^{+\infty} c^i \cos i \psi \qquad c^{-i} = c^i$$

$$(1 + \alpha^2 - 2 \alpha \cos \psi)^{-5/2} = {}^1/_2 \sum_{-\infty}^{+\infty} e^i \cos i \psi \qquad e^{-i} = e^i$$

$$(1 + \alpha^2 - 2 \alpha \cos \psi)^{-7/2} = {}^1/_2 \sum_{-\infty}^{+\infty} f^i \cos i \psi \qquad f^{-i} = f^i,$$

allgemein

$$(1 + \alpha^2 - 2 \alpha \cos \psi)^{-s} = {}^1/_2 \sum_{-\infty}^{+\infty} B_s^i \cos i \psi,$$

so wird

$$\tfrac{1}{2} B_s^i = \frac{s(s+1)\ldots(s+i-1)}{1.2.3\ldots i}\alpha^i\left\{1+\frac{s}{1}\frac{s+i}{i+1}\alpha^2 + \frac{s(s+1)}{1.2}\frac{(s+i)(s+i+1)}{(i+1)(i+2)}\alpha^4+\cdots\right.$$

oder

$$B_s^i = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi (1+\alpha^2-2\alpha\cos\psi)^{-s}\cos i\psi\, d\psi,$$

speciell

$$b^i = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \frac{\cos i\psi\, d\psi}{(1+\alpha^2-2\alpha\cos\psi)^{1/2}} \text{ etc.}$$

$$B_s^i = \frac{i-1}{i-s}\left(\alpha+\frac{1}{\alpha}\right)B_s^{i-1} - \frac{i+s-2}{i-s}B_s^{i-2}$$

$$i B_s^i = s\alpha\left\{B_{s+1}^{i-1} - B_{s+1}^{i+1}\right\}$$

$$B_{s+1}^i = \frac{(i+s)(1+\alpha^2)B_s^i - 2(i-s+1)\alpha B_s^{i+1}}{s(1-\alpha^2)^2}$$

$$B_{s+1}^{i+1} = \frac{2(i+s)\alpha B_s^i - (i-s+1)(1+\alpha^2)B_s^{i+1}}{s(1-\alpha^2)^2}$$

$$\begin{cases} \tfrac{1}{2}\left\{B_{s+1}^i + B_{s+1}^{i+1}\right\} = \dfrac{(i+s)B_s^i - (i-s+1)B_s^{i+1}}{2s(1-\alpha)^2} \\ \tfrac{1}{2}\left\{B_{s+1}^i - B_{s+1}^{i+1}\right\} = \dfrac{(i+s)B_s^i + (i-s+1)B_s^{i+1}}{2s(1+\alpha)^2} \end{cases}$$

$$\tfrac{1}{2} B_s^i = \frac{s(s+1)\ldots(s+i-1)}{1.2.3\ldots i}\frac{\alpha^i}{(1-\alpha^2)^s}\left\{1+\frac{s}{1}\frac{s-1}{i+1}\frac{\alpha^2}{1-\alpha^2} + \frac{s(s+1)}{1.2}\cdot\frac{(s-1)(s-2)}{(i+1)(i+2)}\left(\frac{\alpha^2}{1-\alpha^2}\right)^2+\cdots\right.$$

$$(\alpha^2-\alpha^4)\frac{d^2 B_s^i}{d\alpha^2} + (\alpha-[4s+1]\alpha^3)\frac{dB_s^i}{d\alpha} - \{4s^2\alpha^2 + i^2(1-\alpha^2)\}B_s^i = 0$$

$$\frac{dB_s^i}{d\alpha} = s\left\{B_{s+1}^{i-1} + B_{s+1}^{i+1} - 2\alpha B_{s+1}^i\right\}$$

$$\frac{dB_s^i}{d\alpha} = \frac{[i+(i+2s)\alpha^2]B_s^i - 2(i+1-s)\alpha B_s^{i+1}}{\alpha(1-\alpha^2)}.$$

Vergl. Tisserand: Traité de méc. cél., Tom 1, Chap. XVII.

$$\Omega = \frac{\mu'}{\mu}\left(\frac{1}{\Delta} - \frac{r}{r_1}\cos H\right)$$

$$\Delta = \sqrt{r^2+r_1^2-2rr_1\cos H}.$$

Ueber $\cos H$ vergl. S. 607.

$$\frac{a}{\varDelta} = \frac{a_1}{r_1} C_0 + 2\left(\frac{a_1}{r_1}\right)^2\left(\frac{r}{a}\right) C_1 \cos H$$
$$+ 2\left(\frac{a_1}{r_1}\right)^3\left(\frac{r}{a}\right)^2 C_2 \cos 2H + \cdots$$

Es ist

$$C_n = \frac{2}{\pi}\left(\frac{a}{a_1}\right)^{n+1}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\varphi \sin^{2n}\varphi}{\sqrt{1-\left(\frac{a}{a_1}\right)^2\left(\frac{a_1}{r_1}\right)^2\left(\frac{r}{a}\right)^2 \sin^2\varphi}}.$$

Setzt man

$$C_n = \gamma_0^n - \gamma_1^{(n)} f + \gamma_2^{(n)} f^2 - \cdots,$$

wobei

$$f = \left\{1 - \left(\frac{a_1}{r_1}\right)^2\left(\frac{r}{a}\right)^2\right\},$$

so wird

$$\gamma_s^{(n)} = \frac{2}{\pi}\cdot\frac{1.3.5\ldots 2s-1}{2.4.6\ldots 2s}\left(\frac{a}{a_1}\right)^{n+2s+1}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^{2(n+s)}\varphi\, d\varphi}{[1-\alpha^2\sin^2\varphi]^{\frac{2s+1}{2}}}$$

$$\alpha = \left(\frac{a}{a_1}\right).$$

Einige Integrale:

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-\alpha^2\sin^2\varphi}} = F(\alpha).$$ Legendre, Exerc. I. p. 138.

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^2\varphi\, d\varphi}{\sqrt{1-\alpha^2\sin^2\varphi}} = \frac{1}{\alpha^2}[F(\alpha) - E(\alpha)].$$ Ibid.

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin^4\varphi\, d\varphi}{\sqrt{1-\alpha^2\sin^2\varphi}} = \frac{2}{3}\,\frac{1+\alpha^2}{\alpha^4}\{F(\alpha) - E(\alpha)\} - \frac{1}{3\alpha^2}F(\alpha).$$

Crelle's J. 46, S. 119.

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-\alpha^2\sin^2\varphi}^3} = \frac{1}{1-\alpha^2}E(\alpha).$$ Legendre, Exerc. I. p. 138.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2\varphi\, d\varphi}{\sqrt{1-\alpha^2\sin^2\varphi}^3} = \frac{1}{\alpha^2(3-\alpha^2)}\, E(\alpha) - \frac{1}{\alpha^2}\, F(\alpha).$$

Liouville, Journ. 11, p. 157.

Vergl. Vierteljahrsschr. der A. G. 25, III. Heft.

Um die Function

$$\Omega = m'\left\{\frac{1}{\varDelta} - \frac{x x_1 + y y_1 + z z_1}{r_1^3}\right\}$$

in einer Reihe zu entwickeln, setzen wir

$$x = \varrho \cos l \qquad y = \varrho \sin l$$
$$x_1 = \varrho_1 \cos l_1 \qquad y_1 = \varrho_1 \sin l_1;$$

dabei sind ϱ und ϱ_1 Projectionen von r und r_1 auf die Ebene L. Damit wird:

$$\Omega = m'\left\{\frac{1}{\sqrt{\varrho_1^2 - 2\varrho\varrho_1\cos[l_1 - l] + \varrho^2 + (z_1 - z)^2}} - \frac{\varrho\varrho_1\cos[l_1 - l] + z z_1}{(\varrho_1 + z_1)^{3/2}}\right\}.$$

Wir wollen nun annehmen, dass die z-Coordinaten klein seien, so dass eine Entwickelung dieser Function nach $z z'$ möglich wird, und erhalten

$$\frac{\Omega}{m'} = \frac{1}{\sqrt{\varrho_1^2 - 2\varrho\varrho_1\cos[l_1 - l] + \varrho^2}} - \frac{\varrho}{\varrho_1^2}\cos[l_1 - l] - \frac{z z_1}{\varrho_1^3}$$
$$+ {}^3/_2\,\frac{\varrho z_1^2\cos[l_1 - l]}{\varrho_1^4} - \frac{(z - z_1)^2}{2[\varrho_1^2 - 2\varrho\varrho_1\cos[l_1 - l] + \varrho_1^2]^{3/2}} + \cdots$$

Seien nun a und a_1 die mittleren Entfernungen, ε, ε_1 die Längen der Epoche und n, n_1 die mittleren Winkelgeschwindigkeiten, und sei

$$\varrho = a(1 + \sigma) \qquad \varrho_1 = a_1(1 + \sigma_1)$$
$$l = nt + \varepsilon + \chi \qquad l_1 = n_1 t + \varepsilon_1 + \chi_1$$
$$\theta = (n_1 - n)t + (\varepsilon_1 - \varepsilon)$$
$$(a^2 - 2 a a_1 \cos\theta + a_1^2)^{-1/2} = \sum_0^\infty A_k \cos k\theta$$
$$(a^2 - 2 a a_1 \cos\theta + a_1^2)^{-3/2} = \sum_0^\infty B_k \cos k\theta,$$

so findet man, da allgemein

$$f\{a(1+\sigma), a_1(1+\sigma_1), (\theta+\chi_1-\chi)\} = f(a, a_1, \theta) + \frac{\partial f}{\partial a} a\sigma + \frac{\partial f}{\partial a_1} a_1\sigma_1 + \frac{\partial f}{\partial \theta}(\chi_1-\chi) + \frac{\partial^2 f}{\partial a\,\partial a_1} a\sigma a_1\sigma_1 + {}^1/_2 \frac{\partial^2 f}{\partial a^2} a^2\sigma^2 + \cdots,$$

wobei, wenn man die dritten Potenzen der von den Excentricitäten und Neigungen abhängigen Glieder vernachlässigt,

$$\left.\begin{aligned}\frac{\Omega}{m} = &- \frac{z z_1}{a_1^3} + \left\{\frac{3}{2}\frac{a z_1^2}{a_1^4} - \frac{a}{a_1^2}\left[1+\sigma-2\sigma_1-2\sigma\sigma_1+3\sigma_1^2\right.\right.\\ &\left.\left.- {}^1/_2(\chi_1-\chi)^2\right]\right\}\cos\theta + \frac{a}{a_1^2}(1+\sigma-2\sigma_1)(\chi_1-\chi)\sin\theta\\ &+\sum\left[A_k + \frac{\partial A_k}{\partial a}a\sigma + \frac{\partial A_k}{\partial a_1}a_1\sigma_1 + \frac{\partial^2 A_k}{\partial a\,\partial a_1}a a_1\sigma\sigma_1\right.\\ &+{}^1/_2\frac{\partial^2 A_k}{\partial a^2}a^2\sigma^2 + {}^1/_2\frac{\partial^2 A_k}{\partial a_1^2}a_1^2\sigma_1^2 - \frac{(\chi_1-\chi)^2}{2}k^2 A_k\\ &\left.-\frac{(z-z_1)^2}{2}B_k\right]\cos k\theta\\ &-(\chi_1-\chi)\sum\left[A_k + \frac{\partial A_k}{\partial a}a\sigma + \frac{\partial A_k}{\partial a_1}a_1\sigma_1\right]k\sin k\theta\end{aligned}\right\} \quad 11)$$

Hier haben wir noch die Grössen χ, χ_1, σ, σ_1 als Functionen von t darzustellen. Es ist

$$\varrho = r\cos b \quad \ldots\ldots\ldots \quad 12)$$

$$\cos b = \frac{\cos u}{\cos(l-\Omega)} \quad \ldots\ldots\ldots \quad 13)$$

$$tgn\, u = \cos i\; tgn(l-\Omega) \quad \ldots\ldots \quad 14)$$

Setzen wir

$$l - \Omega = u + \delta l,$$

so wird

$$\delta l = -{}^1/_2 tgn^2 i\, \frac{tgn\, u}{1+tgn\, u} = -{}^1/_4 tgn^2 i \sin 2u,$$

also

$$l - \Omega = u - {}^1/_4 tgn^2 i \sin 2u.$$

Geht man mit diesem Werth in die Gleichung 13) ein, so ergiebt sich innerhalb der festgesetzten Genauigkeitsgrenzen

$$\frac{\varrho}{a} = \frac{r}{a}\cos b = \frac{r}{a}\left[1 - {}^1/_2 tgn^2 i \sin^2 u\right] = 1 + \sigma.$$

Man erhält nach einigen Reductionen

$$\left.\begin{aligned}\sigma &= -e\cos[nt+\varepsilon-w] - \frac{e^2}{2}[\cos 2(nt+\varepsilon-w)-1] \\ &\quad - {}^1/_2\, tgn^2 i \sin^2[nt+\varepsilon]\end{aligned}\right\} \quad 15$$

$$\left.\begin{aligned}\chi &= 2e\sin[nt+\varepsilon-w] + {}^5/_4\, e^2 \sin 2(nt+\varepsilon-w) \\ &\quad - {}^1/_4\, tgn^2 i \sin 2(nt+\varepsilon)\end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \quad 16$$

Führt man, was vortheilhaft ist, eine solche Zählung, das

$$u = v - \Omega,$$

und setzt

$$p = tgn\, i \sin\Omega \qquad q = tgn\, i \cos\Omega,$$

so lassen sich die letzteren Formeln auch schreiben wie folgt

$$\left.\begin{aligned}\sigma &= -e\cos[nt+\varepsilon-w] + \frac{e^2}{2}[1-\cos 2(nt+\varepsilon-w)] \\ &\quad - {}^1/_2\{p^2+q^2+(p^2-q^2)\cos 2(nt+\varepsilon) \\ &\qquad\qquad - 2\sin 2(nt+\varepsilon)pq\}\end{aligned}\right\} \quad 17)$$

$$\left.\begin{aligned}\chi &= 2e\sin(nt+\varepsilon-w) + {}^5/_4\, e^2\sin 2(nt+\varepsilon-w) \\ &\quad - {}^1/_4\{(q^2-p^2)\sin 2(nt+\varepsilon) - 2pq\cos 2(nt+\varepsilon)\}\end{aligned}\right\} \quad 18)$$

In allen diesen Formeln wurde an die Stelle von nt der allgemeinste Ausdruck $nt+\varepsilon-w$ aus naheliegenden Gründen gesetzt.

Endlich folgt

$$z = qy - px,$$

oder, da die dritten Potenzen von i und e vernachlässigt werden

$$z = a[q\sin(nt+\varepsilon) - p\cos(nt+\varepsilon)] \quad . \; . \; . \; . \quad 19$$

Vergl. Resal, Mécan. cél., Chap. II, §. 3, II. Ed.

§. 307.

Massenbestimmung und Verwandtes.

1) Ist p die Parallaxe und a die halbe grosse Axe eines Doppelsternes, beide in Bogensecunden ausgedrückt, ferner M die Masse der Sonne, T die Umlaufszeit des Doppelsternes in Jahren, so ist

$$m + m' = \left(\frac{a}{p}\right)^3 \frac{M}{T^2};$$

m und m' sind die Massen der beiden Componenten des Doppelsternes.

2) Sei die Masse der Sonne $= 1$, μ die Masse irgend eines Satellits und m die Masse eines Planeten, k die Gravitations-

onstante, T und t die Umlaufszeit des Planeten und des Mondes, A und a die halbe grosse Axe des Planeten und des Mondes, so ist

$$\frac{m+\mu}{1+m} = \frac{t^2 A^3}{T^2 a^3}.$$

3) Sei ϱ der Halbmesser, μ die Masse eines Himmelskörpers, die Intensität der Gravitation auf seiner Oberfläche, so ist

$$\gamma = g\,\frac{\mu}{m}\left(\frac{r}{\varrho}\right)^2,$$

abei ist m die Masse der Erde und r der Erdhalbmesser.

4) Sei l die Länge des Secundenpendels auf der Erde, λ auf rgend einem Planeten, dessen Gravitationsintensität γ ist, so wird

$$\lambda = \frac{\gamma}{g}\,l.$$

§. 308.

Die Störungen der rotirenden Bewegung.

Die Bewegung eines Körpers ist vollkommen bestimmt, sobald man die Werthe der Coordinaten der Kräfte

$$\Sigma X_1, \quad \Sigma Y_1, \quad \Sigma Z_1,$$

erner jene der zu den drei Coordinatenaxen senkrecht stehenden Kräftepaare

$$\Sigma(y_1 Z_1 - z_1 Y_1), \quad \Sigma(z_1 X_1 - x_1 Z_1), \quad \Sigma(x_1 Y_1 - y_1 X_1)$$

kennt. Die ersteren bestimmen die fortschreitende, die letzteren die rotirende Bewegung.

Sei keine fortschreitende Bewegung vorhanden, dann rufen die drei Kräftepaare eine Drehung um die Momentenaxe hervor.

Sei w die Geschwindigkeit dieser Drehung, ferner α, β, γ die Richtungswinkel der Momentenaxe, bezogen auf die drei Hauptträgheitsaxen des Centralellipsoids als Coordinatensystem, und

$$w_1 = w\cos\alpha, \qquad w_2 = w\cos\beta, \qquad w_3 = w\cos\gamma,$$

und seien A, B, C die Hauptträgheitsmomente, so gelten folgende Gleichungen

$$A\,\frac{d w_1}{d t} + (C - B) w_2 w_3 = \Sigma(y_1 Z_1 - z_1 Y_1)$$

$$B\,\frac{d w_2}{d t} + (A - C) w_1 w_3 = \Sigma(z_1 X_1 - x_1 Z_1)$$

$$C\,\frac{d w_3}{d t} + (B - A) w_1 w_2 = \Sigma(x_1 Y_1 - y_1 X_1).$$

Aus diesen erhält man w_1, w_2, w_3, und mit diesen

$$w = \sqrt{w_1^2 + w_2^2 + w_3^2}$$

$$\cos\alpha = \frac{w_1}{w}, \quad \cos\beta = \frac{w_2}{w} \quad \cos\gamma = \frac{w_3}{w}.$$

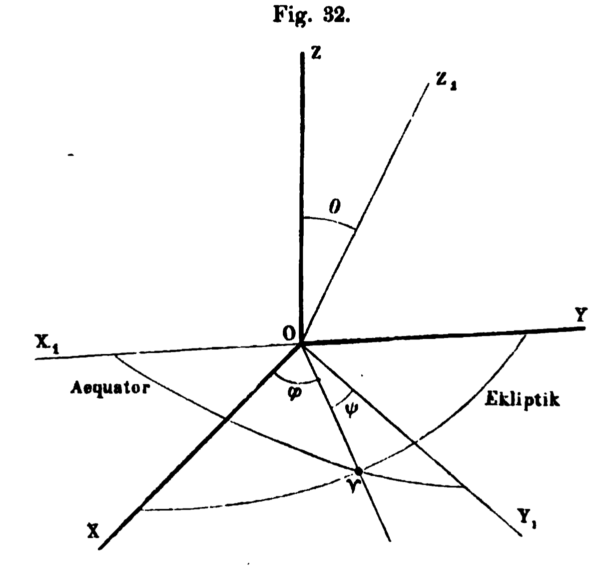
Damit ist der Charakter der Rotation bestimmt.

Um die Lage der Rotationsaxe im Raume zu fixiren, wählen wir ein festes Coordinatensystem X, Y, Z, und bestimmen die Lage des ersteren gegen das letztere durch die Winkel (s. Fig. 32)

$$\varphi \quad \psi \quad \theta.$$

Da die Umdrehungsaxe eine der drei Hauptträgheitsaxen sein muss, so wird θ die Schiefe der Ekliptik darstellen, wenn X, Y, Z das ekliptikale System ist. $d\theta$ giebt dann die Aenderung der Schiefe der Ekliptik, $d\psi$ (Fig. 32) stellt die Aenderung des Abstandes eines festen Ekliptikpunktes X vom

Fig. 32.



Aequinoctialpunkte ♈ dar, also das Vorrücken der Nachtgleichen, $d\varphi$ wird der Hauptsache nach durch die tägliche Rotation bestimmt sein.

Projicirt man die drei Drehungen auf jede der Trägheitsaxen und bestimmt die Summe der Projectionen, so ergiebt sich

$$-w_1\,dt = \sin\theta\sin\varphi\,d\psi + \cos\varphi\,d\theta$$
$$w_2\,dt = \sin\varphi\,d\theta - \sin\theta\cos\varphi\,d\psi$$
$$w_3\,dt = d\varphi + \cos\theta\,d\psi,$$

woraus wieder

$$- d\theta = [w_1 \cos\varphi - w_2 \sin\varphi]\, dt$$

$$- \sin\theta\, d\psi = [w_2 \cos\varphi + w_1 \sin\varphi]\, dt$$

$$d\varphi = w_3\, dt + \cotg\theta\, [w_2 \cos\varphi + w_1 \sin\varphi]\, dt$$

folgt. Seien nun x, y, z die auf das feste System bezogenen Coordinaten, so gelten folgende Beziehungen:

$$\begin{aligned} x_1 &= a x + a_1 y + a_2 z & \quad x &= a x_1 + b y_1 + c z_1 \\ y_1 &= b x + b_1 y + b_2 z & \quad y &= a_1 x_1 + b_1 y_1 + c_1 z_1 \\ z_1 &= c x + c_1 y + c_2 z & \quad z &= a_2 x_1 + b_2 y_1 + c_2 z_1; \end{aligned}$$

dabei ist

$$\begin{aligned} a &= \cos(X X_1) & \quad a_1 &= \cos(Y X_1) & \quad a_2 &= \cos(Z X_1) \\ b &= \cos(X Y_1) & \quad b_1 &= \cos(Y Y_1) & \quad b_2 &= \cos(Z Y_1) \\ c &= \cos(X Z_1) & \quad c_1 &= \cos(Y Z_1) & \quad c_2 &= \cos(Z Z_1), \end{aligned}$$

oder, wenn wir die früheren Winkel einführen,

$$\begin{aligned} a &= - \sin\varphi \sin\psi \cos\theta + \cos\varphi \cos\psi \\ a_1 &= \sin\varphi \cos\psi \cos\theta + \cos\varphi \sin\psi \\ a_2 &= - \sin\varphi \sin\theta \\ b &= - \cos\varphi \sin\psi \cos\theta - \sin\varphi \cos\psi \\ b_1 &= \cos\varphi \cos\psi \cos\theta - \sin\varphi \sin\psi \\ b_2 &= - \cos\varphi \sin\theta \\ c &= - \sin\psi \sin\theta \\ c_1 &= \cos\psi \sin\theta \\ c_2 &= \cos\theta. \end{aligned}$$

Sei nun

$$\begin{aligned} L &= \Sigma (y_1 Z_1 - z_1 Y_1) \\ M &= \Sigma (z_1 X_1 - x_1 Z_1) \\ N &= \Sigma (x_1 Y_1 - y_1 X_1). \end{aligned}$$

Wir nehmen an, ein Punkt mit der Masse μ wirke auf den Körper. Sei

$$r^2 = (x'_1 - x_1)^2 + (y'_1 - y_1)^2 + (z'_1 - z_1)^2,$$

so wird das Potential

$$V = \mu \sum \frac{m}{r}$$

und

$$L = z'_1 \frac{\partial V}{\partial y_1} - y'_1 \frac{\partial V}{\partial z_1}$$

$$M = x'_1 \frac{\partial V}{\partial z_1} - z'_1 \frac{\partial V}{\partial x_1}$$
$$N = y'_1 \frac{\partial V}{\partial x_1} - x'_1 \frac{\partial V}{\partial y_1}.$$

Man findet auch, da

$$a_2 = b c_1 - c b_1$$
$$b_2 = c a_1 - a c_1$$
$$c_2 = a b_1 - b a_1$$

$$\frac{\partial V}{\partial \varphi} = N$$
$$\frac{\partial V}{\partial \psi} = - L \sin\varphi \sin\theta - M \cos\varphi \sin\theta + N \cos\theta$$
$$\frac{\partial V}{\partial \theta} = M \sin\varphi - L \cos\varphi.$$

Berechnet man aus diesen Gleichungen L, M, N und führt diese Grössen in unsere Fundamentalgleichungen ein, so folgt

$$A \frac{d w_1}{dt} + [C - B] w_2 w_3 = \frac{\sin\varphi}{\sin\theta} \left\{ \cos\theta \frac{\partial V}{\partial \varphi} - \frac{\partial V}{\partial \psi} \right\} - \cos\varphi \frac{\partial V}{\partial \theta}$$
$$B \frac{d w_2}{dt} + [A - C] w_1 w_3 = \frac{\cos\varphi}{\sin\theta} \left\{ \cos\theta \frac{\partial V}{\partial \varphi} - \frac{\partial V}{\partial \psi} \right\} + \sin\psi \frac{\partial V}{\partial \theta}$$
$$C \frac{d w_3}{dt} + [B - A] w_1 w_2 = \frac{\partial V}{\partial \varphi}.$$

Wir wollen nun V näher entwickeln. Es ist

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{r'_1} \left\{ 1 - \frac{2}{r_1^2} (x'_1 x_1 + y'_1 y_1 + z'_1 z_1) + \left(\frac{r_1}{r'_1}\right)^2 \right\}^{-1/2}.$$

Die Entwickelung giebt als Glieder.

0ter Ordnung 1

1ter „ $\left(\frac{1}{r'_1}\right)^2 (x'_1 x_1 + y'_1 y_1 + z'_1 z_1)$

2ter „ $\frac{3}{2}\left(\frac{1}{r'_1}\right)^4 (x'_1 x_1 + y'_1 y_1 + z'_1 z_1)^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{r'_1}{r_1}\right)^2.$

Die Glieder dritter Ordnung haben wir erfahrungsgemäss nicht in Betracht zu ziehen.

Da der Schwerpunkt als Coordinatenursprung gilt, so wird

$$\Sigma m x_1 = 0 \quad \Sigma m y_1 = 0 \quad \Sigma m z_1 = 0.$$

Aber auch die Deviationsmomente verschwinden, weil die Coordinatenaxen mit den drei Hauptträgheitsaxen zusammenfallen, es ist also

$$\Sigma m x_1 y_1 = 0 \quad \Sigma m y_1 z_1 = 0 \quad \Sigma m x_1 z_1 = 0.$$

Sei nun

$$\Sigma m x_1^2 = {}^1/_2(-A + B + C)$$
$$\Sigma m y_1^2 = {}^1/_2(A - B + C)$$
$$\Sigma m z_1^2 = {}^1/_2(A + B - C),$$

also

$$\Sigma m r_1^2 = {}^1/_2(A + B + C),$$

so wird

$$V = \mu \sum \frac{m}{r} = \mu \frac{\Sigma m}{r'_1} + {}^3/_4 \mu \left(\frac{1}{r'_1}\right)^5 \{(x'_1)^2[B + C - A]$$
$$+ (y'_1)^2[A + C - B] + (z'_1)^2[A + B - C]\}$$
$$- {}^1/_4 \mu \left(\frac{1}{r'_1}\right)^3 [A + B + C].$$

Nehmen wir an, dass die Erde nahezu ein Rotationskörper ist, so wird, da A, B, C und r'_1 von φ, ψ, θ unabhängig sind,

$$\frac{\partial V}{\partial \varphi} = \frac{3\mu}{(r'_1)^5}(A - C) z'_1 \frac{\partial z'_1}{\partial \varphi}$$
$$\frac{\partial V}{\partial \psi} = \frac{3\mu}{(r'_1)^5}(A - C) z'_1 \frac{\partial z'_1}{\partial \psi}$$
$$\frac{\partial V}{\partial \theta} = \frac{3\mu}{(r'_1)^5}(A - C) z'_1 \frac{\partial z'_1}{\partial \theta}.$$

Diese Gleichungen ergeben sich aus V, wenn man $B = A$ setzt. Wir haben aber

$$z'_1 = c x_1 + c_1 y_1 + c_2 z_1$$

oder

$$z'_1 = - \sin\psi \sin\theta \,.\, x_1 + \cos\psi \sin\theta \,.\, y_1 + \cos\theta \,.\, z^1,$$

demnach, da x_1, y_1, z_1 von φ, θ, ψ unabhängig sind,

$$\frac{\partial z'^1}{\partial \varphi} = 0,$$

also auch

$$\frac{\partial V}{\partial \varphi} = 0,$$

so dass

$$A \frac{d w_1}{d t} + (C - A) w_2 w_3 = - \frac{\sin\varphi}{\sin\theta} \cdot \frac{\partial V}{\partial \psi} - \cos\varphi \frac{\partial V}{\partial \theta}$$
$$A \frac{d w_2}{d t} - (C - A) w_2 w_3 = - \frac{\cos\varphi}{\sin\theta} \cdot \frac{\partial V}{\partial \psi} + \sin\varphi \frac{\partial V}{\partial \theta}$$
$$C \frac{d w_3}{d t} = 0,$$

also

$$w_3 = Const. = n.$$

Die Geschwindigkeit der Erde um ihre kleine Axe ist demnach eine Constante und muss durch die Beobachtung bestimmt werden.

Sodann lassen sich die beiden ersteren Gleichungen schreiben wie folgt:

$$A\frac{dw_1}{dt} + (C - A)w_2 n = -\frac{\sin\varphi}{\sin\theta}\frac{\partial V}{\partial\psi} - \cos\varphi\frac{\partial V}{\partial\theta}$$

$$A\frac{dw_2}{dt} - (C - A)w_1 n = -\frac{\cos\varphi}{\sin\theta}\frac{\partial V}{\partial\psi} + \sin\varphi\frac{\partial V}{\partial\theta}.$$

Setzt man

$$p = \frac{C - A}{A}n,$$

so lauten die beiden Systeme der particulären Lösungen der Gleichungen

$$A\frac{dw_1}{dt} + (C - A)w_2 n = 0$$

$$A\frac{dw_2}{dt} - (C - A)w_1 n = 0$$

$$w_1 = \xi\cos pt + \eta\sin pt$$

$$w_2 = \xi\sin pt - \eta\cos pt.$$

Durch Variation der Constanten, indem wir $\frac{dw_1}{dt}$ und $\frac{dw_2}{dt}$ bilden und in die obigen Gleichungen einsetzen, erhalten wir

$$A\frac{d\xi}{dt} = -\frac{\sin(pt + \varphi)}{\sin\theta}\frac{\partial V}{\partial\psi} - \cos(pt + \varphi)\frac{\partial V}{\partial\theta} = U_1$$

$$A\frac{d\eta}{dt} = \frac{\cos(pt + \varphi)}{\sin\theta}\frac{\partial V}{\partial\psi} - \sin(pt + \varphi)\frac{\partial V}{\partial\theta} = U_2,$$

und hieraus

$$\xi = \xi_0 - \int\frac{U_1}{A}dt$$

$$\eta = \eta_0 - \int\frac{U_2}{B}dt.$$

Wir haben nur noch φ als Function von t zu bestimmen. Wir fanden

$$d\varphi = w_3 dt - \cos\theta\, d\psi,$$

also wird

$$\varphi = \varphi_0 + pt - \int\cos\theta\frac{d\psi}{dt}\cdot dt.$$

In Bezug auf die numerische Berechnung verweisen wir auf ppolzer's Lehrbuch zur Bahnbestimmung, I. Bd., 2. Aufl. Was ie Anwendung anbetrifft, findet man das Nöthige in Brünnow, phärische Astronomie, II. Abschnitt. Man vergleiche auch: ontécoulant, Analytische Theorie des Weltsystems, d. v. Hartıann, II. Bd., IV. Abschnitt. Der Erste, der hierher gehörige robleme gelöst hat, war d'Alembert, „Recherches sur la récession des équinoxes" (1749). Grosse Verdienste hat sich uch Lagrange (Mém. de Berlin 1780) erworben, indem er der on d'Alembert noch nicht genügend entwickelten Theorie der otationsbewegung des Mondes die nöthige Schärfe gab.

§. 309.

Mechanische Rechnungen.

Function:	I. Diff.	II. Diff.	III. Diff.
$f(a-2w)$			
	$f^{\text{I}}(a-{}^3/_2 w)$		
$f(a-w)$		$f^{\text{II}}(a-w)$	
	$f^{\text{I}}(a-{}^1/_2 w)$		$f^{\text{III}}(a-{}^1/_2 w)$
$f(a)$		$f^{\text{II}}(a)$	
	$f^{\text{I}}(a+{}^1/_2 w)$		$f^{\text{III}}(a+{}^1/_2 w)$
$f(a+w)$		$f^{\text{II}}(a+w)$	
	$f^{\text{I}}(a+{}^3/_2 w)$		
$f(a+2w)$			

Es ist

$$f^{\text{I}}(a-{}^1/_2 w) = f(a) - f(a-w)$$
$$f^{\text{II}}(a) \qquad = f^{\text{I}}(a+{}^1/_2 w) - f^{\text{I}}(a-{}^1/_2 w).$$

Function:	I. Summe	II. Summe	III. Summe
	C_{I}		
$f(a-2w)$		C_{II}	
	${}^{\text{I}}f(a-{}^3/_2 w)$		C_{III}
$f(a-w)$		${}^{\text{II}}f(a-w)$	
	${}^{\text{I}}f(a-{}^1/_2 w)$		${}^{\text{III}}f(a-{}^1/_2 w)$
$f(a)$		${}^{\text{II}}f(a)$	
	${}^{\text{I}}f(a+{}^1/_2 w)$		${}^{\text{III}}f(a+{}^1/_2 w)$
$f(a+w)$		${}^{\text{II}}f(a+w)$	
	${}^{\text{I}}f(a+{}^3/_2 w)$		
$f(a+2w)$			

Es ist

$${}^{\text{I}}f(a-{}^3/_2 w) = C_{\text{I}} + f(a-2w)$$
$${}^{\text{II}}f(a-w) \quad = C_{\text{II}} + {}^{\text{I}}f(a-{}^3/_2 w)$$
$${}^{\text{III}}f(a-{}^1/_2 w) = C_{\text{III}} + {}^{\text{II}}f(a-w).$$

C_{I} C_{II} C_{III} sind die Integrationsconstanten.

Es ist

$$f(a+nw) = f(a) + nf^{\text{I}}(a+{}^1/_2 w) + \frac{n(n-1)}{1.2} f^{\text{II}}(a)$$
$$+ \frac{(n+1)n(n-1)}{1.2.3} f^{\text{III}}(a+{}^1/_2 w)$$
$$+ \frac{(n+1)(n)(n-1)(n-2)}{1.2.3.4} f^{\text{IV}}(a) + \cdots$$

$$f(a+[i+n]w) = f(a+iw) + nf^{\text{I}}(a+iw) + \frac{n^2}{1.2} f^{\text{II}}(a+iw)$$
$$+ \frac{n(n^2-1)}{1.2.3} f^{\text{III}}(a+iw) + \frac{n^2(n^2-1)}{1.2.3.4} f^{\text{IV}}(a+iw) + \cdots$$

$$\frac{df(a+nw)}{da} = \frac{1}{w}\Big\{f^{\text{I}}(a) + nf^{\text{II}}(a) + \frac{3n^2-1}{1.2.3} f^{\text{III}}(a)$$
$$+ \frac{4n^3-2n}{1.2.3.4} f^{\text{IV}}(a) + \frac{5n^4-15n^2+4}{1.2.3.4.5} f^{\text{V}}(a) + \cdots$$

$$\int_p^q f(a+nw)\,dn = w\Big[\{{}^{\text{I}}f(a+q] - {}^{\text{I}}f(a+p)\}$$
$$+ \frac{1}{24}\{f^{\text{I}}(a+q) - f^{\text{I}}(a+p)\}$$
$$- \frac{17}{5760}\{f^{\text{III}}(a+q) - f^{\text{III}}(a+p)\}$$
$$+ \frac{367}{967680}\{f^{\text{V}}(a+q) - f^{\text{V}}(a+p)\} - \cdots\Big]$$

$$\int\int_p^q f(a+nw)\,dn^2 = w^2\Big[\{{}^{\text{II}}f(a+q) - {}^{\text{II}}f(a+p)\}$$
$$+ \frac{1}{12}\{f(a+q) - f(a+p)\}$$
$$- \frac{1}{240}\{f^{\text{II}}(a+q) - f(a+p)\}$$
$$+ \frac{31}{60480}\{f^{\text{IV}}(a+q) - f(a+p)\} + \cdots\Big].$$

Specielle Fälle.

I. Untere Grenze: $a - {}^1/_2 w$. (Integrationsconstante

$${}^{\text{I}}f(a-{}^1/_2 w) = -\frac{1}{24} f^{\text{I}}(a-{}^1/_2 w) + \frac{17}{5760} f^{\text{III}}(a-{}^1/_2 w)$$
$$- \frac{367}{967680} f^{\text{V}}(a-{}^1/_2 w) + \cdots$$

$$f(a) \quad = + \frac{1}{24} f(a-w) - \frac{17}{5760} \{2 f''(a-w) + f''(a)\}$$

Untere Grenze: (a).

$$f(a - {}^1/_2 w) = - {}^1/_2 f(a) + \frac{1}{12} f'(a) - \frac{11}{720} f'''(a)$$
$$+ \frac{191}{60\,480} f^{\text{V}}(a) - \cdots$$

$$f(a) \quad = - \frac{1}{12} f(a) + \frac{1}{240} f''(a) - \frac{31}{60\,480} f^{\text{IV}}(a) + \cdots$$

II. Obere Grenze: $\{a + (i + {}^1/_2) w\} = x$. (Integralwerth.)

$$\int^{x} f(\varphi)\, d\varphi = w \left\{ {}^{\text{I}}f(x) + \frac{1}{24} f'(x) - \frac{17}{5760} f'''(x) \right.$$
$$+ \frac{367}{967\,680} f^{\text{V}}(x) - \cdots$$

$$\int\int^{x} f(\varphi)\, d\varphi^2 = w^2 \left\{ {}^{\text{II}}f(x) - \frac{1}{24} f(x) + \frac{17}{1920} f''(x) \right.$$
$$- \frac{367}{193\,536} f^{\text{IV}}(x) + \cdots$$

Obere Grenze: $\{a + iw\} = y$.

$$\int^{y} f(\varphi)\, d\varphi = w \left\{ {}^{\text{I}}f(y) - \frac{1}{12} f'(y) + \frac{11}{720} f'''(y) \right.$$
$$- \frac{191}{60480} f^{\text{V}}(y) + \cdots$$

$$\int\int^{y} f(\varphi)\, d\varphi^2 = w^2 \left\{ {}^{\text{II}}f(y) + \frac{1}{12} f(y) - \frac{1}{240} f''(y) \right.$$
$$+ \frac{31}{60\,480} f^{\text{IV}}(y) - \cdots$$

Für w wird in der Regel die Einheit genommen.

Gewöhnliche Interpolationsformel.

$$f(y+\delta) = f(y) + \delta\, \Delta f(y) + \frac{\delta(\delta-1)}{1.2} \Delta^2 f(y)$$
$$+ \frac{\delta(\delta-1)(\delta-2)}{1.2.3} \Delta^3 f(y) + \frac{\delta(\delta-1)(\delta-2)(\delta-3)}{1.2.3.4} \Delta^4 f(y)$$

$$f(y+\delta) = f(y) + \delta \left\{ \Delta f(y) + \frac{\delta-1}{2} \left\{ \Delta^2 f(y) + \frac{\delta-2}{3} \left\{ \Delta^3 f(y) + \cdots \right\}\right\}\right\}$$

§. 310.

Periodische Reihen.

Sei

$$y = p_0 + \Sigma u_k \sin\left(U_k + \frac{2\pi}{\lambda} k x\right),$$

dabei wird angenommen, dass y eine periodische Function mit der Periode λ darstellt.

Sind

$$y_0 \; y_1 \; \cdots \quad y_{n-1}$$

Werthe gegeben, so hat man, wenn

$$z = \frac{360^0}{n}$$

gesetzt wird,

$$p_0 = \frac{1}{n} \sum_0^{n-1} y_k$$

$$p_1 = \frac{2}{n} \sum_{k=0}^{k=n-1} y_k \cos k z$$

$$q_1 = \frac{2}{n} \sum_{k=1}^{k=n-1} y_k \sin k z,$$

allgemein

$$p_i = \frac{2}{n} \sum_{k=0}^{k=n-1} y_k \cos i k z$$

$$q_i = \frac{2}{n} \sum_{k=1}^{k=n-1} y_k \sin i k z,$$

dann wird

$$u_i \sin U_i = p_i$$
$$u_i \cos U_i = q_i.$$

Speciell ist für $n = 5$, also $z = 72^0$

$$p_0 = {}^1/_5 (y_0 + y_1 + y_2 + y_3 + y_4)$$
$$p_1 = {}^2/_5 [y_0 - (y_2 + y_3) \cos 36^0 + (y_1 + y_4) \cos 72^0]$$

$$q_1 = {}^2/_5 [(y_2 - y_3) \sin 36^0 + (y_1 - y_4) \sin 72^0)$$

$$u_1 \sin U_1 = p_1$$

$$u_1 \cos U_1 = q_1$$

$$y = p_0 + u_1 \sin (U_1 + 72^0 . x).$$

Ist dagegen y keine periodische Function, so wird an die Stelle von n bei n gegebenen Werthen $2n - 2$ gesetzt, und es wird

$$y = u_0 + u_1 \cos \frac{360^0}{2n-2} x + u_2 \cos 2 \cdot \frac{360^0}{2n-2} x + \cdots$$

wobei u_0 u_1 u_2 ... wie früher zu berechnen sind.

Für $n = 5$ hat man z. B.

$$u_0 = {}^1/_8 \{(y_0 + y_4) + 2(y_1 + y_2 + y_3)\}$$

$$u_1 = {}^1/_4 \{(y_0 - y_4) + 2(y_1 - y_3) \cos 45^0\}$$

$$u_2 = {}^1/_2 \{(y_0 - 2y_2 + y_4)\}$$

$$u_3 = {}^1/_4 \{(y - y_4) - 2(y_1 - y_3) \cos 45^0\},$$

und es wird

$$y = u_0 + u_1 \cos 45^0 . x + u_2 \cos 90^0 . x + u_3 \cos 135^0 . x.$$

Für $u = 6$ hat man

$$u_0 = {}^1/_{10} \{(y_0 + y_5) + 2(y_1 + y_2 + y_3 + y_4)\}$$

$$u_1 = {}^1/_5 \{(y_0 - y_5) + 2(y_1 - y_4) \cos 36^0 + 2(y_2 - y_3) \cos 72^0\}$$

$$u_2 = {}^1/_5 \{(y_0 + y_5) - 2(y_2 + y_3) \cos 36^0 + 2(y_1 + y_4) \cos 72^0\}$$

und

$$y = u_0 + u_1 \cos 36^0 . x + u_2 \cos 72^0 x.$$

Für $u = 7$ hat man

$$u_0 = {}^1/_{12} \{(y_0 + y_6) + 2(y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5)\}$$

$$u_1 = {}^1/_6 \{(y_0 - y_6) + 2(y_1 - y_5) \cos 30^0 + 2(y_2 - y_4) \cos 60^0\}$$

$$u_2 = {}^1/_6 \{(y_0 - 2y_3 + y_6) + 2(y_1 - y_2 - y_4 + y_5) \cos 60^0\}$$

$$y = u_0 + u_1 \cos 30^0 . x + u_2 \cos 60^0 . x.$$

NB. y stellt nur den zwischen den Werthen y_0 und y_{n-1} enthaltenen Zweig der Function dar.

§. 311.

Elliptische Planetenelemente.

I. Wenn nichts Anderes bemerkt, gelten die Zahlen für die Epoche 1. Januar 1850 mittl. Mittag Pariser Zeit und die Ekliptik = 1850,00 mittl. Pariser Zeit.

Es bezeichne:

L mittlere Länge,

π Perihellänge,

M mittlere Anomalie:

$$M = L - \pi,$$

e Excentricität:

$$e = \sin\varphi \qquad e'' = \frac{e}{\sin 1''},$$

a halbe grosse Axe der Bahn = mittl. Distanz (Erde = 1),

S siderische Umlaufszeit in mittleren Sonnentagen,

m Masse, jene der Sonne = 1,

i Neigung,

C die Mittelpunktsgleichung:

$$C = v - M,$$

C_{max} die grösste Mittelpunktsgleichung,

☊ Länge des aufsteigenden Knotens,

t in Verbindung mit einem Element: Bewegung in einem Jul. Jahre,

j in Verbindung mit einem Element: Bewegung in 100 Jul. Jahren à 365,25 mittlere Sonnentage,

d scheinbarer Durchmesser des Aequators für mittlere Distanz,

D wirklicher Durchmesser des Aequators, jener der Erde = 1,

V Volumen: Erde = 1,

Di Dichte: Wasser = 1,

G Aequatorschwere, jene der Erde = 1,

U Rotationszeit,

n mittlere siderische Bewegung an einem Tage,

T tropische Umlaufszeit,

Sy synodische Umlaufszeit,

Gr S grösste / *Kl S* kleinste } Entfernung von der Sonne in Mill. Kilometern,

Gr E grösste / *Kl E* kleinste } „ „ „ Erde „ „ „

Gr D grösster / *Kl D* kleinster } scheinbarer Durchmesser, gesehen von der Erde aus,

K D Durchmesser des Aequators in Kilometern,

O K Oberfläche in Millionen Quadratkilometern,

O S Oberfläche in Oberfläche der Sonne enthalten,

O E „ „ „ „ Erde „

V K Volumen in tausend Millionen Cubikkilometern,

V S Volumen in der Sonne enthalten,

M Masse in Erden = 1.

Sonnenelemente.

(Leverrier, Ann. de Par. V, p. 102.)

$$L = 280^0\,46'\,43'',51 + \begin{cases} 1296027'',6784\,t + 0'',00011073\,t^2 \\ 0^0\,46'\,7'',840\,j \end{cases}$$

$$\pi = 280^0\,21'\,21'',5 + \begin{cases} 61'',6995\,t + 0'',0001823\,t^2 \\ 1^0\,42'\,49'',95\,j \end{cases}$$

$$M = L - \pi$$

$$\varphi = 3459'',28 - 0'',08755\,t - 0'',00000282\,t^2$$

$$e = 0,0167708 - 0,0000004244\,t$$

$$C = (6918'',30 - 0'',17510\,t)\,\sin M + 72'',508\,\sin 2M + 1'',054\,\sin 3M + 0'',018\,\sin 4M$$

$$C_{max} = 1^0\,55'\,18,77$$

$$\psi\ (\text{Nutation}) = -17'',264\,\sin \Omega + 0'',206\,\sin 2\Omega - 0'',204\,\sin 2\,☾ - 1'',264\,\sin 2\,\odot$$

☾ und ⊙ sind die wahren Längen des Mondes und der Sonne.
☊ die Länge des aufsteigenden Mondknotens.

$$P_{☾} = [3,39619]\,\frac{q}{Q}\,\sin(☾ - \odot).$$

Zahl in der Klammer ein Logarithmus.

q, Q die Parallaxen des Mondes und der Sonne.

$$\odot = L + C - 0'',343\,\cos M + \psi + P_{☾} + \text{Wirkung der Planeten.}$$

$$R = 1{,}00014063 - 0{,}0000000073\,t$$
$$- (0{,}01676927 - 0{,}0000004338\,t)\cos M$$
$$- (0{,}00014060 - 0{,}0000000073\,t)\cos 2M$$
$$- (0{,}00000177 - 0{,}0000000001\,t)\cos 3M$$
$$- (0{,}00000003 \cos 4M + \cdots$$

R der Radiusvector.

$$E = 23^\circ 27' 31'',83 - 0'',47594\,t - 0'',00000149\,t^2$$
$$9'',23 \cos \Omega - 0'',090 \cos 2\Omega + 0'',089 \cos 2☾ + 0'',548 \cos 2\odot.$$

E die Schiefe der Ekliptik.

Sonne.

$d = 32' 3'',64$
$D = 158{,}558$
$V = 1\,283\,720$
$Di = 1{,}39$
$G = 27{,}625$
$U = 25^d\,4^h\,29^m$
$Gr\,D = 1956'',5$
$Kl\,D = 1891'',9$
$K\,D = 1\,386\,690$
$O\,K = 6\,041\,000$
$V\,K = 1\,396\,160\,000$
$O\,E = 11\,818$
$E\,M = 322\,800$

Erde.

$d = 17'',72$
$D = 1$
$V = 1$
$Di = 5{,}50$
$G = 1$
$U = 23^h\,56^m\,4^s$
$n = 3548\,.\,1927$
$S = 1^j\,0{,}006374$
$a = 1{,}0000000$
$T = 365{,}24\,220$
$Gr\,S = 151{,}1$
$Kl\,S = 146{,}2$
$K\,D = 12\,756$
$O\,K = 511$
$O\,S = 11\,818$
$V\,K = 1083$
$V\,S = 1\,284\,800$

Mercur.

(Par. Annalen, t. V, p. 107.)

$$L = 327^\circ 15' 20'',43 + \begin{Bmatrix} 5381066'',5449\,t \\ 74^\circ 4' 14'',4900\,j \end{Bmatrix} + 0'',00011289\,t^2$$

$$\pi = 75^\circ\ 7' 13'',93 + \begin{Bmatrix} 55'',9138\,t \\ 1^\circ 33' 11'',380\,j \end{Bmatrix} + 0'',0001111\,t^2$$

$$\Omega = 46^\circ 33' \; 8'',75 + \begin{Bmatrix} 42'',6430\,t \\ 1^\circ 11' 4'',3\,j \end{Bmatrix} + 0'',0000835\,t^2$$

$$e = 0,20560478 + 0,04195\,t - 0,0000009\,t^2$$

$$i = 7^\circ 0' 7'',71 + 0'',06314\,t - 0'',0000056\,t^2$$

$$\tau L = 4^\circ 5' 32'',5573 = 14732,557$$

$$\tau w = 0'',153$$

$$\varphi = 42409''03$$

$$\tau \Omega = 0'',117$$

$$\begin{aligned} C = {} & (84373'',889 + 0'',08259\,t)\,\sin M \\ & + (10731'',815 + 0'',02089\,t)\,\sin 2M \\ & + (1891'',841 + 0,00551\,t)\,\sin 3M \\ & + (381'',075 + 0'',0015\,t)\,\sin 4M \\ & + (82'',548 + 0'',0004\,t)\,\sin 5M \\ & + 18'',716\,\sin 6M + 4'',378\,\sin 7M + 1'',048\,\sin 8M \\ & + 0'',225\,\sin 9M + 0'',063\,\sin 10M + \cdots \end{aligned}$$

$$C_{max} = 23^\circ 40' 38,01 + 0,0851\,t + 0,0000036\,t^2$$

$m = 1:(8\,374\,672 \pm 1\,765\,762$ (Harkness, S. 140)

$d = 6'',61$	(Ann. 1893)	$Gr\ S = 69,4$
$D = 0,373$	(„)	$Kl\ S = 45,6$
$V = 0,052$	(„)	$Gr\ E = 218$
$Di = 6,45$	(„)	$Kl\ E = 79$
$G = 0,439$	(„)	$Gr\ D = 12'',9$
$U = ?$		$Kl\ D = 4'',5$
$a = 0,3870987$	(„)	$K\ D = 4816$
$S = 87^d,969258$	(„)	$O\ K = 73$
$n = 14732'',4194$		$O\ S = 82\,930$
$T = 87^d,96843$		$O\ E = 0,14$
$Sy = 0^j\,115^d\,21^h$		$V\ K = 58$
		$V\ S = 238\,810\,000$
		$E\ M = 0,04$

V e n u s.

(Par. Ann., t. VI, p. 95 sq.)

$$L = 245^0\,33'\,14'',70 + \begin{cases} 2106691'',65043\,t + 0'',00011289\,t^2 \\ 199^0\,12'\,45'',0428\,j \end{cases}$$

$$\pi = 129^0\,27'\,14'',5 + \begin{cases} 49'',462\,t - 0'',000593\,t^2 \\ 1^0\,22'\,26'',200\,j \end{cases}$$

$$\Omega = 75^0\,19'\,52'',3 + \begin{cases} 32'',890\,t + 0'',000151\,t^2 \\ 0^0\,54'\,48'',99\,j \end{cases}$$

$$e = 0,00684331 - 0'',11132\,t + 0'',0000026\,t^2$$

$$i = 3^0\,23'\,34'',83 + 0'',04524\,t - 0'',00000156\,t^2$$

$$C = (2823'',050 - 0,22264\,t + 0,0000052\,t^2)\,\sin M + (12'',056 - 0,0019\,t)\,\sin 2M + (0,071 - 0,00001\,t)\,\sin 3M + \cdots$$

$$C_{max} = 0^0\,47'\,3'',08 - 0,2227\,t + 0,00104\,t^2$$

$m = 1 : (408968 \pm 1874)$ (Harkness, S. 140)

$\tau L = 1^0\,36'\,7'',8074 = 5767'',8074$

$\tau w = 0'',135$

$\varphi = 1411''53$

$\tau \Omega = 0'',090$

$d = 17'',55$	(Ann. 1893)	$Gr\ S = 108,3$	
$D = 0,999$	(„)	$Kl\ S = 106,7$	
$V = 0,975$	(„)	$Gr\ E = 257$	
$Di = 4,44$	(„)	$Kl\ E = 40$	
$G = 0,802$	(„)	$Gr\ D = 65'',2$	
$U = ?$		$Kl\ D = 9'',5$	
$a = 0,7233322$	(„)	$K\ D = 11\,969$	
$S = 224,700787$	(„)	$O\ K = 450$	
$n = 5767'',6698$		$O\ S = 13\,410$	
$T = 224,69544$		$O\ E = 0,88$	
$Sy = 1^j\,218^d\,16^h$		$V\ K = 898$	
		$V\ S = 1\,553\,400$	
		$E\ M = 0,78.$	

Mars.

(Par. Ann., t. VI, p. 309 sq.)

$$L = 83^0\,40'\,31'',33 + \begin{cases} 689101'',05375\,t + 0'',00011341\,t^2 \\ 61^0\,41^0\,45'',375\,j \end{cases}$$

$$\pi = 333^0\,17'\,53'',67 + \begin{cases} 66'',2421\,t + 0'',00012093\,t^2 \\ 1^0\,50'\,24'',21\,j \end{cases}$$

$$\Omega = 48^0\,23'\,53'',1 + \begin{cases} 27'',992\,t - 0'',000217\,t^2 \\ 46'\,39'',2\,j \end{cases}$$

$$e = 0,09326113 + 0'',19679\,t - 0'',00000252\,t^2$$

$$i = 1^0\,5'\,2'',28 - 0'',02431\,t + 0'',00000945\,t^2$$

$$\tau L = 0^0\,31'\,26'',6559 = 1886'',6559$$

$$\tau w = 0'',181$$

$$\varphi = 19236''51$$

$$\tau\Omega = 0'',08$$

$$\begin{aligned} C = {} & (38431'',227 + 0'',39229\,t)\,\sin M \\ & + (2235'',381 + 0'',0456\,t)\,\sin 2M \\ & + (180'',279 + 0'',0055\,t)\,\sin 3M \\ & + (16'',614 + 0'',0007\,t)\,\sin 4M \\ & + 1''647\,\sin 5M + 0'',171\,\sin 6M + 0'',02\,\sin 7M \end{aligned}$$

$$C_{max} = 10^0\,41'\,51'',5$$

$d = 9'',35$	(Ann. 1893)		$Gr\ S = 247,6$
$D = 0,528$	(„)		$Kl\ S = 205,4$
$V = 0,147$	(„)		$Gr\ E = 396$
$Di = 3,91$	(„)		$Kl\ E = 57$
$G = 0,376$	(„)		$Gr\ D = 25'',6$
$U = 24^h\,37^m\,23^s$	(„)		$Kl\ D = 3'',5$
$a = 1,5236913$	(„)		$K\ D = 6745$
$S = 1^j\,321^d,729646$	(„)		$O\ K = 143$
$n = 1886'',5184$			$O\ S = 42\,330$
$T = 686,92972$			$O\ E = 0,28$
$Sy = 2^j\,48^d\,23_h$			$V\ K = 161$
			$V\ S = 8\,709\,000$
			$E\ M = 0,11$

Jupiter.

(Par. Ann., t. XII, p. 29 sq.)

Epoche 1800, Jan. 1,0 mittl. Pariser Zeit.

$$L = 160^0\ 1'\,10'',26 + \begin{cases} 109306'',87213\,t + 0'',00012138\,t^2 \\ 156^0\,18'\,7'',213\,j \end{cases}$$

$$\pi = 11^0\,54'\,58'',41 + \begin{cases} 57'',90321\,t + 0'',00036196\,t^2 \\ 1^0\,36'\,30'',321\,j \end{cases}$$

$$\Omega = 98^0\,56'\,17'',0 + \begin{cases} 36'',36617\,t + 0'',00013140\,t^2 \\ 1^0\,0'\,36'',617\,j \end{cases}$$

$$\varphi = 9952'',60 + 171'',883\,\frac{t}{500} - 2'',395\left(\frac{t}{500}\right)^2$$

$$e = 0,0482520 + 0,0000016678\,t$$

$$i = 1^0\,18'\,41'',37 - 0'',2052\,t + 0'',35\left(\frac{t}{500}\right)^2$$

$$\tau L = 0^0\,4'\,59'',2659$$

$$\tau\pi = 0'',159$$

$$\varphi = 9952''66$$

$$\tau\Omega = 0'',100$$

$$C_{max} = 5^0\,31'\,45'',32 + 0'',68752\,t$$

$d = 196'',00$	(Ann. 1893)	$Gr\ S = 810,6$
$D = 11,061$	(„)	$Kl\ S = 735,6$
$V = 1279,412$	(„)	$Gr\ E = 959$
$Di = 1,33$	(„)	$Kl\ E = 587$
$G = 2,261$	(„)	$Gr\ D = 50'',7$
$U = 9^h\,55^m\,37^s$	(„)	$Kl\ D = 30'',8$
$a = 5,202800$	(„)	$K\ D = 143\,757$
$n = 299,1284$	(„)	$O\ K = 61\,963$
$S = 11^j\,314^d,838171$		$O\ S = 97$
$T = 4330,5936$		$O\ E = 121,2$
$Sy = 1^j\,33^d\,15^h$		$V\ K = 1\,450\,430$
		$V\ S = 962$
		$E\ M = 308$

Saturn.

(Par. Ann. XII, p. 46 ssq.)

Epoche 1800, Jan. 1,0, mittl. Par. Zeit.

$$L = 14^\circ 52' 28'',30 + \begin{cases} 44046'',30321\,t + 0'',000116598\,t^2 \\ 143^\circ 30' 30'',321\,j \end{cases}$$

$$\pi = 90^\circ\ 6' 56'',7 + \begin{cases} 70'',41338\,t + 0'',00028008\,t^2 \\ 1^\circ 57' 21'',338\,j \end{cases}$$

$$\Omega = 112^\circ 20' 53'',0 + \begin{cases} 31'',39594\,t - 0'',00004796\,t^2 \\ 0^\circ 52' 19'',594\,j \end{cases}$$

$$e = 0{,}0560717 - 0{,}0000034276\,t$$

$$\varphi = 11565'',62 - 353'',20 \left(\frac{t}{500}\right) - 3'',485 \left(\frac{t}{500}\right)^2$$

$$i = 2^\circ 29' 39'',80 - 0'',14002\,t - 1'',41 \left(\frac{t}{500}\right)^2$$

$$\tau L = 0^\circ 2' 0'',5922$$

$$\tau \pi = 0'',192$$

$$\tau \Omega = 0'',086$$

$$C_{max} = 6^\circ 25' 31'',24 - 1'',41280\,t$$

$d = 164'',77$	(Ann. 1893)	$Gr\ S = 1497{,}3$
$D = 9{,}299$	(„)	$Kl\ S = 1338{,}3$
$V = 718{,}883$	(„)	$Gr\ E = 1646$
$Di = 0{,}70$		$Kl\ E = 1190$
$G = 0{,}892$	(„)	$Gr\ D = 20'',6$
$U = 10^h\,14^m\,24^s$	(„)	$Kl\ D = 14'',9$
$a = 9{,}538861$	(„)	$K\ D = 119\,075$
$n = 120'',4547$	(„)	$O\ K = 41\,296$
$S = 29^j\,166{,}986360$	(„)	$O\ S = 146$
$T = 10746{,}9487$		$O\ E = 80{,}8$
$Sy = 1^j\,12^d\,20^h$		$V\ K = 789\,120$
		$V\ S = 1769$
		$E\ M = 92$

Uranus.

(Par. Ann. XIV, p. 2 ssq.)

Epoche 1850,00, mittl. Par. Zeit.

$$L = 29^0\,17'\,50'',91 + \begin{cases} 15475'',11138\,t + 0'',000106864\,t^2 \\ 69^0\,51'\,51'',138\,j \end{cases}$$

$$\pi = 170^0\,50'\;\;7'',1 \;\; + \begin{cases} 53'',4582\,t - 0'',00008270\,t^2 \\ 1^0\,29'\,5'',82\,j \end{cases}$$

$$☊ = 73^0\,13'\,54'',4 \;\; + \begin{cases} 18'',0570\,t + 0'',0004276\,t^2 \\ 30^0\,5'',70\,j \end{cases}$$

$$i = 0^0\,46'\,19'',72 + 0'',01732\,t + 0'',00001412\,t^2$$

$$\varphi = 9558'',59 - 0'',05469\,t + 0'',00000164\,t^2$$

$$e = 0,0463592 + 0,0000027387\,t$$

$$C_{max} = 5^0\,19'\,26'',1 - 0,10938\,t$$

$$\tau L = 42'',36854$$

$$\tau \pi = 0'',14636$$

$$\tau ☊ = 0'',04944$$

$d = 75'',02$	(Ann. 1893)		$Gr\;S = 2983,5$
$D = 4,234$	(„)		$Kl\;S = 2719,1$
$V = 69,237$	(„)		$Gr\;E = 2132$
$Di = 1,07$	(„)		$Kl\;E = 2570$
$G = 0,754$	(„)		$Gr\;D = 4'',7$
$U = \ldots$	(„)		$Kl\;D = 3'',9$
$a = 19,18329$	(„)		$K\;D = 59\,171$
$n = 42'',2310$	(„)		$O\;K = 10\,407$
$S = 84^j\,7,39036$	(„)		$O\;S = 589$
$T = 30588,90$			$O\;E = 20,5$
$Sy = 1^j\,4^d\,7^h$			$V\;K = 99\,830$
			$V\;S = 14\,290$
			$E\;M = 15$

Neptun.

(Par. Ann. XIV, p. 42 ssq.)

Epoche 1850,00, mittl. Par. Zeit.

$$L = 334^{0}\,33'\,28'',89 + \begin{cases} 7915'',89825\,t + 0'',00011162\,t^{2} \\ 219^{0}\,53'\,9'',825\,j \end{cases}$$

$$\pi = 45^{0}\,59'\,43'',1 + \begin{cases} 51'',12675\,t + 0'',0001334\,t^{2} \\ 1^{0}\,25'\,12'',675\,j \end{cases}$$

$$\Omega = 130^{0}\;6'\,25'',1 + \begin{cases} 39'',56306\,t + 0'',0000835\,t^{2} \\ 1^{0}\,5'\,56'',306\,j \end{cases}$$

$$i = 1^{0}\,47'\,2'',13 - 0'',34570\,t + 0'',00000464\,t^{2}$$

$$\varphi = 1849'',09 + 0'',01170\,t$$

$$e = 0,00896425 + 0,00000005672\,t$$

$\tau L = 21'',67255$

$\tau\pi = 0'',13998$

$\tau\Omega = 0'',10834$

$d = 67'',29$	(Ann. 1893)	$Gr\ S = 4505,5$
$D = 3,798$	(„)	$Kl\ S = 4429,6$
$V = 54,955$	(„)	$Gr\ E = 4655$
$Di = 1,65$	(„)	$Kl\ E = 4281$
$G = 1,142$	(„)	$Gr\ D = 2'',7$
$U = \dots$	(„)	$Kl\ D = 2'',4$
$a = 30,05508$	(„)	$K\ D = 54\,979$
$n = 21'',5350$	(„)	$O\ K = 9493$
$S = 164^{j}\,280,11316$	(„)	$O\ S = 635$
$T = 59804,81$		$O\ E = 18,6$
$Sy = 1^{j}\,2^{d}\,6^{h}$		$V\ K = 87\,002$
		$V\ S = 16\,016$
		$E\ M = 16$

Elemente der Satelliten.

In den nachstehenden Tafeln ist die halbe grosse Axe a der Satellitenbahn stets ausgedrückt in Einheiten des halben äquatorealen Durchmessers des Planeten. Ebenso gilt für die Masse m

als Einheit die Planetenmasse. Alle Elemente beziehen sich auf die Ekliptik als Fundamentalebene. *E* giebt die mittlere Entfernung in geographischen Meilen.

Die nicht angegebenen Elemente sind so klein, dass sie sich der Beobachtung entziehen. Die Sterngrössen S^0 sind nach **Pickering** gegeben. Der Durchmesser *D* ist stets auf 50 geographische Meilen abgerundet.

Satelliten des Mars.

Name	Phobos	Deimos
Entdecker Datum	Asaph Hall 17. August 1877	Asaph Hall 11. August 1877
	Aequinoctium und mittlere Ekliptik 1878,0 Epoche 1877, August 28,0	
L	319° 41′,6	38° 18′,7
☊	82° 57′,6	85° 34′,4
ω	4° 13′,9	357° 58′,4
i	26° 17′,2	25° 47′,2
e	0,03208	0,00574
a	2,771	6,921
T	$7^h\,39^m\,15^s,1$	$1^d\,6^h\,17^m\,54^s,0$

Satelliten des Jupiters.

	I	II	III	IV	V
Entdecker Datum	Galilei 7. Jan. 1610	Marius 8. Jan. 1610	Galilei 7. Jan. 1610	Galilei 7. Jan. 1610	Barn[illegible] 9. Sep[illegible]
	Aequinoctium und mittlere Ekliptik 1850,0 Epoche 1850, Jan. 0,0				
L	146° 43′ 54″	14° 20′ 6″	37° 7′ 33″	164° 12′ 59″	. . .
☊	335° 45′ 0″	336° 55′ 16″	341° 30′ 23″	344° 56′ 46″	. . .
ω	. . . .	. . . .	235° 18′ 32″	266° 40′ 56″	. . .
i	2° 8′ 3″	1° 38′ 57″	1° 59′ 53″	1° 57′ 0″	. . .
e	. . . .	. . . .	0,001316	0,007243	. . .
a	5,933	9,439	15,057	26,486	. . .
T	$1^d\,18^h\,27^m\,33^s,51$	$3^d\,13^h\,13^m\,42^s,05$	$7^d\,3^h\,42^m\,33^s,39$	$16^d\,15^h\,32^m\,11^s,20$	$11^h\,57^m$[illegible]
m	0,000016877	0,000023227	0,000088437	0,000042475	. . .
E	56,000	90,000	143,000	252,000	[illegible]
D	500	450	750	650	[illegible]

Satelliten des Uranus.

Name	Ariel	Umbriel	Titania	Oberon
Entdecker	Lassel	Lassel	W. Herschel	W. Herschel
Datum	24. October 1851		11. Januar 1787	
	Aequinoctium und mittlere Ekliptik 1850,0 Epoche 1871, December 31,0			
L	153° 1′	275° 9′	20° 26′	308° 21′
☊	167° 20′	164° 6′	165° 32′	165° 17′
ω	196° 26′	158° 33′	93° 33′	149° 46′
i	97° 58′	98° 21′	97° 47′	97° 54′
e	0,020	0,010	0,00106	0,00383
a	7,72	10,76	17,65	23,60
T	$2^d 12^h 29^m 21^s,1$	$4^d 3^h 27^m 37^s,2$	$8^d 16^h 56^m 29^s,5$	$13^d 11^h 7^m 6^s,4$
E	28,000	38,000	63,000	84,000
S	16	17	14	14

Satellit des Neptuns.

Entdecker: Lassel, am 10. October 1846.
Epoche 1874, Januar 0,0, mittleres Aequinoctium 1874,0.

L	272° 4′	a	14,54
☊	184° 30′	T	$5^d 21^h 2^m 44^s,2$
ω	184°	E	47,000
i	145°	S	14
e	0,0088		

Elemente des Saturnringes.

Aequinoctium und Epoche 1880,0 (nach Bessel):

$$☊ = 167^\circ 55' \; 6''$$

$$i = 28^\circ 10' 17''.$$

Rotationsdauer (nach Herschel):

$$10^h 32^m 15^s.$$

Masse (nach Tisserand):

$$\frac{1}{620} \text{ der Saturnmasse.}$$

Halbmesser des Saturns ist $= 1$ gesetzt.

Aeusserer Halbmesser des äusseren Ringes . . 2,229
Innerer „ „ „ „ . . 1,962
Aeusserer „ „ inneren „ . . 1,916
Innerer „ „ „ „ . . 1,482

Satelliten des Saturns.

Name	Minas	Enceladus	Thetis	Dione
Entdecker	W. Herschel	W. Herschel	J. D. Cassini	J. D. Cassini
Datum	18. Juli 1789	29. Aug. 1789	21. März 1684	21. März 1684
Aequinoctium	1889,0	1889,0	1889,0	1889,0
Epoche	1889, März 31,0	1889, März 23,0	1889, März 17,0	1869, Sept. 1,0
L	84° 56′	256° 17′ 24″	138° 4′ 48″	56° 45′ 8″
☊	165°,0	167° 56′ 30″	166° 7′ 24″	167° 40′ 0″
ω	300°	122° 28′	. . . . . .	270° 50′
i	27° 36′	28° 7′ 0″	28° 40′ 12″	27° 58′ 36″
e	0,016	0,0047	. . . . . .	0,00396
a	3,10	3,98	4,93	6,31
T	$0^d\ 22^h\ 37^m\ 5^s$	$1^d\ 8^h\ 53^m\ 7^s$	$1^d\ 21^h\ 18^m\ 26^s$	$2^d\ 17^h\ 41^m\ 9^s$
m	0,00000009	0,00000025	0,00000130	0,00000189
E	25,000	32,000	40,000	51,000
S	13	12	11	12

Name	Rhea	Titan	Hyperion	Japetus
Entdecker	J. D. Cassini	Huygens	G. P. Bond	J. D. Cassini
Datum	23. Dec. 1672	25. März 1655	16. Sept. 1848	25. Octbr. 1671
Aequinoctium	1881,0	1881,0	1875,0	1874,0
Epoche	1881, Nvbr. 0,0	1881, Nov. 0,0	1875, Oct. 28,0	1874, Sept. 3,0
L	198° 21′ 39″	234° 10′ 34″	174° 30′,4	333° 14′,9
☊	168° 29′ 51″	168° 9′ 35″	168° 9′,9	142° 40′,1
ω	61° 22′ 53″	102° 31′ 11″	3° 42′,6	205° 20′,0
i	27° 54′ 27″	27° 38′ 49″	27° 4′,8	18° 31′,5
e	0,00364	0,029869	0,11885	0,02957
a	8,86	20,48	25,07	59,58
T	$4^d\ 12^h\ 25^m\ 11,6^s$	$15^d\ 22^h\ 41^m\ 23^s$	$21^d\ 6^h\ 39^m\ 37^s$	$79^d\ 7^h\ 54^m\ 17^s$
m	. . . .			0,00001000
E	70,000	164,000	199,0	467,000
S	11	9,5	14	12

Tafel der wichtigsten periodischen Kometen.

Name	Siderische Umlaufszeit	Epoche Periheldurchgang	Periheldistanz	Apheldistanz	Excentricität
Encke	3,303j	1891, Oct. 17. 23h 40m	0,340472	4,094892	0,8464737
Tempel . . .	5,211	1889, Febr. 2. 2 25	1,386604	4,665448	0,5521000
Brorsen . . .	5,456	1890, Febr. 24. 2 31	0,587759	5,610377	0,8103434
Tempel-Swift	5,534	1891, Nvbr. 14. 23 0	1,086604	5,170878	0,6527024
Winnecke . .	5,818	1892, Juni 30. 21 26	0,886422	5,583128	0,7259710
Tempel . . .	6,507	1885, Sept. 25. 17 37	2,073322	4,897332	0,4051283
Biela	6,587	1852, Sept. 23. 17 14	0,860161	6,167319	0,7552007
Biela	6,629	1852, Sept. 22. 22 51	0,860592	6,196874	0,7551187
D'Arrest . . .	6,691	1890, Sept. 17. 11 50	1,324042	5,777760	0,6271251
Wolf	6,821	1891, Sept. 3. 11 21	1,592851	5,600583	0,5571376
Faye	7,566	1881, Jan. 22. 16 7	1,738140	5,970090	0,5490171
Tuttle	13,760	1885, Sept. 11. 3 35	1,024728	10,459624	0,8215436
Pons-Brooks .	71,48	1884, Jan. 25. 19 3	0,77511	33,67129	0,9549960
Olbers	72,63	1887, Octbr. 8. 10 0	1,19961	33,61592	0,9310677
Halley	76,37	1835, Nvbr. 15. 0 15	0,58895	35,41121	0,9672807

Perihellänge	☊	i	Aequinoctium	Epoche der Osculation
158° 38′ 46″	334° 41′ 27″	12° 54′ 58″	1891,0	1891, Mai 31.
306 8 3	121 9 17	12 45 5	1890,0	1891, Febr. 10.
116 23 10	101 27 34	29 23 48	1890,0	1890, Febr. 24.
43 14 16	296 31 15	5 23 14	1891,0	1891, Novbr. 15.
276 11 9	104 4 59	14 31 32	1890,0	1892, Jan. 26.
241 21 50	72 24 9	10 50 27	1885,0	1885, Sept. 19.
109 5 20	245 49 34	12 33 28	1852,0	1852, Sept. 23.
108 58 17	245 58 29	12 33 50		1852, Sept. 23.
319 14 34	146 16 32	15 42 41	1890,0	1890, Febr. 25.
19 11 38	206 22 29	25 14 33	1891,0	1891, Juli 10.
50 48 47	209 35 25	11 19 40	1880,0	1881, Jan. 13.
116 28 59	269 42 1	55 14 23	1890,0	1885, Juli 11.
93 20 48	254 6 15	74 3 20	1880,0	1883, Sept. 30.
149 45 47	84 29 41	44 33 53	1887,0	1887, Octbr. 8,
165 48 48	55 10 15	162 15 7	1835,0	1835, Novbr. 15.

Periodische Sternschnuppen.

Elemente	Perseiden	Komet 1862 III	Thätig um
☊	138° 16′	137° 27′	9. bis 11. August
i	64° 3′	66° 20′	
π	343° 38′	344° 41′	
q	0,9643	0,9626	
Radiant α	44°	η Persei	
Radiant δ	+ 56°		

Elemente	Leoniden	Komet 1866 I	Thätig um
☊	231° 28′	231° 16′	13. bis 14. November
i	17° 44′	17° 18′	
π	56° 25′	60° 28′	
q	0,9873	0,9705	
Radiant α	149°	ζ Leonis	
Radiant δ	+ 23°		

Elemente	Andromeniden	Komet 1852 III	Thätig um
☊	246° 0′	246° 8′	27. November,
i	12° 0′	12° 33′	Reste des Biela'schen
π	110° 7′	109° 25′	Kometen
q	0,8472	0,8606	
Radiant α	25°	γ Andromedae	
Radiant δ	+ 43°		

§. 312.

Mondelemente.

(Hansen, Tables de la Lune.)

Epoche 1800,0, Januar 0^h mittlere Greenwicher Zeit.

$$L = 335^\circ 43' 26'',7 + \begin{cases} 13^\circ 10' 35'',0286\, \tau \\ 307^\circ 53' 39'',61\, j \end{cases} + \begin{cases} 12'',557\, t^2, & \text{Hansen.} \\ 8'',82\, t^2, & \text{Newcomb.} \end{cases}$$

$$\pi = 225^\circ 23' 53'',06 + \begin{cases} 6' 41'',056\, \tau \\ 109^\circ 3' 2'',46\, j \end{cases} - \begin{cases} 38'',577\, t^2, & \text{Hansen.} \\ 39'',499\, t^2, & \text{Delaunay.} \end{cases}$$

$$☊ = 33^\circ 16' 31'',15 - \begin{cases} 3' 10'',63\, \tau \\ 134^\circ 8' 59'',61\, j \end{cases} + \begin{cases} 6'',623\, t^2, & \text{Hansen.} \\ 6''\,778\, t^2, & \text{Delaunay.} \end{cases}$$

τ heisst die Bewegung an einem Tage,
t „ „ „ in einem julianischen Jahre,
j „ „ „ in 100 julianischen Jahren.

$e = 0{,}054899720$ } nach Harkness.
$i = 5^{\circ}\,8'\,43''{,}3546$ }

Mondparallaxe $= 57'\,2''{,}54216 \pm 0''{,}12533$.

Mittlere Monddistanz von der Erde:

60,269315 ± 0,002502 Erdradien

384396,01 ± 15,958 Kilometer.

Mondmasse: 1 : (81,068 ± 0,238).

Letztere Werthe sämmtlich nach Harkness.

Man unterscheidet:

1) den siderischen Monat = Zeit von einer Conjunction des Mondes mit einem Fixstern zur anderen:

$$27^d\,7^h\,43^m\,11^s{,}545 = 27^d{,}3216614;$$

2) den tropischen Monat = die Zeit von einer Conjunction des Mondes mit den Aequinoctialpunkten zur anderen:

$$27^d\,7^h\,43^m\,4^s{,}7 = 27{,}321582;$$

3) den anomalischen Monat = die Zeit von einer Erdnähe zur anderen:

$$27^d\,13^h\,18^m\,37^s{,}44 = 27^d{,}554600;$$

4) den Drachenmonat = die Zeit von einem Knoten zum anderen:

$$27^d\,5^h\,5^m\,35^s{,}81 = 27^d{,}212220;$$

5) den synodischen Monat = die Zeit von Neumond zu Neumond:

$$29^d\,12^h\,44^m\,2^s{,}684 = 29^d{,}5305884.$$

Mondungleichheiten (nach Airy):

Maximum der Mittelpunktsgleichung	$6^{\circ}\,17'\,19''{,}06$
„ „ Evection in Länge	$1^{\circ}\,16'\,27''{,}01$
„ „ „ „ Breite	$8'\,57''{,}37$
„ „ Variation in Länge	$39'\,30''{,}70$
„ „ „ „ Breite	$33''{,}44$
„ „ jährlichen Gleichung	$11'\,9''{,}00$
„ „ parallaktischen Gleichung . . .	$2'\,4''{,}70$

Scheinbare Monddurchmesser:

Mittel 31′ 8″,18

Maximum 33′ 33″,20

Minimum 29′ 23″,65.

Wahre Durchmesser = 3482 Kilometer.

Neigung des Mondäquators gegen die Ekliptik $\begin{cases} 1^\circ 32' \text{ (Wichmann)} \\ 1^\circ 36' \text{ (Hartwig).} \end{cases}$

Cyklusperioden. Sei J das julianische Jahr,
S der synodische Monat,
A „ anomalistische „
D „ draconische „

$$\left.\begin{aligned} 19\, J &= 6939^d,75 \\ 235\, S &= 6939^d,69 \\ 252\, A &= 6943^d,76 \end{aligned}\right\} \text{metonischer Cyklus}$$

$$\left.\begin{aligned} 251\, S &= 7412^d,18 \\ 269\, A &= 7412^d,19 \end{aligned}\right\} \text{anomalistischer Cyklus.}$$

Die von der Sonne abhängigen Störungen der Mondlänge.

(Die Coëfficienten nach Delaunay, die übrigen Werthe nach Harkness.)

Sei e_1 die Excentricität der Erdbahn:

$$e_1 = 0{,}016771049,$$

e die Excentricität der Mondbahn:

$$e = 0{,}054899720,$$

I die Neigung der Mondbahn und
$\gamma = \sin {}^1/_2 I$:

$$I = 5^\circ 8' 43'',3546$$

$$\gamma = 0{,}044886793,$$

l die mittlere Anomalie des Mondes,
g Abstand des aufsteigenden Mondknotens vom Mondperigaeum,
h die Knotenlänge des Mondes,
a halbe grosse Axe der Mondbahn = 60,31845,
$\frac{a}{a'} = 0{,}00255878$ für $a' = 1 = \frac{a}{a_1}$,
l' die mittlere Anomalie der Sonne,
g' die Länge des aufsteigenden Knotens,

die Länge des ☊-Knotens der beweglichen Ekliptik, bezogen auf die fixe Ekliptik der Anfangsepoche,

$$= \frac{27{,}321661}{365{,}25637} = \frac{\text{Dauer des siderischen Monats}}{\text{Dauer des siderischen Jahres}} = 0{,}07480133,$$

$$= h + g + l - h' + g' - l',$$

$$= g + l,$$

ist der mittlere Abstand zwischen Sonne und Mond,

ist der mittlere Abstand des Mondes vom aufsteigenden Knoten der Mondbahn.

Mondlänge.

$$=$$

$$+ \left\{ -\left(3 e_1 - \frac{27}{2}\gamma^2 e_1 + \frac{27}{8} e^2 e_1\right) m - \frac{2925}{32} e^2 e_1 m^2 + \frac{735}{16} e_1 m^3 \right.$$

776″,3 7″,0 2″,6 5″,3

$$+ \frac{456\,943}{512} e^2 e_1 m^3 + \frac{1261}{4} e_1 m^4 + \frac{142\,817}{96} e_1 m^5$$

3″,9 34″,1 12″,1

$$\left. + \frac{3\,257\,665}{376} e_1 m^6 \right\} \sin l_1$$

3″,4

(Jährliche Gleichung)

$$+ \left\{ \left(-\frac{3}{4}\gamma^2 + \frac{75}{16} e^2\right) m + \left(\frac{11}{8} + \frac{1101}{64} e^2 - \frac{47}{16}\gamma^2\right) m^2 \right.$$

23″,3 218″,0 1586″,9 59″,8 6″,8

$$\left. \left(+\frac{59}{12} + \frac{64\,271}{1024} e^2\right) m^3 + \frac{893}{72} m^4 + \frac{2855}{108} m^5 \right\} \sin 2D$$

424″,4 16″,3 80″,1 12″,8

(Variation)

$$+ \left\{ \left(\frac{15}{4} e - 6\gamma^2 e\right) m + \frac{263}{16} e m^2 + \frac{48\,217}{768} e m^3 + \frac{1\,880\,537}{9216} e m^4 \right.$$

3176″,4 10″,2 1041″,5 297″,5 72″,3

$$\left. + \frac{130\,463\,405}{221\,184} e m^5 \right\} \sin(2D - l)$$

15″,6

(Evection)

$$\left\{-\frac{15}{8}m-\frac{93}{8}m^2-\frac{6887}{128}m^3-\frac{137\,197}{512}m^4\right\}\frac{a}{a_1}\sin D$$

74″,0 34″,3 11″,9 4″,4

(Parallaktische Gleichung)

$$\left\{2e-\frac{1}{4}e^3+\frac{5}{96}e^5\right\}\sin l+\left\{\frac{5}{4}e^2-\frac{2595}{256}e^2m^3\right\}\sin 2l$$

22639″,1 777″,0 2″,6

$$\left\{+\frac{13}{12}e^3\right\}\sin 3l+\left\{\frac{103}{96}e^4\right\}\sin 4l$$

37″,0 2″,0

(Mittelpunktsgleichung)

Der Coëfficient der parallaktischen Ungleichheit.

(Lapl. Méc. Cél., t. III, p. 251.)

In Länge:

$$-\frac{19}{2}i\cdot\frac{A-{}^1/_2\,C}{g-1}\frac{D^2}{a^2}\sin\varepsilon\cos\varepsilon;$$

dabei ist:

A die Abplattung des Erdkörpers,
$C = 0{,}0034672$ die Constante der Centrifugalkraft,
$D =$ Aequatorradius,
$a =$ der halben Axe der Mondbahn,
$\varepsilon =$ Schiefe der Ekliptik.

Vergl. Helmert, Höhere Geodäsie II, S. 468.

§. 313.

Tafel einiger Constanten.

(Nach Harkness, On the Solar parallax. Washington 1891.)

Aequatorialhalbmesser der Erde: $a = 6\,377\,972 \pm 124{,}8\,m$.
Polarhalbmesser " " $b = 6\,356\,727 \pm 99{,}1\,m$.
Erdquadrant . . . . $10\,001\,816 \pm 125{,}1\,m$,
Abplattung . . . . $\frac{a-b}{a} = \frac{1}{300{,}205 \pm 2{,}964}$,
Excentricität . . . . . . $\frac{a^2-b^2}{a^2} = 0{,}006651018$,

Mittlere Erddichte . . . . $= 5{,}576 \pm 0{,}016$,
„ Oberflächendichte . $= 2{,}56 \pm 0{,}16$.

Trägheitsmomente der Erde:

$$\frac{C - A}{C} = 0{,}00326521$$
$$C - A = 0{,}001064767\, E a^2$$
$$A = B = 0{,}325029\, E a^2$$
$$C = 0{,}326094\, E a^2.$$

E ist hierbei die Masse der Erde.

Länge des Secundenpendels:

$$l = (0{,}990910 + 0{,}005290\, sin^2 \varphi)\, m.$$

Gravitation:

$$g = (9{,}779886 + 0{,}052210\, sin^2 \varphi)\, m.$$

Sonnenparallaxe:

$$p = 8'',80905 \pm 0'',00567,$$

lamit die mittlere Distanz der Erde von der Sonne:

$$149\,340\,870 \pm 96\,171 \text{ km}.$$

Aberrationsconstante:

$$\alpha = 20'',45451 \pm 0'',01258.$$

Lichtgleichung:

$$= 498^s,00595 \pm 0^s,30834.$$

Lichtgeschwindigkeit:

$$= 299877{,}64 \pm 80{,}019 \text{ km}/s$$

Gauss'sche Constante:

$$k = 0{,}01720209895$$
$$log\, k = 8{,}2355814414 - 10$$
$$log\, k'' = log\, \frac{k}{sin\, 1''} = 3{,}5500065746.$$

I. Tafel der Schiefe der Ekliptik.

Jahr	E	Jahr	E
1700	23° 28′ 43,18″	1860	23° 27′ 27,07″
1710	38,43	1870	22,31
1720	33,67	1880	17,55
1730	28,92	1890	12,79
1740	24,16	1900	8,03
1750	19,41	1910	3,27
1760	14,65	1920	26′ 58,51
1770	9,90	1930	53,75
1780	5,14	1940	48,99
1790	0,38	1950	44,23
1800	27′ 55,62	1960	39,46
1810	50,87	1970	34,70
1820	46,11	1980	29,94
1830	41,35	1990	25,18
1840	36,59	2000	20,42
1850	81,83		

Tafel II.

Abnahme für	
1 Jahr	— 0,48″
2 Jahre	— 0,95
3 „	— 1.43
4 „	— 1,90
5 „	— 2.38
6 „	— 2.86
7 „	— 3,33
8 „	— 3,81
9 „	— 4,28
10 „	— 4,76

III. Tafel der Mittelpunktsgleichung.

Mittlere Anomalie = M, Mittelpunktsgleichung = C.

(Siehe Sonnenelemente.)

M	M	C	M	M	C
0°	360°	0° 0′ 0,0″	100°	260°	1° 53′ 7,5″
10	350	0 20 26,7	110	250	1 47 34,0
20	340	0 40 13,7	120	240	1 38 48,6
30	330	0 58 43,0	130	230	1 27 8,9
40	320	1 15 19,3	140	220	1 12 56,5
50	810	1 29 31,7	150	200	0 56 37,4
60	300	1 90 45,2	160	190	0 38 40,5
70	290	1 49 7,1	170	180	0 19 37,1
80	280	1 53 57,1	180	170	0 0 0,0
90	270	1 55 17,3			

IV. Tafel für $\varDelta L$ und $\varDelta \pi$ mit dem Argument: Tag.

(L und π, siehe Sonnenelemente.)

Tag	$\varDelta L$	$\varDelta \pi$	Stunde	$\varDelta L$	$\varDelta \pi$
1	0° 59′ 8,33″	0,2″	1	2′ 27,85″	0,0″
2	1 58 16,66	0,3	2	4 55,69	0,0
3	2 57 24,99	0,5	3	7 23,54	0,0
4	3 56 33,32	0,7	4	9 51,39	0,0
5	4 55 41,65	0,8	5	12 19,24	0,0
6	5 54 49,98	1,0	6	14 47,08	0,0
7	6 53 58,31	1,2	7	17 14,93	0,0
8	7 53 6,64	1,4	8	19 42,78	0,1
9	8 52 14,97	1,5	9	22 10,62	0,1
10	9 51 23,30	1,7	10	24 38,47	0,1
20	19 42 46,61	3,4	11	27 6,32	0,1
30	29 34 9,91	5,1	12	29 34,17	0,1
40	39 25 33,22	6,8	13	32 2,01	0,1
50	49 16 56,52	8,5	14	34 29,86	0,1
60	59 8 19,82	10,1	15	36 57,71	0,1
70	68 59 43,13	11,8	16	39 25,55	0,1
80	78 51 6,43	13,5	17	41 53,40	0,1
90	88 42 29,74	15,2	18	44 21,25	0,1
100	98 33 53,04	16,9	19	46 49,09	0,1
200	197 7 46,08	33,8	20	49 16,94	0,1
300	295 41 39,12	50,7	21	51 44,79	0,1
			22	54 12,64	0,2
			23	56 40,48	0,2
			24	59 8,33	0,2

	Minute	Secunde
	$\varDelta L$	$\varDelta L$
1	2,46″	0,04″
2	4,93	0,08
3	7,39	0,12
4	9,86	0,16
5	12,32	0,21
6	14,78	0,25
7	17,25	0,29
8	19,71	0,33
9	22,18	0,37
10	24,64	0,41
20	49,28	0,82
30	1′ 13,92	1,23
40	1 38,56	1,64
50	2 3,21	2,05

	$\varDelta L$	$\varDelta \pi$
365 Tage	359° 45′ 40,5958″	1′ 1,657″
366 „	0 44 48,9292	1 1,826
4 Jahre	0 1 50,7136	4 6,798
20 „	0 9 13,5680	20 33,990

	L	π
1801	280° 38′ 54,35″	279° 30′ 58,3″
1811	280 13 56,97	279 41 15,2
1822	280 48 7,92	279 51 32,3
1831	280 23 10,54	280 1 49,2
1841	280 57 21,49	280 12 6,2
1851	280 32 24,11	280 22 23,2
1861	281 6 35,05	280 32 40,2
1871	280 41 37,67	280 42 57,1
1881	281 15 48,62	280 53 14,2
1891	280 50 51,24	281 3 31,1
1900	280 40 13,26	281 12 46,9

V. Tafel für Reduction des tropischen Jahresanfange auf den bürgerlichen Jahresanfang.

Anfang des tropischen Jahres $+ A =$ Anfang des gemeinen Jahres.

(Die Tafel giebt in Theilen des Tages jene Zeit, die verflossen ist seit der Anfange des tropischen Jahres bis zum Anfange des bürgerlichen.)

Jahr	A	Jahr	A	Jahr	A	Jahr	A
1750	+ 0,010d	1788 *	+ 0,806d	1826	− 0,399d	1864 *	+ 0,397
51	− 0,232	89	+ 0,563	27	− 0,641	65	+ 0,115
52 *	+ 0,526	1790	+ 0,321	28 *	+ 0,117	66	− 0,087
53	+ 0,283	91	+ 0,079	29	− 0,125	67	− 0,330
54	+ 0,041	92 *	+ 0,837	1830	− 0,368	68 *	+ 0,428
55	− 0,201	93	+ 0,597	31	− 0,610	69	+ 0,186
56 *	+ 0,557	94	+ 0,352	32 *	+ 0,148	1870	− 0,056
57	+ 0,314	95	+ 0,110	33	− 0,094	71	− 0,296
58	+ 0,072	96 *	+ 0,868	34	− 0,337	72 *	+ 0,459
59	− 0,170	97	+ 0,626	35	− 0,579	73	+ 0,217
1760 *	+ 0,588	98	+ 0,383	36 *	+ 0,179	74	− 0,025
61	+ 0,346	99	+ 0,141	37	− 0,063	75	− 0,267
62	+ 0,103	1800 *	− 0,101	38	− 0,305	76 *	+ 0,490
63	− 0,139	1	− 0,343	39	− 0,548	77	+ 0,248
64 *	+ 0,619	2	− 0,586	1840 *	+ 0,210	78	+ 0,006
65	+ 0,377	3	− 0,828	41	− 0,032	79	− 0,236
66	+ 0,134	4 *	− 0,070	42	− 0,274	1880 *	+ 0,522
67	− 0,108	5	− 0,312	43	− 0,516	81	+ 0,279
68 *	+ 0,650	6	− 0,554	44 *	+ 0,241	82	+ 0,037
69	+ 0,408	7	− 0,797	45	− 0,001	83	− 0,205
1770	+ 0,166	8 *	− 0,039	46	− 0,243	84 *	+ 0,555
71	− 0,077	9	− 0,281	47	− 0,485	85	+ 0,311
72 *	+ 0,681	1810	− 0,523	48 *	+ 0,273	86	+ 0,068
73	+ 0,439	11	− 0,765	49	+ 0,030	87	− 0,174
74	+ 0,197	12 *	− 0,008	1850	− 0,212	88 *	+ 0,584
75	− 0,046	13	− 0,250	51	− 0,454	89	+ 0,342
76 *	+ 0,712	14	− 0,492	52 *	+ 0,304	1890	+ 0,099
77	+ 0,470	15	− 0,734	53	+ 0,061	91	− 0,143
78	+ 0,228	16 *	+ 0,023	54	− 0,181	92 *	+ 0,615
79	− 0,014	17	− 0,219	55	− 0,423	93	+ 0,373
1780 *	+ 0,743	18	− 0,461	56 *	+ 0,335	94	+ 0,131
81	+ 0,501	19	− 0,703	57	+ 0,093	95	− 0,112
82	+ 0,259	1820 *	+ 0,055	58	− 0,150	96 *	+ 0,646
83	+ 0,017	21	− 0,188	59	− 0,392	97	+ 0,404
84 *	+ 0,777	22	− 0,430	1860 *	+ 0,366	98	+ 0,162
85	+ 0,532	23	− 0,672	61	+ 0,124	99	− 0,080
86	+ 0,290	24 *	+ 0,086	62	− 0,119	1900	− 0,323
87	+ 0,048	25	− 0,157	63	− 0,361		

VI. Tafel der Argumente A, A', ϑ.

Siehe Auf- und Untergang der Gestirne.

t	A	A'	ϑ
+ 1700	179° 21′ 38,4″	180° 38′ 20,8″	0° 38′ 26,4″
1600	178 43 16,4	181 16 39,2	1 6 53,6
1500	178 4 53,5	181 54 53,7	1 40 21,2
1400	177 26 29,2	182 33 4,4	2 13 49,0
1300	176 48 3,4	183 11 11,2	2 47 16,8
+ 1200	176 9 35,8	183 49 14,3	3 20 44,3
1100	175 31 6,5	184 27 13,8	3 54 11,3
1000	174 52 35,2	185 5 10,0	4 27 37,6
900	174 14 1,9	185 43 2,7	5 1 2,9
800	173 35 26,6	186 20 52,1	5 34 26,8
+ 700	172 56 49,0	186 58 38,4	6 7 49,3
600	172 18 9,0	187 36 21,7	6 41 10,0
500	171 39 26,5	188 14 2,0	7 14 28,7
400	171 0 41,5	188 51 39,5	7 47 45,0
300	170 21 53,9	189 29 14,3	8 20 58,8
+ 200	169 43 3,3	190 6 46,5	8 54 9,8
+ 100	169 4 9,9	190 44 16,2	9 27 17,8
0	168 25 13,4	191 21 43,4	10 0 22,5
— 100	167 46 13,9	191 59 8,4	10 33 23,6
— 200	167 7 11,4	192 36 31,1	11 6 20,9
— 300	166 28 4,9	193 13 51,7	11 39 14,0
— 400	165 48 55,2	193 51 10,4	12 12 2,8
— 500	165 9 41,9	194 28 27,2	12 44 46,9
— 600	164 30 25,0	195 5 42,2	13 17 26,2
— 700	163 51 4,3	195 42 55,5	13 50 0,3
— 800	163 11 39,6	196 20 7,2	14 22 29,0
— 900	162 32 11,0	196 57 17,4	14 54 52,0
— 1000	161 52 38,2	197 34 26,3	15 27 9,0
— 1100	161 13 1,2	198 11 33,9	15 59 19,8
— 1200	160 33 19,9	198 48 40,3	16 31 24,0
— 1300	159 53 34,1	199 25 45,6	17 3 21,5
— 1400	159 13 43,8	200 2 49,9	17 35 11,9
— 1500	158 33 48,9	200 39 53,3	18 6 55,0
— 1600	157 53 49,2	201 16 56,0	18 38 30,5
— 1700	157 13 44,7	201 53 58,0	19 9 58,1
— 1800	156 33 35,3	202 30 59,3	19 41 17,5
— 1900	155 53 20,8	203 8 0,1	20 12 28,4
— 2000	155 13 1,2	203 45 0,5	20 43 30,6

VII. Tafel für die geocentrische Breitedifferenz $\varphi - \varphi'$

Argument geographische Breite.

φ	$\varphi - \varphi'$	φ	$\varphi - \varphi'$	φ	$\varphi - \varphi'$
1°	0′ 24″	31°	10′ 9″	61°	9′ 47″
2	0 48	32	20	62	34
3	1 12	33	30	63	20
4	1 36	34	40	64	5
5	2 0	35	48	65	8 50
6	2 23	36	10 56	66	8 34
7	2 47	37	11 3	67	18
8	3 10	38	10	68	1
9	33	39	15	69	7 43
10	55	40	20	70	25
11	4 18	41	11 24	71	7 6
12	4 40	42	27	72	6 47
13	5 2	43	29	73	6 27
14	23	44	30	74	6 7
15	44	45	31	75	5 46
16	6 5	46	11 30	76	5 25
17	25	47	11 29	77	5 4
18	45	48	11 27	78	4 42
19	7 4	49	11 24	79	4 20
20	23	50	11 21	80	3 57
21	7 41	51	11 16	81	3 34
22	7 59	52	11 11	82	3 11
23	8 16	53	11 5	83	2 48
24	32	54	10 58	84	2 24
25	48	55	10 40	85	2 0
26	9 3	56	10 41	86	1 36
27	18	57	32	87	1 12
28	32	58	22	88	0 48
29	45	59	11	89	0 24
30	9 57	60	9 59	90	0 0

VIII. Tafel für den Radiusvector des Beobachtungsortes.

(Die Tafel giebt mit dem Argument der geographischen Breite den *log* ϱ.)

φ	*log* ϱ	φ	*log* ϱ	φ	*log* ϱ
1°	0,00000	31°	9,99962	61°	9,99891
2	0,00000	32	60	62	89
3	0,00000	33	58	63	87
4	0,00000	34	55	64	85
5	9,99999	35	53	65	83
6	9,99998	36	9,99951	66	9,99881
7	8	37	48	67	79
8	7	38	46	68	77
9	6	39	43	69	76
10	6	40	41	70	74
11	9,99995	41	9,99938	71	9,99872
12	4	42	36	72	71
13	3	43	34	73	70
14	2	44	31	74	68
15	0	45	29	75	67
16	9,99989	46	9,99926	76	9,99866
17	88	47	24	77	65
18	86	48	21	78	64
19	85	49	19	79	63
20	83	50	16	80	62
21	9,99981	51	9,99914	81	9,99861
22	80	52	11	82	60
23	78	53	09	83	59
24	76	54	07	84	59
25	74	55	04	85	58
26	9,99972	56	9,99902	86	9,99858
27	70	57	9,99900	87	58
28	68	58	9,99897	88	58
29	66	59	95	89	58
30	64	60	93	90	58

IX. Tafel zur Verwandlung der Zeit in Bogen.

h	°	m	°	'	m	°	'	s	'	"	s	'	"	s	"
1	15	1	0	15	31	7	45	1	0	15	31	7	45	0,1	1.5
2	30	2	0	30	32	8	0	2	0	30	32	8	0	0,2	3.0
3	45	3	0	45	33	8	15	3	0	45	33	8	15	0,3	4.5
4	60	4	1	0	34	8	30	4	1	0	34	8	30	0,4	6,0
5	75	5	1	15	35	8	45	5	1	15	35	8	45	0,5	7.5
6	90	6	1	30	36	9	0	6	1	30	36	9	0	0,6	9.0
7	105	7	1	45	37	9	15	7	1	45	37	9	15	0,7	10.5
8	120	8	2	0	38	9	30	8	2	0	38	9	30	0,8	12,0
9	135	9	2	15	39	9	45	9	2	15	39	9	45	0,9	13,5
10	150	10	2	30	40	10	0	10	2	30	40	10	0		
11	165	11	2	45	41	10	15	11	2	45	41	10	15	0,01	0,15
12	180	12	3	0	42	10	30	12	3	0	42	10	30	0,02	0,30
13	195	13	3	15	43	10	45	13	3	15	43	10	45	0,03	0,45
14	210	14	3	30	44	11	0	14	3	30	44	11	0	0,04	0,60
15	225	15	3	45	45	11	15	15	3	45	45	11	15	0,05	0,75
16	240	16	4	0	46	11	30	16	4	0	46	11	30	0,06	0,90
17	255	17	4	15	47	11	45	17	4	15	47	11	45	0,07	1,05
18	270	18	4	30	48	12	0	18	4	30	48	12	0	0,08	1,20
19	285	19	4	45	49	12	15	19	4	45	49	12	15	0,09	1,35
20	300	20	5	0	50	12	30	20	5	0	50	12	30		
21	315	21	5	15	51	12	45	21	5	15	51	12	45		
22	330	22	5	30	52	13	0	22	5	30	52	13	0		
23	345	23	5	45	53	13	15	23	5	45	53	13	15		
24	360	24	6	0	54	13	30	24	6	0	54	13	30		
		25	6	15	55	13	45	25	6	15	55	13	45		
		26	6	30	56	14	0	26	6	30	56	14	0		
		27	6	45	57	14	15	27	6	45	57	14	15		
		28	7	0	58	14	30	28	7	0	58	14	30		
		29	7	15	59	14	45	29	7	15	59	14	45		
		30	7	30	60	15	0	30	7	30	60	15	0		

X. Tafel zur Verwandlung des Bogens in die Zeit.

°	Zeit	′	Zeit	′	Zeit	″	Zeit	″	Zeit	″	Zeit
	h m		*m s*		*m s*		*s*		*s*		*s*
1	0 4	1	0 4	31	2 4	1	0,07	31	2,07	0,1	0,01
2	0 8	2	0 8	32	2 8	2	0,13	32	2,13	0,2	0,01
3	0 12	3	0 12	33	2 12	3	0,20	33	2,20	0,3	0,02
4	0 16	4	0 16	34	2 16	4	0,27	34	2,27	0,4	0,03
5	0 20	5	0 20	35	2 20	5	0,33	35	2,33	0,5	0,03
6	0 24	6	0 24	36	2 24	6	0,40	36	2,40	0,6	0,04
7	0 28	7	0 28	37	2 28	7	0,47	37	2,47	0,7	0,05
8	0 32	8	0 32	38	2 32	8	0,53	38	2,53	0,8	0,05
9	0 36	9	0 36	39	2 36	9	0,60	39	2,60	0,9	0,06
0	0 40	10	0 40	40	2 40	10	0,67	40	2,67	1,0	0,07
0	1 20	11	0 44	41	2 44	11	0,73	41	2,73		
0	2 0	12	0 48	42	2 48	12	0,80	42	2,80		
0	2 40	13	0 52	43	2 52	13	0,87	43	2,87		
0	3 20	14	0 56	44	2 56	14	0,93	44	2,93		
0	4 0	15	1 0	45	3 0	15	1,00	45	3,00		
0	4 40	16	1 4	46	3 4	16	1,07	46	3,07		
0	5 20	17	1 8	47	3 8	17	1,03	47	3,13		
0	6 0	18	1 12	48	3 12	18	1,20	48	3,20		
0	6 40	19	1 16	49	3 16	19	1,27	49	3,27		
0	13 20	20	1 20	50	3 20	20	1,33	50	3,33		
0	20 0	21	1 24	51	3 24	21	1,40	51	3,40		
		22	1 28	52	3 28	22	1,47	52	3,47		
		23	1 32	53	3 32	23	1,53	53	3,53		
		24	1 36	54	3 36	24	1,60	54	3,60		
		25	1 40	55	3 40	25	1,67	55	3,67		
		26	1 44	56	3 44	26	1,73	56	3,73		
		27	1 48	57	3 48	27	1,80	57	3,80		
		28	1 52	58	3 52	28	1,87	58	3,87		
		29	1 56	59	3 56	29	1,93	59	3,93		
		30	2 0	60	4 0	30	2,00	60	4,00		

XI. Tafel zur Verwandlung der mittleren Zeit in Sternzeit.

Reduct. +	Mittl. Z.	Reduct. +	Mittl. Z.	Reduct. +	Mittl. Z.	Reduct. +	Mittl. Z
0^m 0^s	0^h 0^m 0^s	$0{,}1^s$	0^m 0^s	$4{,}0^s$	24^m 21^s	$8{,}0^s$	48^m 42^s
10	1 0 52	0,2	0 37	4,1	24 58	8,1	49 19
20	2 1 45	0,3	1 13	4,2	25 34	8,2	49 55
30	3 2 37	0,4	1 50	4,3	26 11	8,3	50 32
40	4 3 30	0,5	2 26	4,4	26 47	8,4	51 8
50	5 4 22	0,6	3 3	4,5	27 24	8,5	51 45
		0,7	3 39	4,6	28 0	8,6	52 21
		0,8	4 16	4,7	28 37	8,7	52 58
		0,9	4 52	4,8	29 13	8,8	53 34
			5 29	4,9	29 50	8,9	54 11
1 0	6 5 15	1,0	6 5	5,0	30 26	9,0	54 47
10	7 6 7	1,1	6 42	5,1	31 3	9,1	55 24
20	8 6 59	1,2	7 18	5,2	31 39	9,2	56 0
30	9 7 52	1,3	7 55	5,3	32 16	9,3	56 37
40	10 8 44	1,4	8 31	5,4	32 52	9,4	57 13
50	11 9 37	1,5	9 8	5,5	33 29	9,5	57 50
		1,6	9 44	5,6	34 5	9,6	58 26
		1,7	10 21	5,7	34 42	9,7	59 3
		1,8	10 57	5,8	35 18	9,8	59 39
		1,9	11 34	5,9	35 55	9,9	60 16
2 0	12 10 29	2,0	12 10	6,0	36 31		
10	13 11 21	2,1	12 47	6,1	37 8		
20	14 12 14	2,2	13 23	6,2	37 44		
30	15 13 6	2,3	14 0	6,3	38 21		
40	16 13 59	2,4	14 36	6,4	38 57		
50	17 14 51	2,5	15 13	6,5	39 34		
		2,6	15 49	6,6	40 10		
		2,7	16 26	6,7	40 47		
		2,8	17 2	6,8	41 23		
		2,9	17 39	6,9	42 0		
3 0	18 15 44	3,0	18 16	7,0	42 37	$0{,}01^s$	0^m [illegible]
10	19 16 36	3,1	18 53	7,1	43 14	2	0 [illegible]
20	20 17 28	3,2	19 29	7,2	43 50	3	0 [illegible]
30	21 18 21	3,3	20 6	7,3	44 27	4	0 [illegible]
40	22 19 13	3,4	20 42	7,4	45 3	5	0 [illegible]
50	23 20 6	3,5	21 19	7,5	45 40	6	0 [illegible]
		3,6	21 55	7,6	46 16	7	0 [illegible]
		3,7	22 32	7,7	46 53	8	0 [illegible]
		3,8	23 8	7,8	47 29	9	0 [illegible]
		3,9	23 45	7,9	48 6		0 [illegible]

XII. Tafel zur Verwandlung der Sternzeit in mittlere Zeit.

Reduct. —	Sternzeit	Reduct. —	Sternzeit	Reduct. —	Sternzeit	Reduct. —	Sternzeit
0^m 0^s	0^h 0^m 0^s	$0,0^s$	0^m 0^s	$4,0^s$	24^m 25^s	$8,0^s$	48^m 50^s
10	1 1 2	0,1	0 37	4,1	25 2	8,1	49 27
20	2 2 5	0,2	1 13	4,2	25 38	8,2	50 3
30	3 3 7	0,3	1 50	4,3	26 15	8,3	50 40
40	4 4 10	0,4	2 26	4,4	26 51	8,4	51 16
50	5 5 12	0,5	3 3	4,5	27 28	8,5	51 53
		0,6	3 40	4,6	28 5	8,6	52 30
		0,7	4 16	4,7	28 41	8,7	53 6
		0,8	4 53	4,8	29 18	8,8	53 43
		0,9	5 30	4,9	29 55	8,9	54 20
1 0	6 6 15	1,0	6 6	5,0	30 31	9,0	54 56
10	7 7 17	1,1	6 43	5,1	31 8	9,1	55 33
20	8 8 19	1,2	7 19	5,2	31 44	9,2	56 9
30	9 9 22	1,3	7 56	5,3	32 21	9,3	56 46
40	10 10 24	1,4	8 32	5,4	32 57	9,4	57 22
50	11 11 27	1,5	9 9	5,5	33 34	9,5	57 59
		1,6	9 46	5,6	34 11	9,6	58 36
		1,7	10 22	5,7	34 47	9,7	59 12
		1,8	10 59	5,8	35 24	9,8	59 49
		1,9	11 36	5,9	36 1	9,9	60 26
2 0	12 12 29	2,0	12 12	6,0	36 37		
10	13 13 31	2,1	12 49	6,1	37 14		
20	14 14 34	2,2	13 25	6,2	37 50		
30	15 15 36	2,3	14 2	6,3	38 27		
40	16 16 39	2,4	14 38	6,4	39 3		
50	17 17 41	2,5	15 15	6,5	39 40		
		2,6	15 52	6,6	40 17		
		2,7	16 28	6,7	40 53		
		2,8	17 5	6,8	41 30		
		2,9	17 42	6,9	42 7		
3 0	18 18 44	3,0	18 19	7,0	42 44	0,01	0^m 4^s
10	19 19 46	3,1	18 56	7,1	43 21	0,02	7
20	20 20 48	3,2	19 32	7,2	43 57	0,03	11
30	21 21 51	3,3	20 9	7,3	44 34	0,04	15
40	22 22 53	3,4	20 45	7,4	45 10	0,05	18
50	23 23 56	3,5	21 22	7,5	45 47	0,06	22
60	24 24 58	3,6	21 59	7,6	46 24	0,07	26
		3,7	22 35	7,7	47 0	0,08	29
		3,8	23 12	7,8	47 37	0,09	33
		3,9	23 49	7,9	48 14	0,10	37

XIII. Tafel zur Verwandlung der Tage in Theile des Jahres.

Monatstag	Tag	Januar	Tag	Februar	Tag	März	Tag	April	Tag	Mai	Tag	Juni
1	0	·0000	31	·0849	60	·1643	91	·2492	121	·3313	152	·4162
2	1	·0027	32	·0876	61	·1670	92	·2519	122	·3340	153	·4189
3	2	·0055	33	·0904	62	·1698	93	·2546	123	·3368	154	·4216
4	3	·0082	34	·0931	63	·1725	94	·2574	124	·3395	155	·4244
5	4	·0110	35	·0958	64	·1752	95	·2601	125	·3422	156	·4271
6	5	·0137	36	·0986	65	·1780	96	·2628	126	·3450	157	·4299
7	6	·0164	37	·1013	66	·1807	97	·2656	127	·3477	158	·4326
8	7	·0192	38	·1040	67	·1834	98	·2683	128	·3504	159	·4353
9	8	·0219	39	·1068	68	·1862	99	·2711	129	·3532	160	·4381
10	9	·0246	40	·1095	69	·1889	100	·2738	130	·3559	161	·4408
11	10	·0274	41	·1123	70	·1917	101	·2765	131	·3587	162	·4435
12	11	·0301	42	·1150	71	·1944	102	·2793	132	·3614	163	·4463
13	12	·0329	43	·1177	72	·1971	103	·2820	133	·3641	164	·4490
14	13	·0356	44	·1205	73	·1999	104	·2847	134	·3669	165	·4518
15	14	·0383	45	·1232	74	·2026	105	·2875	135	·3696	166	·4545
16	15	·0411	46	·1259	75	·2053	106	·2902	136	·3724	167	·4572
17	16	·0438	47	·1287	76	·2081	107	·2930	137	·3751	168	·4600
18	17	·0465	48	·1314	77	·2108	108	·2957	138	·3778	169	·4627
19	18	·0493	49	·1342	78	·2136	109	·2984	139	·3806	170	·4654
20	19	·0520	50	·1369	79	·2163	110	·3012	140	·3833	171	·4682
21	20	·0548	51	·1396	80	·2190	111	·3039	141	·3860	172	·4709
22	21	·0575	52	·1424	81	·2218	112	·3066	142	·3888	173	·4737
23	22	·0602	53	·1451	82	·2245	113	·3094	143	·3915	174	·4764
24	23	·0630	54	·1478	83	·2272	114	·3121	144	·3943	175	·4791
25	24	·0657	55	·1506	84	·2300	115	·3149	145	·3970	176	·4819
26	25	·0684	56	·1533	85	·2327	116	·3176	146	·3997	177	·4846
27	26	·0712	57	·1561	86	·2355	117	·3203	147	·4025	178	·4873
28	27	·0739	58	·1588	87	·2382	118	·3231	148	·4052	179	·4901
29	28	·0767	59	·1615	88	·2409	119	·3258	149	·4079	180	·4928
30	29	·0794			89	·2437	120	·3285	150	·4107	181	·4956
31	30	·0821			90	·2464			151	·4134		

XIV. Tafel zur Verwandlung der Tage in Theile des Jahres.

Monatstag	Tag	Juli	Tag	August	Tag	September	Tag	October	Tag	November	Tag	December
1	182	·4983	213	·5832	244	·6681	274	·7502	305	·8351	335	·9172
2	183	·5010	214	·5859	245	·6708	275	·7529	306	·8378	336	·9199
3	184	·5038	215	·5887	246	·6735	276	·7557	307	·8405	337	·9227
4	185	·5065	216	·5914	247	·6763	277	·7584	308	·8433	338	·9254
5	186	·5093	217	·5941	248	·6790	278	·7611	309	·8460	339	·9282
6	187	·5120	218	·5969	249	·6817	279	·7639	310	·8488	340	·9309
7	188	·5147	219	·5996	250	·6845	280	·7666	311	·8515	341	·9336
8	189	·5175	220	·6023	251	·6872	281	·7694	312	·8542	342	·9364
9	190	·5202	221	·6051	252	·6900	282	·7721	313	·8570	343	·9391
10	191	·5229	222	·6078	253	·6927	283	·7748	314	·8597	344	·9418
11	192	·5257	223	·6106	254	·6954	284	·7776	315	·8624	345	·9446
12	193	·5284	224	·6133	255	·6982	285	·7803	316	·8652	346	·9473
13	194	·5312	225	·6160	256	·7009	286	·7830	317	·8679	347	·9501
14	195	·5339	226	·6188	257	·7036	287	·7858	318	·8707	348	·9528
15	196	·5366	227	·6215	258	·7064	288	·7885	319	·8734	349	·9555
16	197	·5394	228	·6242	259	·7091	289	·7913	320	·8761	350	·9583
17	198	·5421	229	·6270	260	·7119	290	·7940	321	·8789	351	·9610
18	199	·5448	230	·6297	261	·7146	291	·7967	322	·8816	352	·9637
19	200	·5476	231	·6325	262	·7173	292	·7995	323	·8843	353	·9665
20	201	·5503	232	·6352	263	·7201	293	·8022	324	·8871	354	·9692
21	202	·5531	233	·6379	264	·7228	294	·8049	325	·8898	355	·9720
22	203	·5558	234	·6407	265	·7255	295	·8077	326	·8926	356	·9747
23	204	·5585	235	·6434	266	·7283	296	·8104	327	·8953	357	·9774
24	205	·5613	236	·6461	267	·7310	297	·8132	328	·8980	358	·9802
25	206	·5640	237	·6489	268	·7338	298	·8159	329	·9008	359	·9829
26	207	·5667	238	·6516	269	·7365	299	·8186	330	·9035	360	·9856
27	208	·5695	239	·6544	270	·7392	300	·8214	331	·9062	361	·9884
28	209	·5722	240	·6571	271	·7420	301	·8241	332	·9090	362	·9911
29	210	·5750	241	·6598	272	·7447	302	·8268	333	·9117	363	·9939
30	211	·5777	242	·6626	273	·7474	303	·8296	334	·9145	364	·9966
31	212	5804	243	·6653			304	·8323			365	·9993

XV. Tafel zur Verwandlung von Stunden, Minuten und Secunden in Theile des Tages.

h	*d*	*m*	*d*	*m*	*d*	*s*	*d*	*s*	*d*
1	0,041667	1	0,000694	31	0,021528	1	0,000012	31	0,000359
2	0,083333	2	0,001389	32	0,022222	2	0,000023	32	0,000370
3	0,125000	3	0,002083	33	0,022917	3	0,000035	33	0,000382
4	0,166667	4	0,002778	34	0,023611	4	0,000046	34	0,000394
5	0,208333	5	0,003472	35	0,024305	5	0,000058	35	0,000405
6	0,250000	6	0,004167	36	0,025000	6	0,000069	36	0,000417
7	0,291667	7	0,004861	37	0,025694	7	0,000081	37	0,000428
8	0,333333	8	0,005556	38	0,026389	8	0,000093	38	0,000440
9	0,375000	9	0,006250	39	0,027083	9	0,000104	39	0,000451
10	0,416667	10	0,006944	40	0,027778	10	0,000116	40	0,000463
11	0,458333	11	0,007639	41	0,028472	11	0,000127	41	0,000475
12	0,500000	12	0,008333	42	0,029167	12	0,000134	42	0,000468
13	0,541667	13	0,009028	43	0,029861	13	0,000150	43	0,000498
14	0,583333	14	0,009722	44	0,030556	14	0,000162	44	0,000509
15	0,625000	15	0,010417	45	0,031250	15	0,000174	45	0,000521
16	0,656667	16	0,011111	46	0,031944	16	0,000185	46	0,000532
17	0,708333	17	0,011805	47	0,032639	17	0,000197	47	0,000544
18	0,750000	18	0,012500	48	0,033333	18	0,000208	48	0,000556
19	0,791667	19	0,013194	49	0,034027	19	0,000220	49	0,000567
20	0,833333	20	0,013889	50	0,034722	20	0,000231	50	0,000579
21	0,875000	21	0,014583	51	0,035417	21	0,000243	51	0,000590
22	0,916667	22	0,015277	52	0,036111	22	0,000255	52	0,000602
23	0,958333	23	0,015972	53	0,036805	23	0,000266	53	0,000613
24	1,000000	24	0,016667	54	0,037500	24	0,000278	54	0,000625
		25	0,017361	55	0,038194	25	0,000290	55	0,000637
		26	0,018055	56	0,038889	26	0,000301	56	0,000648
		27	0,018750	57	0,039583	27	0,000313	57	0,000660
		28	0,019444	58	0,040278	28	0,000324	58	0,000671
		29	0,020139	59	0,040972	29	0,000336	59	0,000683
		30	0,020823	60	0,041667	30	0,000347	60	0,000694

Tafel zur Verwandlung von Réaumur-
ius-Fahrenheit und von Pariser Maass in Metermaass.

ur	Celsius	Fahrenheit	Celsius	Pariser Zoll und Linien		Millimeter
l	Grad	Grad	Grad	"	'''	mm
	0,00	+ 14	— 10,0	26	0	703,8
	1,25	16	8,9		1	706,1
	2,50	18	7,8		2	708,3
	3,75	20	6,7		3	710,6
	5,00	22	5,6		4	712,8
	6,25	24	4,4		5	715,1
	7,50	26	3,3		6	717,4
	8,75	28	2,2		7	719,6
	10,00	30	— 1,1		8	721,9
	11,25	32	0,0		9	724,1
		34	+ 1,1		10	726,4
		36	2,2		11	728,6
	12,50	38	3,3			
	13,75	40	4,4	27	0	730,9
	15,00	42	5,6		1	733,1
	16,25	44	6,7		2	735,4
	17,50	46	7,8		3	737,7
	18,75	48	8,9		4	739,9
	20,00	50	10,0		5	742,2
	21,25	52	11,1		6	744,4
	22,50	54	12,2		7	746,7
	23,75	56	13,3		8	748,9
		58	14,4		9	751,2
	25,00	60	15,6		10	753,4
	26,25	62	16,7		11	755,7
	27,50	64	17,8			
	28,75	66	18,9	28	0	758,0
	30,00	68	20,0		1	760,2
	31,25	70	21,1		2	762,5
	32,50	72	22,2		3	764,7
	33,75	74	23,3		4	767,0
	35,00	76	24,4		5	769,2
	36,25	78	25,6		6	771,5
		80	26,7		7	773,7
	37,50	82	27,8		8	776,0
	38,75	84	28,9		9	778,3
	40,00	86	30,0		10	780,5
	41,25	88	31,1		11	782,8
	42,50	90	32,2			
	43,75	92	33,3	29	0	785,0
	45,00	94	34,4		1	787,3
	46,25	+ 96	+ 35,6		2	789,5
	47,50					

XVII. Tafel für Kimmtiefe.

Höhe des Auges in Metern	Kimmtiefe	
m	'	"
0,5	1	15
1,0	1	47
1,5	2	11
2,0	2	31
2,5	2	49
3,0	3	5
3,5	3	20
4,0	3	33
4,5	3	46
5,0	3	59
5,5	4	10
6,0	4	21
6,5	4	32
7,0	4	42
7,5	4	52
8,0	5	2
8,5	5	11
9,0	5	20
9,5	5	29
10,0	5	38
10,5	5	46
11,0	5	54
11,5	6	2
12,0	6	10
12,5	6	17
13,0	6	25
13,5	6	32
14,0	6	39
14,5	6	46
15,0	6	53
15,5	7	0
16,0	7	7
16,5	7	14
17,0	7	20
17,5	7	27
18,0	7	33
18,5	7	39
19,0	7	45
19,5	7	51
20,0	7	57

XVIII. Verwandlung der Decimaltheile des Grades in Minuten und Secunden, und umgekehrt.

Grade	Min.	Sec.	Grade	Min.	Sec.
0,00	0	0	0,50	30	0
01	0	36	51	30	36
02	1	12	52	31	12
03	1	48	53	31	48
04	2	24	54	32	24
05	3	0	55	33	0
06	3	36	56	33	36
07	4	12	57	34	12
08	4	48	58	34	48
09	5	24	59	35	24
0,10	6	0	0,60	36	0
11	6	36	61	36	36
12	7	12	62	37	12
13	7	48	63	37	48
14	8	24	64	38	24
15	9	0	65	39	0
16	9	36	66	39	36
17	10	12	67	40	12
18	10	48	68	40	48
19	11	24	69	41	24
0,20	12	0	0,70	42	0
21	12	36	71	42	36
22	13	12	72	43	12
23	13	48	73	43	48
24	14	24	74	44	24
25	15	0	75	45	0
26	15	36	76	45	36
27	16	12	77	46	12
28	16	48	78	46	48
29	17	24	79	47	24
0,30	18	0	0,80	48	0
31	18	36	81	48	36
32	19	12	82	49	12
33	19	48	83	49	48
34	20	24	84	50	24
35	21	0	85	51	0
36	21	36	86	51	36
37	22	12	87	52	12
38	22	48	88	52	48
39	23	24	89	53	24
0,40	24	0	0,90	54	0
41	24	36	91	54	36
42	25	12	92	55	12
43	25	48	93	55	48
44	26	24	94	56	24
45	27	0	95	57	0
46	27	36	96	57	36
47	28	12	97	58	12
48	28	48	98	58	48
49	29	24	99	59	24
0,50	30	0	1,00	60	0

Grade	Sec.
0,0000	0
3	1
6	2
8	3
11	4
14	5
17	6
19	7
22	8
25	9
0,0028	10
31	11
33	12
36	13
39	14
42	15
44	16
47	17
50	18
53	19
0,0056	20
58	21
61	22
64	23
67	24
69	25
72	26
75	27
78	28
81	29
0,0083	30
0086	31
0089	32
0092	33
0094	34
0097	35
0100	36

XIX. Tafel der Präcession in Rectascension.

Rectascension		Declination										
α	α	-20^0	-10^0	0^0	$+10^0$	$+20^0$	$+30^0$	$+40^0$	$+50^0$	$+60^0$	$+70^0$	$+80^0$
$0^h\ 0^m$	$12^h\ 0^m$	$3{,}07^s$	$3{,}07^s$	$3{,}07^s$	$3{,}07^s$	$3{,}07^s$	$3{,}07^s$	$3{,}07^s$	$3{,}1^s$	$3{,}1^s$	$3{,}1^s$	$3{,}1^s$
0 40	11 20	2,99	3,03	3,07	3,11	3,15	3,20	3,26	3,3	3,5	3,7	4,4
1 20	10 40	2,90	2,99	3,07	3,15	3,24	3,33	3,45	3,6	3,9	4,3	5,7
2 0	10 0	2,83	2,95	3,07	3,19	3,31	3,46	3,63	3,9	4,2	4,9	6,9
2 40	9 20	2,76	2,92	3,07	3,22	3,38	3,57	3,79	4,1	4,6	5,4	7,9
3 20	8 40	2,70	2,89	3,07	3,25	3,44	3,66	3,93	4,3	4,8	5,9	8,9
4 0	7 20	2,65	2,87	3,07	3,27	3,49	3,74	4,04	4,4	5,1	6,2	9,6
4 40	6 40	2,61	2,85	3,07	3,29	3,53	3,80	4,12	4,6	5,2	6,5	10,2
5 20	6 0	2,59	2,84	3,07	3,30	3,55	3,83	4,17	4,6	5,3	6,7	10,5
6 0		2,58	2,83	3,07	3,31	3,56	3,84	4,19	4,7	5,4	6,7	10,6
12 0	0 0	3,07	3,07	3,07	3,07	3,07	3,07	3,07	3,1	3,1	3,1	3,1
12 40	23 20	3,15	3,11	3,07	3,03	2,99	2,94	2,88	2,8	2,7	2,4	1,7
13 20	22 40	3,24	3,15	3,07	2,99	2,90	2,81	2,69	2,5	2,3	1,8	0,5
14 0	22 0	3,31	3,19	3,07	2,95	2,83	2,68	2,51	2,3	1,9	1,2	— 0,7
14 40	21 20	3,38	3,22	3,07	2,92	2,76	2,57	2,35	2,0	1,6	0,7	— 1,8
15 20	20 40	3,44	3,25	3,07	2,89	2,70	2,48	2,21	1,8	1,3	0,3	— 2,7
16 0	20 0	3,49	3,27	3,07	2,87	2,65	2,40	2,10	1,7	1,1	— 0,1	— 3,5
16 40	19 20	3,53	3,29	3,07	2,85	2,61	2,34	2,02	1,6	0,9	— 0,4	— 4,0
17 20	18 40	3,55	3,30	3,07	2,84	2,59	2,31	1,97	1,5	0,8	— 0,5	— 4,4
18 0	18 0	3,56	3,31	3,07	2,83	2,58	2,30	1,95	1,5	0,7	— 0,6	— 4,5

XX. Tafel der Präcession in Declination.

α Präcession ist +				Präc. in δ	α Präcession ist —			
0^h	0^m	24^h	0^m	20,1″	12^h	0^m	12^h	0^m
0	20	23	40	20,0	11	40	12	20
0	40	23	20	19,7	11	20	12	40
1	0	23	0	19,4	11	0	13	0
1	20	22	40	18,8	10	40	13	20
1	40	22	20	18,2	10	20	13	40
2	0	22	0	17,4	10	0	14	0
2	20	21	40	16,4	9	40	14	20
2	40	21	20	15,4	9	20	14	40
3	0	21	0	14,2	9	0	15	0
3	20	20	40	12,9	8	40	15	20
3	40	20	20	11,5	8	20	15	40
4	0	20	0	10,0	8	0	16	0
4	20	19	40	8,5	7	40	16	20
4	40	19	20	6,9	7	20	16	40
5	0	19	0	5,2	7	0	17	0
5	20	18	40	3,5	6	40	17	20
5	40	18	20	1,7	6	20	17	40
6	0	18	0	0,0	6	0	18	0

XXI. Tafel der mittleren Refraction.

(Für 0,760 m und + 10° C.)

Höhe	Refraction	Diff. für 10′	Höhe	Refraction	Diff. für 10′	Höhe	Refraction	Diff. für 10′
0° 0′	33′ 47,9″	112,7″	9° 0′	5′ 53,7″	6,1 ″	38°	1′ 14,5″	0,44″
10	31 55,2	104,8	10	5 47,6	5,9	39	1 11,9	0,42
20	30 10,4	97,2	20	5 41,7	5,7	40	1 9,4	0,40
30	28 33,2	90,1	30	5 36,0	5,5	41	1 7,0	0,38
40	27 3,1	83,5	40	5 30,5	5,3	42	1 4,7	0,37
50	25 39,6	77,4	50	5 25,2	5,2	43	1 2,5	0,36
1 0	24 22,3	71,6	10 0	5 20,0	5,0	44	1 0,3	0,34
10	23 10,7	66,4	10	5 15,0	4,9	45	0 58,3	0,33
20	22 4,3	61,6	20	5 10,1	4,7	46	0 56,3	0,32
30	21 2,7	57,1	30	5 5,4	4,6	47	0 54,3	0,31
40	20 5,6	53,1	40	5 0,8	4,5	48	0 52,5	0,30
50	19 12,5	49,4	50	4 56,3	4,4	49	0 50,7	0,29
2 0	18 23,1	46,0	11 0	4 51,9	4,2	50	0 48,9	0,28
10	17 37,1	42,9	10	4 47,7	4,2	51	0 47,2	0,28
20	16 54,2	40,1	20	4 43,5	4,0	52	0 45,5	0,27
30	16 14,1	37,4	30	4 39,5	3,9	53	0 43,9	0,26
40	15 36,7	35,1	40	4 35,6	3,8	54	5 42,3	0,26
50	15 1,6	32,9	50	4 31,8	3,7	55	0 40,8	0,25
3 0	14 28,7	30,8	12 0	4 28,1	3,6	56	0 39,3	0,24
10	13 57,9	29,0	10	4 24,5	3,6	57	0 37,9	0,24
20	13 28,9	27,3	20	4 20,9	3,4	58	0 36,4	0,23
30	13 1,6	25,7	30	4 17,5	3,4	59	0 35,0	0,23
40	12 35,9	24,2	40	4 14,1	3,2	60	0 33,7	0,22
50	12 11,7	22,9	50	4 10,9	3,2	61	0 32,3	0,22
4 0	11 48,8	21,6	13 0	4 7,7	3,2	62	0 31,0	0,22
10	11 27,2	20,5	10	4 4,5	3,0	63	0 29,7	0,21
20	11 6,7	19,4	20	4 1,5	3,0	64	0 28,4	0,21
30	10 47,3	18,4	30	3 58,5	2,9	65	0 27,2	0,20
40	10 28,9	17,5	40	3 55,6	2,9	66	0 26,0	0,20
50	10 11,4	16,6	50	3 52,7	2,7	67	0 24,8	0,20
5 0	9 54,8	15,8	14 0	3 50,0	2,58	68	0 23,6	0,20
10	9 39,0	15,1	15 0	3 34,5	2,28	69	0 22,4	0,19
20	9 23,9	14,3	16 0	3 20,8	2,03	70	0 21,2	0,19
30	9 9,6	13,7	17 0	3 8,6	1,82	71	0 20,1	0,19
40	8 55,9	13,1	18 0	2 57,7	1,64	72	0 18,9	0,19
50	8 42,8	12,5	19 0	2 47,8	1,49	73	0 17,8	0,19
6 0	8 30,3	12,0	20 0	2 38,9	1,35	74	0 16,7	0,18
10	8 18,3	11,4	21 0	2 30,8	1,24	75	0 15,6	0,18
20	8 6,9	11,0	22 0	2 23,4	1,14	76	0 14,5	0,18
30	7 55,9	10,5	23 0	2 16,6	1,05	77	0 13,5	0,18
40	7 45,4	10,1	24 0	2 10,3	0,97	78	0 12,4	0,18
50	7 35,3	9,7	25 0	2 4,4	0,90	79	0 11,3	0,18
7 0	7 25,6	9,3	26 0	1 59,0	0,84	80	0 10,3	0,18
10	7 16,3	9,0	27 0	1 54,0	0,79	81	0 9,2	0,17
20	7 7,3	8,6	28 0	1 49,3	0,74	82	0 8,2	0,17
30	6 58,7	8,3	29 0	1 44,8	0,69	83	0 7,2	0,17
40	6 50,4	8,0	30 0	1 40,7	0,65	84	0 6,1	0,17
50	6 42,4	7,7	31 0	1 36,8	0,62	85	0 5,1	0,17
8 0	6 34,7	7,5	32 0	1 33,1	0,58	86	0 4,1	0,17
10	6 27,2	7,1	33 0	1 29,2	0,55	87	0 3,1	0,17
20	6 20,1	7,0	34 0	1 26,3	0,53	88	0 2,0	0 17
30	6 13,1	6,7	35 0	1 23,1	0,50	89	0 1,0	0,17
40	6 6,4	6,5	36 0	1 20,1	0,48	90	0 0,0	
50	5 59,9	6,2	37 0	1 17,2	0,46			
9 0	5 53,7		38 0	1 14,5				

XXII. Barometercorrection für Refraction.

(Luftdruck in Millimetern.)

Barometer mm	*A*	Barometer mm	*A*	Barometer mm	*A*	Barometer mm	*A*
630	0,829	670	0,882	710	0,934	750	0,987
631	830	671	883	711	936	751	988
632	832	672	884	712	937	752	989
633	833	673	885	713	938	753	991
634	834	674	887	714	939	754	992
635	0,835	675	0,888	715	0,941	755	0,993
636	837	676	889	716	942	756	995
637	838	677	891	717	943	757	996
638	839	678	892	718	945	758	997
639	841	679	893	719	946	759	999
640	0,842	680	0,895	720	0,947	760	1,000
641	843	681	896	721	949	761	01
642	845	682	897	722	950	762	03
643	846	683	899	723	951	763	04
644	847	684	900	724	953	764	05
645	0,849	685	0,901	725	0,954	765	1,007
646	850	686	903	726	955	766	08
647	851	687	904	727	957	767	09
648	853	688	905	728	958	768	11
649	854	689	907	729	959	769	12
650	0,855	690	0,908	730	0,961	770	1,013
651	857	691	909	731	962	771	14
652	858	692	910	732	963	772	16
653	859	693	912	733	964	773	17
654	860	694	913	734	966	774	18
655	0,862	695	0,914	735	0,967	775	1,020
656	863	696	916	736	968	776	21
657	864	697	917	737	970	777	22
658	866	698	918	738	971	778	24
659	867	699	920	739	972	779	25
660	0,868	700	0,921	740	0,974	780	1,026
661	870	701	922	741	975	781	28
662	871	702	924	742	976	782	29
663	872	703	925	743	978	783	30
664	874	704	926	744	979	784	32
665	0,875	705	0,928	745	0,980	785	1,033
666	876	706	929	746	982	786	34
667	878	707	930	747	983	787	36
668	879	708	932	748	984	788	37
669	880	709	933	749	986	789	1,038

XXIII. Thermometercorrection der Refraction.

(Celsius.)

Thermometer	B	Thermometer	B
— 29°	1,168	+ 11°	0,996
28	1,163	12	0,993
27	1,158	13	0,989
26	1,153	14	0,985
25	1,148	15	0,982
— 24	1,144	+ 16	0,978
23	1,139	17	0,975
22	1,134	18	0,971
21	1,129	19	0,968
20	1,125	20	0,964
— 19	1,120	+ 21	0,961
18	1,115	22	0,957
17	1,111	23	0,954
16	1,106	24	0,950
15	1,102	25	0,947
— 14	1,097	+ 26	0,944
13	1,093	27	0,940
12	1,089	28	0,937
11	1,084	29	0,934
10	1,080	30	0,931
— 9	1,076	+ 31	0,927
8	1,071	32	0,924
7	1,067	33	0,921
6	1,063	34	0,918
5	1,059	35	0,915
— 4	1,055	+ 36	0,912
3	1,051	37	0,908
2	1,047	38	0,905
1	1,043	39	0,902
0	1,039	40	0,899
+ 1	1,035	+ 41	0,896
2	1,031	42	0,893
3	1,027	43	0,890
4	1,023	44	0,887
5	1,019	45	0,884
+ 6	1,015	+ 46	0,881
7	1,011	47	0,878
8	1,007	48	0,876
9	1,004	49	0,873
+ 10	1,000	+ 50	0,870

XXIV. Tafel für die Mittagsverbesserung.

Halbe Zwischenzeit	*Log A*	*Log B*	Halbe Zwischenzeit	*Log A*	*Log B*
$1^h\ 0^m$	$7{,}7297_n$	7,7146	$2^h\ 0^m$	$7{,}7447_n$	7,6823
2	7300	7139	2	7454	6807
4	7304	7132	4	7461	6792
6	7307	7125	6	7468	6776
8	7311	7117	8	7475	6759
10	7,7315	7,7109	10	7,7482	7,6743
12	7319	7101	12	7490	6726
14	7323	7092	14	7497	6708
16	7327	7083	16	7505	6691
18	7331	7075	18	7513	6673
20	7,7336	7,7065	20	7,7521	7,6654
22	7340	7056	22	7529	6635
24	7345	7046	24	7537	6616
26	7349	7036	26	7545	6597
28	7354	7026	28	7553	6577
30	7,7359	7,7015	30	7,7562	7,6556
32	7364	7005	32	7570	6536
34	7369	6993	34	7579	6514
36	7374	6982	36	7588	6493
38	7380	6970	38	7597	6471
40	7,7386	7,6958	40	7,7606	7,6448
42	7391	6946	42	7615	6425
44	7397	6934	44	7624	6402
46	7403	6921	46	7634	6378
48	7409	6908	48	7643	6354
50	7,7415	7,6894	50	7,7653	7,6329
52	7421	6881	52	7663	6304
54	7428	6867	54	7673	6278
56	7434	6852	56	7683	6252
58	7411	6833	58	7693	6225
2 0	7447	6823	3 0	7703	6198

XXIV. Tafel für die Mittagsverbesserung (Fortsetzung).

Halbe Zwischenzeit	*Log A*	*Log B*	Halbe Zwischenzeit	*Log A*	*Log B*
3^h 0^m	7,7703^n	7,6198	4^h 0^m	7,8072^n	7,5062
2	7713	6170	2	8086	5010
4	7724	6142	4	8101	4957
6	7735	6113	6	8116	4902
8	7745	6083	8	8130	4846
10	7,7756	7,6053	10	7,8145	7,4789
12	7767	6023	12	8160	4731
14	7779	5991	14	8176	4671
16	7790	5959	16	8191	4609
18	7801	5927	18	8206	4546
20	7,7813	7,5894	20	7,8222	7,4482
22	7825	5860	22	8238	4415
24	7836	5825	24	8254	4347
26	7848	5790	26	8270	4277
28	7860	5754	28	8286	4205
30	7,7873	7,5717	30	7,8302	7,4131
32	7885	5680	32	8319	4055
34	7890	5641	34	8336	3977
36	7910	5602	36	8353	3896
38	7923	5562	38	8370	3813
40	7,7936	7,5522	40	7,8387	7,3728
42	7949	5480	42	8404	3639
44	7962	5437	44	8422	3548
46	7975	5394	46	8439	3454
48	7989	5350	48	8457	3357
50	7,8002	7,5304	50	7,8475	7,3256
52	8016	5258	52	8493	3152
54	8030	5211	54	8511	3045
56	8044	5162	56	8530	2933
58	8058	5112	58	8548	2817
4 0	7,8072	7,5062	5 0	8,8567	7,2697

XXV. Tafel für die Mitternachtsverbesserung.

	Log A	*Log B*		*Log A*	*Log B*
6^h 0^m	7,9208	$B = 0$	8^h 30^m	8,1726	7,9571
5	7,9269	6,2657	35	8,1843	7,9808
10	7,9331	6,5728	40	8,1963	8,0043
15	7,9395	6,7551	45	8,2085	8,0277
20	7,9460	6,8862	50	8,2212	8,0506
25	7,9526	6,9895	55	8,2341	8,0739
30	7,9593	7,0750	9 0	8,2474	8,0969
35	7,9662	7,1484	5	8,2611	8,1199
40	7,9732	7,2129	10	8,2752	8,1428
45	7,9804	7,2706	15	8,2897	8,1658
50	7,9877	7,3231	20	8,3046	8,1889
55	7,9952	7,3712	25	8,3200	8,2121
7 0	8,0028	7,4158	30	8,3359	8,2354
5	8,0106	7,4575	35	8,3524	8,2589
10	8,0186	7,4967	40	8,3693	8,2827
15	8,0267	7,5338	45	8,3869	8,3068
20	8,0350	7,5690	50	8,4051	8,3312
25	8,0435	7,6027	55	8,4241	8,3560
30	8,0521	7,6349	10 0	8,4437	8,3812
35	8,0610	7,6660	5	8,4641	8,4070
40	8,0700	7,6959	10	8,4854	8,4334
45	8,0792	7,7249	15	8,5077	8,4604
50	8,0887	7,7531	20	8,5310	8,4882
55	8,0983	7,7805	25	8,5554	8,5169
8 0	8,1082	7,8072	30	8,5810	8,5466
5	8,1183	7,8333	35	8,6081	8,5775
10	8,1287	7,8589	40	8,6366	8,6096
15	8,1393	7,8840	45	8,6670	8,6433
20	8,1501	7,9087	50	8,6993	8,6787
25	8,1612	7,9330	55	8,7339	8,7162
30	8,1726	7,9571	11 0	9,7711	8,7560

Tafel XXVI.

$(r)^5 + (r)^3 = q$			$(r)^5 - (r)^3 = q$		
(r)	q	Δq	(r)	q	Δq
0,900	1,31949		0,900	— 0,13851	
0,901	1,32522	+ 572	0,901	— 0,13766	+ 85
0,902	1,33096	574	0,902	— 0,13680	86
0,903	1,33672	576	0,903	— 0,13593	87
0,904	1,34250	578	0,904	— 0,13505	88
0,905	1,34829	579	0,905	— 0,13416	89
0,906	1,35411	582	0,906	— 0,13326	90
0,907	1,35995	584	0,907	— 0,13235	91
0,908	1,36582	587	0,908	— 0,13143	92
0,909	1,37170	+ 588	0,909	— 0,13050	+ 93
0,910	1,37760	+ 590	0,910	— 0,12955	+ 95
0,911	1,38352	592	0,911	— 0,12859	96
0,912	1,38946	594	0,912	— 0,12763	96
0,913	1,39542	596	0,913	— 0,12666	97
0,914	1,40140	598	0,914	— 0,12568	98
0,915	1,40741	601	0,915	— 0,12469	99
0,916	1,41344	603	0,916	— 0,12369	100
0,917	1,41949	605	0,917	— 0,12268	101
0,918	1,42556	607	0,918	— 0,12166	102
0,919	1,43165	+ 609	0,919	— 0,12063	+ 103
0,920	1,43777	+ 612	0,920	— 0,11959	+ 104
0,921	1,44391	614	0,921	— 0,11854	105
0,922	1,45007	616	0,922	— 0,11748	106
0,923	1,45625	618	0,923	— 0,11641	107
0,924	1,46245	620	0,924	— 0,11533	108
0,925	1,46867	622	0,925	— 0,11424	109
0,926	1,47490	623	0,926	— 0,11315	109
0,927	1,48116	626	0,927	— 0,11205	110
0,928	1,48744	628	0,928	— 0,11094	111
0,929	1,49374	+ 630	0,929	— 0,10981	+ 113
0,930	1,50006	+ 632	0,930	— 0,10867	+ 114
0,931	1,50640	634	0,931	— 0,10752	115
0,932	1,51276	636	0,932	— 0,10636	116
0,933	1,51915	639	0,933	— 0,10519	117
0,934	1,52556	641	0,934	— 0,10401	118
0,935	1,53199	643	0,935	— 0,10282	119
0,936	1,53844	645	0,936	— 0,10162	120
0,937	1,54491	647	0,937	— 0,10041	121
0,938	1,55141	650	0,938	— 0,09918	123
0,939	1,55793	+ 652	0,939	— 0,09794	+ 124

Tafel XXVI (Fortsetzung).

$(r)^5 + (r)^3 = q$			$(r)^5 - (r)^3 = q$		
(r)	q	Δq	(r)	q	Δq
0,940	1,56447		0,940	— 0,09669	
0,941	1,57103	+ 656	0,941	— 0,09543	+ 126
0,942	1,57762	659	0,942	— 0,09416	127
0,943	1,58423	661	0,943	— 0,09288	128
0,944	1,59087	664	0,944	— 0,09159	129
0,945	1,59753	666	0,945	— 0,09029	130
0,946	1,60421	668	0,946	— 0,08897	132
0,947	1,61092	671	0,947	— 0,08764	133
0,948	1,61765	673	0,948	— 0,08630	134
0,949	1,62440	+ 675	0,949	— 0,08495	+ 135
0,950	1,63117	+ 677	0,950	— 0,08360	+ 135
0,951	1,63796	679	0,951	— 0,08223	137
0,952	1,64477	681	0,952	— 0,08085	138
0,953	1,65161	684	0,953	— 0,07945	140
0,954	1,65847	686	0,954	— 0,07804	141
0,955	1,66535	686	0,955	— 0,07662	142
0,956	1,67225	690	0,956	— 0,07519	143
0,957	1,67918	698	0,957	— 0,07375	144
0,958	1,68613	695	0,958	— 0,07230	145
0,959	1,69311	+ 698	0,959	— 0,07084	+ 146
0,960	1,70011	+ 700	0,960	— 0,06937	+ 147
0,961	1,70714	703	0,961	— 0,06788	149
0,962	1,71419	705	0,962	— 0,06638	150
0,963	1,72126	707	0,963	— 0,06487	151
0,964	1,72835	709	0,964	— 0,06335	152
0,965	1,73546	711	0,965	— 0,06181	154
0,966	1,74260	714	0,966	— 0,06026	155
0,967	1,74976	716	0,967	— 0,05870	156
0,968	1,75694	718	0,968	— 0,05712	158
0,969	1,76415	+ 721	0,969	— 0,05553	+ 159
0,970	1,76140	+ 725	0,970	— 0,05394	+ 159
0,971	1,77867	727	0,971	— 0,05233	161
0,972	1,78596	729	0,972	— 0,05071	162
0,973	1,79327	731	0,973	— 0,04907	164
0,974	1,80061	734	0,974	— 0,04742	165
0,975	1,80797	736	0,975	— 0,04576	166
0,976	1,81535	738	0,976	— 0,04408	168
0,977	1,82275	740	0,977	— 0,04239	169
0,978	1,83017	742	0,978	— 0,04069	170
0,979	1,83762	+ 745	0,979	— 0,03898	+ 171

Tafel XXVI (Fortsetzung).

$(r)^5 + (r)^3 = q$			$(r)^5 - (r)^3 = q$		
(r)	q	Δq	(r)	q	Δq
0,980	1,84511		0,980	— 0,03727	
0,981	1,85260	+ 749	0,981	— 0,03554	+ 173
0,982	1,86012	752	0,982	— 0,03380	174
0,983	1,86767	755	0,983	— 0,03204	176
0,984	1,87525	758	0,984	— 0,03027	177
0,985	1,88286	761	0,985	— 0,02849	178
0,986	1,89049	763	0,986	— 0,02669	180
0,987	1,89815	766	0,987	— 0,02487	182
0,988	1,90584	769	0,988	— 0,02304	183
0,989	1,91356	+ 772	0,989	— 0,02119	+ 185
0,990	1,92129	+ 773	0,990	— 0,01932	+ 187
0,991	1,92904	775	0,991	— 0,01744	188
0,992	1,93682	778	0,992	— 0,01555	189
0,993	1,94462	780	0,993	— 0,01365	190
0,994	1,95245	783	0,994	— 0,01173	192
0,995	1,96030	785	0,995	— 0,00980	193
0,996	1,96818	788	0,996	— 0,00786	194
0,997	1,97609	791	0,997	— 0,00591	195
0,998	1,98403	794	0,998	— 0,00395	196
0,999	1,99200	+ 797	0,999	— 0,00198	+ 197
1,000	2,00000	+ 800	1,000	± 0,00000	+ 198
1,001	2,00802	802	1,001	+ 0,00198	198
1,002	2,01606	804	1,002	0,00398	200
1,003	2,02413	807	1,003	0,00600	202
1,004	2,03222	809	1,004	0,00804	204
1,005	2,04033	811	1,005	0,01010	206
1,006	2,04847	814	1,006	0,01218	208
1,007	2,05664	817	1,007	0,01428	210
1,008	2,06483	819	1,008	0,01640	212
1,009	2,07305	+ 822	1,009	+ 0,01854	+ 214
1,010	2,08131	+ 826	1,010	+ 0,02071	+ 217
1,011	2,08960	829	1,011	0,02287	217
1,012	2,09791	831	1,012	0,02505	218
1,013	2,10625	834	1,013	0,02724	219
1,014	2,11462	837	1,014	0,02944	220
1,015	2,12301	839	1,015	0,03165	221
1,016	2,13142	841	1,016	0,03387	222
1,017	2,13985	843	1,017	0,03610	223
1,018	2,14831	846	1,018	0,03834	224
1,019	2,15679	+ 848	1,019	+ 0,04050	+ 226

Tafel XXVI (Fortsetzung).

$(r)^5 + (r)^3 = q$			$(r)^5 - (r)^3 = q$		
(r)	q	Δq	(r)	q	Δq
1,020	2,16529		1,020	+ 0,04287	
1,021	2,17382	+ 853	1,021	0,04515	+ 228
1,022	2,18238	856	1,022	0,04745	230
1,023	2,19097	859	1,023	0,04977	232
1,024	2,19959	862	1,024	0,05211	234
1,025	2,20825	866	1,025	0,05447	236
1,026	2,21694	869	1,026	0,05685	238
1,027	2,22566	872	1,027	0,05925	240
1,028	2,23441	875	1,028	0,06167	242
1,029	2,24319	+ 878	1,029	0,06411	+ 244
1,030	2,25200	+ 881	1,030	0,06655	+ 244
1,031	2,26083	883	1,031	0,06901	246
1,032	2,26969	886	1,032	0,07148	247
1,033	2,27858	889	1,033	0,07396	248
1,034	2,28749	891	1,034	0,07646	250
1,035	2,29643	894	1,035	0,07897	251
1,036	2,30540	897	1,036	0,08150	253
1,037	2,31439	899	1,037	0,08404	254
1,038	2,32341	902	1,038	0,08660	256
1,039	2,33245	+ 904	1,039	0,08919	+ 259
1,040	2,34151	+ 906	1,040	0,09179	+ 260
1,041	2,35060	909	1,041	0,09441	262
1,042	2,35972	912	1,042	0,09705	264
1,043	2,36888	916	1,043	0,09970	265
1,044	2,37807	919	1,044	0,10237	267
1,045	2,38730	923	1,045	0,10505	268
1,046	2,39657	927	1,046	0,10774	269
1,047	2,40587	930	1,047	0,11044	270
1,048	2,41520	933	1,048	0,11316	272
1,049	2,42455	+ 935	1,049	0,11589	+ 273
1,050	2,43393	+ 938	1,050	0,11863	+ 274
1,051	2,44334	941	1,051	0,12139	276
1,052	2,45278	944	1,052	0,12417	278
1,053	2,46224	946	1,053	0,12698	281
1,054	2,47173	949	1,054	0,12981	283
1,055	2,48124	951	1,055	0,13266	285
1,056	2,49078	954	1,056	0,13553	287
1,057	2,50035	957	1,057	0,13842	289
1,058	2,50995	960	1,058	0,14133	291
1,059	2,51958	+ 963	1,059	0,14426	+ 293

Tafel XXVI (Fortsetzung).

$(r)^5 + (r)^3 = q$			$(r)^5 - (r)^3 = q$		
(r)	q	Δq	(r)	q	Δq
1,060	2,52925		1,060	0,14721	
1,061	2,53895	+ 970	1,061	0,15016	+ 295
1,062	2,54868	973	1,062	0,15313	297
1,063	2,55844	976	1,063	0,15611	298
1,064	2,56823	979	1,064	0,15911	300
1,065	2,57805	982	1,065	0,16213	302
1,066	2,58790	985	1,066	0,16517	304
1,067	2,59778	988	1,067	0,16823	306
1,068	2,60769	991	1,068	0,17131	308
1,069	2,61763	+ 994	1,069	0,17439	+ 309
1,070	2,62759	+ 996	1,070	0,17750	+ 311
1,071	2,63758	999	1,071	0,18062	312
1,072	2,64760	1002	1,072	0,18376	314
1,073	2,65765	1005	1,073	0,18692	316
1,074	2,66774	1009	1,074	0,19010	318
1,075	2,67787	1013	1,075	0,19330	320
1,076	2,68803	1016	1,076	0,19652	322
1,077	2,69823	1020	1,077	0,19976	324
1,078	2,70847	1024	1,078	0,20302	326
1,079	2,71875	+ 1028	1,079	0,20630	+ 328
1,080	2,72905	+ 1030	1,080	0,20961	+ 331
1,081	2,73938	1033	1,081	0,21293	332
1,082	2,74974	1036	1,082	0,21627	334
1,083	2,76013	1039	1,083	0,21962	335
1,084	2,77055	1042	1,084	0,22299	337
1,085	2,78100	1045	1,085	0,22637	338
1,086	2,79148	1048	1,086	0,22977	340
1,087	2,80198	1050	1,087	0,23319	342
1,088	2,81251	1053	1,088	0,23663	344
1,089	2,82307	+ 1056	1,089	0,24009	+ 346
1,090	2,83365	+ 1058	1,090	0,24358	+ 349
1,091	2,84426	1061	1,091	0,24608	350
1,092	2,85490	1064	1,092	0,24960	352
1,093	2,86558	1068	1,093	0,25314	354
1,094	2,87631	1073	1,094	0,25670	356
1,095	2,88708	1077	1,095	0,26028	358
1,096	2,89789	1081	1,096	0,26388	360
1,097	2,90874	1085	1,097	0,26750	362
1,098	2,91963	1089	1,098	0,27115	365
1,099	2,93056	+ 1093	1,099	0,27582	+ 367

XXVII. Tafel mit dem Argumente q.

$$f = \frac{1 - (1 + 2q)^{-3/2}}{q}.$$

q	$\log f$	Differenz für $\Delta q = 0{,}0001$	q	$\log f$	Differenz für $\Delta q = 0{,}0001$
− 0,030	0,510798	116	+ 0,030	0,445566	− 102
29	509638	116	29	446586	− 102
28	508481	116	28	447609	− 103
27	507327	115	27	448633	− 103
26	506175	115	26	449660	− 103
25	505026	115	25	450688	− 103
24	503880	114	24	451719	− 103
23	502736	114	23	452752	− 104
22	501595	114	22	453788	− 104
21	500456		21	454825	
0,020	0,499320	114	+ 0,020	0,455864	− 104
19	498186	113	19	456906	− 104
18	497055	113	18	457950	− 104
17	495927	113	17	458996	− 105
16	494801	113	16	460044	− 105
15	493678	112	15	461094	− 105
14	492557	112	14	462147	− 105
13	491438	112	13	463202	− 106
12	490322	111	12	464259	− 106
11	489209		11	465318	
− 0,010	0,488098	111	+ 0,010	0,466380	− 106
9	486989	111	9	467444	− 106
8	485883	111	8	468510	− 107
7	484780	110	7	469578	− 107
6	483678	110	6	470649	− 107
5	482580		5	471722	− 107
4	481483	109	4	472797	− 108
3	480389	109	3	473875	− 108
2	479297	109	2	474954	− 108
1	478208	109	1	476037	− 109
0	477121		0	477121	

NB. Die Differenzen sind in Einheiten der sechsten Decimale. Man hat z. B. für $q = + 0{,}00823$:

$2 \times \Delta q = 2 \times 106$ $\qquad q = 0{,}008 \ldots \log f = 0{,}468510$

$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad - 212$

$3 \times \frac{\Delta q}{10} = 3 \times 10{,}6$ $\qquad\qquad\qquad\qquad - \ 32$

$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \log f = 0{,}648266$

XXVIII. Tafel des Argumentes η.

$\eta = \frac{2k}{(r_1 + r_2)^{3/2}}$, $\quad log\, 2k = 8{,}5366114$, $\quad s = \frac{2kt}{\sqrt{r_1 + r_2}} f.$

η	f	η	f
0,00	0,000000	0,40	0,003042
01	2	41	3204
02	7	42	3372
03	16	43	3544
04	29	44	3722
05	45	45	3905
06	65	46	4093
07	89	47	4287
08	116	48	4486
09	147	49	4691
0,10	0,000181	0,50	0,004901
11	220	51	5117
12	262	52	5340
13	307	53	5568
14	357	54	5803
15	410	55	6044
16	467	56	6292
17	527	57	6546
18	592	58	6808
19	660	59	7076
0,20	0,000732	0,60	0,007352
21	808	61	7636
22	888	62	7927
23	972	63	8227
24	1060	64	8534
25	1152	65	8851
26	1248	66	9176
27	1348	67	9510
28	1452	68	9854
29	1561	69	10208
0,30	0,001673	0,70	0,010572
31	1790	71	10947
32	1911	72	11335
33	2037	73	11731
34	2107	74	12142
35	2301	75	12565
36	2440	76	13002
37	2583	77	13454
38	2731	78	13920
39	2884	79	14403

XXIX. Gauss'sche Vorschrift zur Bestimmung des Ostersonntags.

Man dividire	durch	und es bleibe der Rest
die Jahreszahl	19	a
„ „	4	b
„ „	7	c
„ Grösse $19a + M$	30	d
„ „ $2b + 4c + 6d + N$.	7	e

so fällt der Ostersonntag auf den

$22 + d + e$ ten März im gemeinen Jahre,

$23 + d + e$ ten März im Schaltjahre.

Dabei ist im Julianischen Kalender $M = 15$, $N = 6$.

Im Gregorianischen dagegen:

Von	M	N
1583 bis 1699	22	2
1700 „ 1799	23	3
1800 „ 1899	23	4
1900 „ 1999	24	5
2000 „ 2099	24	5
2100 „ 2199	24	6
2200 „ 2299	25	0
2300 „ 2399	26	1
2400 „ 2499	25	1

Man beachte aber für den Gregorianischen Kalender:

α) Findet man den 26. April als Ostersonntag, so ist dafür der 19. anzunehmen.

β) Findet man $d = 28$, $e = 6$ und giebt zugleich die Grösse $11M + 11$ durch 30 dividirt einen Rest, der kleiner als 19, so fällt Ostern nicht, wie die Berechnung ergiebt, auf den 25., sondern schon auf den 18. April.

XXX. Ostersonntag seit Einführung des Gregorianischen Kalenders.

A. = April, M. = März.

1583	10 A.	1623	16 A.	1663	25 M.	1703	8 A.
1584*	1 A.	1624*	7 A.	1664*	13 A.	1704*	23 M.
1585	21 A.	1625	30 M.	1665	5 A.	1705	12 A.
1586	6 A.	1626	12 A.	1666	25 A.	1706	4 A.
1587	29 M.	1627	4 A.	1667	10 A.	1707	24 A.
1588*	17 A.	1628*	23 A.	1668*	1 A.	1708*	8 A.
1589	2 A.	1629	15 A.	1669	21 A.	1709	31 M.
1590	22 A.	1630	31 M.	1670	6 A.	1710	20 A.
1591	14 A.	1631	20 A.	1671	29 M.	1711	5 A.
1592*	29 M.	1632*	11 A.	1672*	17 A.	1712*	27 M.
1593	18 A.	1633	27 M.	1673	2 A.	1713	16 A.
1594	10 A.	1634	16 A.	1674	25 M.	1714	1 A.
1595	26 M.	1635	8 A.	1675	14 A.	1715	21 A.
1596*	14 A.	1636*	23 M.	1676*	5 A.	1716*	12 A.
1597	6 A.	1637	12 A.	1677	18 A.	1717	28 M.
1598	22 M.	1638	4 A.	1678	10 A.	1718	17 A.
1599	11 A.	1639	24 A.	1679	2 A.	1719	9 A.
1600*	2 A.	1640*	8 A.	1680*	21 A.	1720*	31 M.
1601	22 A.	1641	31 M.	1681	6 A.	1721	13 A.
1602	7 A.	1642	20 A.	1682	29 M.	1722	5 A.
1603	30 M.	1643	5 A.	1683	18 A.	1723	28 M.
1604*	18 A.	1644*	27 M.	1684*	2 A.	1724*	16 A.
1605	10 A.	1645	16 A.	1685	22 A.	1725	1 A.
1606	26 M.	1646	1 A.	1686	14 A.	1726	21 A.
1607	15 A.	1647	21 A.	1687	30 M.	1727	13 A.
1608*	6 A.	1648*	12 A.	1688*	18 A.	1728*	28 M.
1609	19 A.	1649	4 A.	1689	10 A.	1729	17 A.
1610	11 A.	1650	17 A.	1690	26 M.	1730	9 A.
1611	3 A.	1651	9 A.	1691	15 A.	1731	25 M.
1612*	22 A.	1652*	31 M.	1692*	6 A.	1732*	13 A.
1613	7 A.	1653	13 A.	1693	22 M.	1733	5 A.
1614	30 M.	1654	5 A.	1694	11 A.	1734	25 A.
1615	19 A.	1655	28 M.	1695	3 A.	1735	10 A.
1616*	3 A.	1656*	16 A.	1696*	22 A.	1736*	1 A.
1617	26 M.	1657	1 A.	1697	7 A.	1737	21 A.
1618	15 A.	1658	21 A.	1698	30 M.	1738	6 A.
1619	31 M.	1659	13 A.	1699	19 A.	1739	29 M.
1620*	19 A.	1660*	28 M.	1700*	11 A.	1740*	17 A.
1621	11 A.	1661	17 A.	1701	27 M.	1741	2 A.
1622	27 M.	1662	9 A.	1702	16 A.	1742	25 M.

XXX. Ostersonntag seit Einführung des Gregorianischen Kalenders (Fortsetzung).

A. = April, M. = März.

1743	14 A.	1783	20 A.	1823	30 M.	1863	5 A.
1744*	5 A.	1784*	11 A.	1824*	18 A.	1864*	27 M.
1745	18 A.	1785	27 M.	1825	3 A.	1865	16 A.
1746	10 A.	1786	16 A.	1826	26 M.	1866	1 A.
1747	2 A.	1787	8 A.	1827	15 A.	1867	21 A.
1748*	14 A.	1788*	23 M.	1828*	6 A.	1868*	12 A.
1749	6 A.	1789	12 A.	1829	19 A.	1869	28 M.
1750	29 M.	1790	4 A.	1830	11 A.	1870	17 A.
1751	11 A.	1791	24 A.	1831	3 A.	1871	9 A.
1752*	2 A.	1792*	8 A.	1832*	22 A.	1872*	31 M.
1753	22 A.	1793	31 M.	1833	7 A.	1873	13 A.
1754	14 A.	1794	20 A.	1834	30 M.	1874	5 A.
1755	30 M.	1795	5 A.	1835	19 A.	1875	28 M.
1756*	18 A.	1796*	27 M.	1836*	3 A.	1876*	16 A.
1757	10 A.	1797	16 A.	1837	26 M.	1877	1 A.
1758	26 A.	1798	8 A.	1838	15 A.	1878	21 A.
1759	15 A.	1799	24 M.	1839	31 M.	1879	13 A.
1760*	6 A.	1800*	13 A.	1840*	19 A.	1880*	28 M.
1761	22 M.	1801	5 A.	1841	11 A.	1881	17 A.
1762	11 A.	1802	18 A.	1842	27 M.	1882	9 A.
1763	3 A.	1803	10 A.	1843	16 A.	1883	25 M.
1764*	22 A.	1804*	1 A.	1844*	7 A.	1884*	13 A.
1765	7 A.	1805	14 A.	1845	23 M.	1885	5 A.
1766	30 M.	1806	6 A.	1846	12 A.	1886	25 A.
1767	19 A.	1807	29 M.	1847	4 A.	1887	10 A.
1768*	3 A.	1808*	17 A.	1848*	23 A.	1888*	1 A.
1769	26 M.	1809	2 A.	1849	8 A.	1889	21 A.
1770	15 A.	1810	22 A.	1850	31 M.	1890	6 A.
1771	31 M.	1811	14 A.	1851	20 A.	1891	29 M.
1772*	19 A.	1812*	29 M.	1852*	11 A.	1892*	17 A.
1773	11 A.	1813	18 A.	1853	27 M.	1893	2 A.
1774	3 A.	1814	10 A.	1854	16 A.	1894	25 M.
1775	16 A.	1815	26 M.	1855	8 A.	1895	14 A.
1776*	7 A.	1816*	14 A.	1856*	23 M.	1896*	5 A.
1777	30 M.	1817	6 A.	1857	12 A.	1897	18 A.
1778	19 A.	1818	22 M.	1858	4 A.	1898	10 A.
1779	4 A.	1819	11 A.	1859	24 A.	1899	2 A.
1780*	26 M.	1820*	2 A.	1860*	8 A.	1900*	15 A.
1781	15 A.	1821	22 A.	1861	31 M.	1901	7 A.
1782	31 M.	1822	7 A.	1862	20 A.	1902	30 M.

Tafel XXXI.

NB. Im Schaltjahre sind die Daten im Januar und Februar um 1 zu vermehren (ausser Ostersonntag).

Ostern	22	23	24	25	26	März
Neujahr	Donnerstag	Mittwoch	Dienstag	Montag	Sonntag	
Sonntag nach Neujahr	4	5	—	—	—	Januar
1. Sonntag nach Epiphanias	11	12	13	7	8	Januar
2. Sonntag nach Epiphanias	—	—	—	14	15	Januar
3. Sonntag nach Epiphanias	—	—	—	—	—	
4. Sonntag nach Epiphanias	—	—	—	—	—	
5. Sonntag nach Epiphanias	—	—	—	—	—	
6. Sonntag nach Epiphanias	—	—	—	—	—	
Septuagesimae . . .	18	19	20	21	22	Januar
Fastnacht	3	4	5	6	7	Februar
Jubilate	12	13	14	15	16	April
Himmelfahrt	30	1	2	3	4	Mai
Pfingsten	10	11	12	13	14	Mai
Trinitatis	17	18	19	20	21	Mai
22. Sonntag nach Trinitatis	18	19	20	21	22	October
23. Sonntag nach Trinitatis	25	26	27	28	29	October
24. Sonntag nach Trinitatis	1	2	3	4	5	November
25. Sonntag nach Trinitatis	8	9	10	11	12	November
26. Sonntag nach Trinitatis	15	16	17	18	19	November
27. Sonntag nach Trinitatis	22	23	24	25	26	November
1. Advent	29	30	1	2	3	December
2. Advent	6	7	8	9	10	December
3. Advent	13	14	15	16	17	December
4. Advent	20	21	22	23	24	December
Weihnachten	Freitag	Donnerstag	Freitag	Dienstag	Montag	
Sonntag nach Weihn.	27	28	29	30	31	December
1. Quatember	11	12	13	14	15	Februar
2. Quatember	13	14	15	16	17	Mai
3. Quatember	16	17	18	19	20	September
4. Quatember	16	17	18	19	20	December

Tafel XXXI (Fortsetzung).

Ostern	27	28	29	30	31	März
Neujahr	Sonn-abend	Frei-tag	Donners-tag	Mitt-woch	Diens-tag	
Sonntag nach Neujahr	2	3	4	5	—	Januar
1. Sonntag nach Epiphanias	9	10	11	12	13	Januar
2. Sonntag nach Epiphanias	16	17	18	19	20	Januar
3. Sonntag nach Epiphanias	—	—	—	—	—	
4. Sonntag nach Epiphanias	—	—	—	—	—	
5. Sonntag nach Epiphanias	—	—	—	—	—	
6. Sonntag nach Epiphanias	—	—	—	—	—	
Septuagesimae . . .	23	24	25	26	27	Januar
Fastnacht	8	9	10	11	12	Februar
Jubilate	17	18	19	20	21	April
Himmelfahrt	5	6	7	8	9	Mai
Pfingsten	15	16	17	18	19	Mai
Trinitatis	22	23	24	25	26	Mai
22. Sonntag nach Trinitatis	23	24	25	26	27	October
23. Sonntag nach Trinitatis	30	31	1	2	3	November
24. Sonntag nach Trinitatis	6	7	8	9	10	November
25. Sonntag nach Trinitatis	13	14	15	16	17	November
26. Sonntag nach Trinitatis	20	21	22	23	24	November
27. Sonntag nach Trinitatis	—	—	—	—	—	
1. Advent	27	28	29	30	1	December
2. Advent	4	5	6	7	8	December
3. Advent	11	12	13	14	15	December
4. Advent	18	19	20	21	22	December
Weihnachten	Sonn-abend	Sonn-abend	Frei-tag	Donners-tag	Mitt-woch	
Sonntag nach Weihn.	—	26	27	28	29	December
1. Quatember	16	17	18	19	20	Februar
2. Quatember	18	19	20	21	22	Mai
3. Quatember	21	15	16	17	18	September
4. Quatember	14	15	16	17	18	December

Tafel XXXI (Fortsetzung).

Ostern	1	2	3	4	5	April
Neujahr	Montag	Sonntag	Sonnabend	Freitag	Donnerstag	
Sonntag nach Neujahr	—	—	2	3	4	Januar
1. Sonntag nach Epiphanias	7	8	9	10	11	Januar
2.	14	15	16	17	18	Januar
3.	21	22	23	24	25	Januar
4.	—	—	—	—	—	
5.	—	—	—	—	—	
6.	—	—	—	—	—	
Septuagesimae	28	29	30	31	1	Februar
Fastnacht	13	14	15	16	17	Februar
Jubilate	22	23	24	25	26	April
Himmelfahrt	10	11	12	13	14	Mai
Pfingsten	20	21	22	23	24	Mai
Trinitatis	27	28	29	30	31	Mai
22. Sonntag nach Trinitatis	28	29	30	31	1	November
23.	4	5	6	7	8	November
24.	11	12	13	14	15	November
25.	18	19	20	21	22	November
26.	25	26	—	—	—	November
27.	—	—	—	—	—	
1. Advent	2	3	27	28	29	November
2.	9	10	4	5	6	December
3.	16	17	11	12	13	December
4.	23	24	18	19	20	December
Weihnachten	Dienstag	Montag	Sonntag	Sonnabend	Freitag	
Sonntag nach Weihn.	30	31	—	26	27	December
1. Quatember	21	22	23	24	25	Februar
2.	23	24	25	26	27	Mai
3.	19	20	21	15	16	September
4.	19	20	14	15	16	December

Tafel XXXI (Fortsetzung).

Ostern	6	7	8	9	10	April
Neujahr	Mittwoch	Dienstag	Montag	Sonntag	Sonnabend	
Sonntag nach Neujahr	5	—	—	—	2	Januar
1.	12	13	7	8	9	Januar
2.	19	20	14	15	16	Januar
3. Sonntag nach	26	27	21	22	23	Januar
4. Epiphanias	—	—	—	—	30	Januar
5.	—	—	—	—	—	
6.	—	—	—	—	—	
Septuagesimae . . .	2	3	4	5	6	Februar
Fastnacht	18	19	20	21	22	Februar
Jubilate	27	28	29	30	1	Mai
Himmelfahrt	15	16	17	18	19	Mai
Pfingsten	25	26	27	28	29	Mai
Trinitatis	1	2	3	4	5	Juni
22.	2	3	4	5	6	November
23.	9	10	11	12	13	November
24. Sonntag nach	16	17	18	19	20	November
25. Trinitatis	23	24	25	26	—	November
26.	—	—	—	—	—	
27.	—	—	—	—	—	
1.	30	1	2	3	27	November
2. Advent	7	8	9	10	4	December
3.	14	15	16	17	11	December
4.	21	22	23	24	18	December
Weihnachten	Donnerstag	Mittwoch	Dienstag	Montag	Sonntag	
Sonntag nach Weihn.	28	29	30	31	—	December
1.	26	27	28	1	2	März
2. Quatember	28	29	30	31	1	Juni
3.	17	18	19	20	21	September
4.	17	18	19	20	14	December

Tafel XXXI (Fortsetzung).

Ostern	11	12	13	14	15	April
Neujahr	Freitag	Donnerstag	Mittwoch	Dienstag	Montag	
Sonntag nach Neujahr	3	4	5	—	—	Januar
1. Sonntag nach Epiphanias	10	11	12	13	7	Januar
2. Sonntag nach Epiphanias	17	18	19	20	14	Januar
3. Sonntag nach Epiphanias	24	25	26	27	21	Januar
4. Sonntag nach Epiphanias	31	1	2	3	28	Januar
5. Sonntag nach Epiphanias	—	—	—	—	4	Februar
6. Sonntag nach Epiphanias	—	—	—	—	—	
Septuagesimae . . .	7	8	9	10	11	Februar
Fastnacht	23	24	25	26	27	Februar
Jubilate	2	3	4	5	6	Mai
Himmelfahrt	20	21	22	23	24	Mai
Pfingsten	30	31	1	2	3	Juni
Trinitatis	6	7	8	9	10	Juni
22. Sonntag nach Trinitatis	7	8	9	10	11	November
23. Sonntag nach Trinitatis	14	15	16	17	18	November
24. Sonntag nach Trinitatis	21	22	23	24	25	November
25. Sonntag nach Trinitatis	—	—	—	—	—	
26. Sonntag nach Trinitatis	—	—	—	—	—	
27. Sonntag nach Trinitatis	—	—	—	—	—	
1. Advent	28	29	30	1	2	December
2. Advent	5	6	7	8	9	December
3. Advent	12	13	14	15	16	December
4. Advent	19	20	21	22	23	December
Weihnachten	Sonnabend	Freitag	Donnerstag	Mittwoch	Dienstag	
Sonntag nach Weihn.	26	27	28	29	30	December
1. Quatember	3	4	5	6	7	März
2. Quatember	2	3	4	5	6	Juni
3. Quatember	15	16	17	18	19	September
4. Quatember	15	16	17	18	19	December

Tafel XXXI (Fortsetzung).

Ostern	16	17	18	19	20	April
Neujahr	Sonntag	Sonnabend	Freitag	Donnerstag	Mittwoch	
Sonntag nach Neujahr	—	2	3	4	5	Januar
1. Sonntag nach Epiphanias	8	9	10	11	12	Januar
2. Sonntag nach Epiphanias	15	16	17	18	19	Januar
3. Sonntag nach Epiphanias	22	23	24	25	26	Januar
4. Sonntag nach Epiphanias	29	30	31	1	2	Februar
5. Sonntag nach Epiphanias	5	6	7	8	9	Februar
6. Sonntag nach Epiphanias	—	—	—	—	—	
Septuagesimae	12	13	14	15	16	Februar
Fastnacht	28	1	2	3	4	März
Jubilate	7	8	9	10	11	Mai
Himmelfahrt	25	26	27	28	29	Mai
Pfingsten	4	5	6	7	8	Juni
Trinitatis	11	12	13	14	15	Juni
22. Sonntag nach Trinitatis	12	13	14	15	16	November
23. Sonntag nach Trinitatis	19	20	21	22	23	November
24. Sonntag nach Trinitatis	26	—	—	—	—	November
25. Sonntag nach Trinitatis	—	—	—	—	—	
26. Sonntag nach Trinitatis	—	—	—	—	—	
27. Sonntag nach Trinitatis	—	—	—	—	—	
1. Advent	3	27	28	29	30	November
2. Advent	10	4	5	6	7	December
3. Advent	17	11	12	13	14	December
4. Advent	24	18	19	20	21	December
Weihnachten	Montag	Sonntag	Sonnabend	Freitag	Donnerstag	
Sonntag nach Weihn.	31	—	26	27	28	December
1. Quatember	8	9	10	11	12	März
2. Quatember	7	8	9	10	11	Juni
3. Quatember	20	21	15	16	17	September
4. Quatember	20	14	15	16	17	December

Tafel XXXI (Fortsetzung).

Ostern	21	22	23	24	25	April
Neujahr	Dienstag	Montag	Sonntag	Sonnabend	Freitag	
Sonntag nach Neujahr	—	—	—	2	3	Januar
1. Sonntag nach Epiphanias	13	7	8	9	10	Januar
2. Sonntag nach Epiphanias	20	14	15	16	17	Januar
3. Sonntag nach Epiphanias	27	21	22	23	24	Januar
4. Sonntag nach Epiphanias	3	28	29	30	31	Februar
5. Sonntag nach Epiphanias	10	4	5	6	7	Februar
6. Sonntag nach Epiphanias	—	11	12	13	14	Februar
Septuagesimae . . .	17	18	19	20	21	Februar
Fastnacht	5	6	7	8	9	März
Jubilate	12	13	14	15	16	Mai
Himmelfahrt	30	31	1	2	3	Juni
Pfingsten	9	10	11	12	13	Juni
Trinitatis	16	17	18	19	20	Juni
22. Sonntag nach Trinitatis	17	18	19	20	21	November
23. Sonntag nach Trinitatis	24	25	26	—	—	November
24. Sonntag nach Trinitatis	—	—	—	—	—	
25. Sonntag nach Trinitatis	—	—	—	—	—	
26. Sonntag nach Trinitatis	—	—	—	—	—	
27. Sonntag nach Trinitatis	—	—	—	—	—	
1. Advent	1	2	3	27	28	November
2. Advent	8	9	10	4	5	December
3. Advent	15	16	17	11	12	December
4. Advent	22	23	24	18	19	December
Weihnachten	Mittwoch	Dienstag	Montag	Sonntag	Sonnabend	
Sonntag nach Weihn.	29	30	31	—	26	December
1. Quatember	13	14	15	16	17	März
2. Quatember	12	13	14	15	16	Juni
3. Quatember	18	19	20	21	15	September
4. Quatember	18	19	20	14	15	December

XXXII. Tafel zur Auflösung der Kepler'schen Gleichung:

$$M = E - e \sin E.$$

Mit den Argumenten E und e ergiebt sich M.

E	e = 0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
0°	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,00	0,00	0,00	0,000	0,000
1	0,9	0,8	0,7	0,6	0,5	0,40	0,30	0,20	0,100	0,000
2	1,8	1,6	1,4	1,2	1,0	0,80	0,60	0,40	0,200	0,000
3	2,7	2,4	2,1	1,8	1,5	1,20	0,90	0,60	0,301	0,001
4	3,6	3,2	2,8	2,4	2,0	1,60	1,20	0,80	0,403	0,003
5	4,5	4,0	3,5	3,0	2,5	2,00	1,50	1,01	0,505	0,006
6	5,4	4,8	4,2	3,6	3,0	2,41	1,81	1,21	0,610	0,011
7	6,3	5,6	4,9	4,2	3,5	2,81	2,11	1,41	0,716	0,018
8	7,2	6,4	5,6	4,8	4,0	3,22	2,42	1,62	0,823	0,026
9	8,1	7,2	6,3	5,4	4,5	3,62	2,73	1,83	0,933	0,037
10	9,0	8,0	7,0	6,0	5,0	4,03	3,04	2,04	1,046	0,051
11	9,9	8,8	7,7	6,6	5,5	4,44	3,35	2,25	1,161	0,068
12	10,8	9,6	8,4	7,2	6,0	4,85	3,66	2,47	1,279	0,088
13	11,7	10,4	9,1	7,8	6,6	5,27	3,98	2,69	1,400	0,111
14	12,6	11,2	9,8	8,5	7,1	5,68	4,30	2,91	1,525	0,139
15	13,5	12,0	10,6	9,1	7,6	6,10	4,62	3,14	1,654	0,171
16	14,4	12,8	11,3	9,7	8,1	6,52	4,95	3,37	1,786	0,207
17	15,3	13,6	12,0	10,3	8,6	6,95	5,27	3,60	1,923	0,248
18	16,2	14,5	12,7	10,9	9,1	7,38	5,61	3,84	2,065	0,295
19	17,1	15,3	13,4	11,5	9,7	7,81	5,94	4,08	2,212	0,347
20	18,0	16,1	14,1	12,2	10,2	8,24	6,28	4,32	2,363	0,404
21	18,9	16,9	14,8	12,8	10,7	8,68	6,63	4,57	2,520	0,467
22	19,9	17,7	15,6	13,4	11,3	9,12	6,98	4,83	2,683	0,537
23	20,8	18,5	16,3	14,0	11,8	9,57	7,33	5,09	2,852	0,613
24	21,7	19,3	17,0	14,7	12,3	10,02	7,69	5,36	3,027	0,696
25	22,6	20,2	17,7	15,3	12,9	10,47	8,05	5,63	3,207	0,786
26	23,5	21,0	18,5	16,0	13,4	10,93	8,42	5,91	3,395	0,884
27	24,4	21,8	19,2	16,6	14,0	11,39	8,79	6,19	3,589	0,988
28	25,3	22,6	19,9	17,2	14,6	11,86	9,17	6,48	3,791	1,101
29	26,2	23,4	20,7	17,9	15,1	12,33	9,56	6,78	4,001	1,223
30	27,1	24,3	21,4	18,5	15,7	12,81	9,95	7,08	4,217	1,352
31	28,0	25,1	22,1	19,2	16,2	13,29	10,34	7,39	4,442	1,491
32	29,0	25,9	22,9	19,9	16,8	13,78	10,75	7,71	4,674	1,638
33	29,9	26,8	23,6	20,5	17,4	14,28	11,16	8,04	4,915	1,794
34	30,8	27,6	24,4	21,2	18,0	14,78	11,57	8,37	5,165	1,961
35	31,7	28,4	25,1	21,9	18,6	15,28	12,00	8,71	5,423	2,137
36	32,6	29,3	25,9	22,5	19,2	15,79	12,43	9,06	5,690	2,322

Tafel XXXII (Fortsetzung).

E	e									
	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
36°	32,6	29,3	25,9	22,5	19,2	15,79	12,43	9,06	5,69	2,32
37	33,6	30,1	26,7	23,2	19,8	16,31	12,86	9,42	5,97	2,52
38	34,5	30,9	27,4	23,9	20,4	16,84	13,31	9,78	6,25	2,73
39	35,4	31,8	28,2	24,6	21,0	17,37	13,76	10,15	6,55	2,94
40	36,3	32,6	29,0	25,3	21,6	17,90	14,22	10,54	6,85	3,17
41	37,2	33,5	29,7	26,0	22,2	18,45	14,69	10,93	7,17	3,41
42	38,2	34,3	30,5	26,7	22,8	19,00	15,16	11,33	7,50	3,66
43	39,1	35,2	31,3	27,4	23,5	19,55	15,65	11,74	7,83	3,92
44	40,0	36,0	32,1	28,1	24,1	20,12	16,14	12,16	8,18	4,20
45	40,9	36,9	32,8	28,8	24,7	20,69	16,64	12,59	8,54	4,49
46	41,9	37,8	33,6	29,5	25,4	21,27	17,15	13,03	8,91	4,79
47	42,8	38,6	34,4	30,2	26,0	21,86	17,67	13,48	9,29	5,10
48	43,7	39,5	35,2	31,0	26,7	22,45	18,19	13,94	9,68	5,42
49	44,7	40,4	36,0	31,7	27,4	23,06	18,73	14,41	10,08	5,76
50	45,6	41,2	36,8	32,4	28,1	23,67	19,28	14,89	10,50	6,11
51	46,5	42,1	37,6	33,2	28,7	24,28	19,83	15,38	10,93	6,47
52	47,5	43,0	38,5	33,9	29,4	24,91	20,40	15,88	11,37	6,85
53	48,4	43,8	39,3	34,7	30,1	25,55	20,97	16,39	11,82	7,24
54	49,4	44,7	40,1	35,5	30,8	26,19	21,55	16,92	12,28	7,65
55	50,3	45,6	40,9	36,2	31,5	26,84	22,15	17,45	12,76	8,07
56	51,3	46,5	41,8	37,0	32,3	27,50	22,75	18,00	13,25	8,50
57	52,2	47,4	42,6	37,8	33,0	28,17	23,36	18,56	13,75	8,95
58	53,1	48,3	43,4	38,6	33,7	28,85	23,99	19,13	14,27	9,41
59	54,1	49,2	44,3	39,4	34,4	29,53	24,62	19,71	14,80	9,89
60	55,0	50,1	45,1	40,2	35,2	30,23	25,27	20,30	15,34	10,38
61	56,0	60,0	46,0	41,0	35,9	30,93	25,92	20,91	15,90	10,89
62	56,9	51,9	46,8	41,8	36,7	31,65	26,59	21,53	16,47	11,41
63	57,9	52,8	47,7	42,6	37,5	32,37	27,26	22,16	17,05	11,95
64	58,9	53,7	48,6	43,4	38,3	33,10	27,95	22,80	17,65	12,50
65	59,8	54,6	49,4	44,2	39,0	33,84	28,65	23,46	18,27	13,07
66	60,8	55,5	50,3	45,1	39,8	34,59	29,36	24,13	18,89	13,66
67	61,7	56,5	51,2	45,9	40,6	35,36	30,08	24,81	19,53	14,26
68	62,7	57,4	52,1	46,8	41,4	36,13	30,81	25,50	20,19	14,88
69	63,7	58,3	53,0	47,6	42,3	36,91	31,56	26,21	20,86	15,51
70	64,6	59,2	53,8	48,5	43,1	37,70	32,31	26,93	21,54	16,16
71	65,6	60,2	54,7	49,3	43,9	38,50	33,08	27,66	22,24	16,83
72	66,6	61,1	55,7	50,2	44,8	39,31	33,86	28,41	22,96	17,51

Tafel XXXII (Fortsetzung).

E	*e*									
	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
72°	66,6	61,1	55,7	50,2	44,8	39,3	33,9	28,4	23,0	17,5
73	67,5	62,0	56,6	51,1	45,6	40,1	34,6	29,2	23,7	18,2
74	68,5	63,0	57,5	52,0	46,5	41,0	35,4	29,9	24,4	18,9
75	69,5	63,9	58,4	52,9	47,3	41,8	36,3	30,7	25,2	19,7
76	70,4	64,9	59,3	53,8	48,2	42,6	37,1	31,5	26,0	20,4
77	71,4	65,8	60,3	54,7	49,1	43,5	37,9	32,3	26,8	21,2
78	72,4	66,8	61,2	55,6	50,0	44,4	38,8	33,2	27,6	22,0
79	73,4	67,8	62,1	56,5	50,9	45,3	39,6	34,0	28,4	22,8
80	74,4	68,7	63,1	57,4	51,8	46,1	40,5	34,9	29,2	23,6
81	75,3	69,7	64,0	58,4	52,7	47,0	41,4	35,7	30,1	24,4
82	76,3	70,7	65,0	59,3	53,6	48,0	42,3	36,6	30,9	25,3
83	77,3	71,6	65,9	60,3	54,6	48,9	43,2	37,5	31,8	26,1
84	78,3	72,6	66,9	61,2	55,5	49,8	44,1	38,4	32,7	27,0
85	79,3	73,6	67,9	62,2	56,5	50,8	45,0	39,3	33,6	27,9
86	80,3	74,6	68,9	63,1	57,4	51,7	46,0	40,3	34,6	28,8
87	81,3	75,6	69,8	64,1	58,4	52,7	46,9	41,2	35,5	29,8
88	82,3	76,5	70,8	65,1	59,4	53,6	47,9	42,2	36,5	30,7
89	83,3	77,5	71,8	66,1	60,4	54,6	48,9	43,2	37,4	31,7
90	84,3	78,5	72,8	67,1	61,4	55,6	49,9	44,2	38,4	32,7
91	85,3	79,5	73,8	68,1	62,4	56,6	50,9	45,2	39,4	33,7
92	86,3	80,5	74,8	69,1	63,4	57,6	51,9	46,2	40,5	34,7
93	87,3	81,6	75,8	70,1	64,4	58,7	52,9	47,2	41,5	35,8
94	88,3	82,6	76,9	71,1	65,4	59,7	54,0	48,3	42,6	36,8
95	89,3	83,6	77,9	72,2	66,5	60,8	55,0	49,3	43,6	37,9
96	90,3	84,6	78,9	73,2	67,5	61,8	56,1	50,4	44,7	39,0
97	91,3	85,6	79,9	74,3	68,6	62,9	57,2	51,5	45,8	40,1
98	92,3	86,7	81,0	75,3	69,6	64,0	58,3	52,6	46,9	41,3
99	93,3	87,7	82,0	76,4	70,7	65,0	59,4	53,7	48,1	42,4
100	94,4	88,7	83,1	77,4	71,8	66,1	60,5	54,9	49,2	43,6
101	95,4	89,8	84,1	78,5	72,9	67,3	61,6	56,0	50,4	44,8
102	96,4	90,8	85,2	79,6	74,0	68,4	62,8	57,2	51,6	46,0
103	97,4	91,8	86,3	80,7	75,1	69,5	63,9	58,3	52,8	47,2
104	98,4	92,9	87,3	81,8	76,2	70,6	65,1	59,5	54,0	48,4
105	99,5	93,9	88,4	82,9	77,3	71,8	66,3	60,7	55,2	49,7
106	100,5	95,0	89,5	84,0	78,5	73,0	67,4	61,9	56,4	50,9
107	101,5	96,0	90,6	85,1	79,6	74,1	68,6	63,2	57,7	52,2
108	102,6	97,1	91,7	86,2	80,8	75,3	69,9	64,4	59,0	53,5

Tafel XXXII (Fortsetzung).

E	e									
	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
108°	102,6	97,1	91,7	86,2	80,8	75,3	69,9	64,4	59,0	53,5
109	103,6	98.2	92,7	87,3	81,9	76,5	71,1	65,7	60,2	54,8
110	104,6	99,2	93,8	88,5	83,1	77,7	72,3	66,9	61,5	56,2
111	105,7	100,3	95,0	89,6	84,3	78,9	73,6	68,2	62,9	57,5
112	106,7	101,4	96,1	90,8	85,4	80,1	74,8	69,5	64,2	58,9
113	107,7	102,5	97,2	91,9	86,6	81,4	76,1	70,8	65,5	60,3
114	108,8	103,5	98,3	93,1	87,8	82,6	77,4	72,1	66,9	61,7
115	109,8	104,6	99,4	94,2	89,0	83,8	78,7	73,5	68,3	63,1
116	110,9	105,7	100,6	95,4	90,3	85,1	80,0	74,8	69,7	64,5
117	111,9	106,8	101,7	96,6	91,5	86,4	81,3	76,2	71,1	65,9
118	112,9	107,9	102,8	97,8	92,7	87,6	82,6	77,5	72,5	67,4
119	114,0	109,0	104,0	99,0	93,9	88,9	83,9	78,9	73,9	68,9
120	115,0	110,1	105,1	100,2	95,2	90,2	85,3	80,3	75,3	70,4
121	116,0	111,2	106,3	101,4	96,4	91,5	86,6	81,7	76,8	71,9
122	117,1	112,3	107,4	102,6	97,7	92,8	88,0	83,1	78,3	73,4
123	118,2	113,4	108,6	103,8	99,0	94,2	89,4	84,6	79,8	74,9
124	119,3	114,5	109,8	105,0	100,3	95,5	90,8	86,0	81,3	76,5
125	120,3	115,6	110,9	106,2	101,5	96,8	92,1	87,5	82,8	78,1
126	121,4	116,7	112,1	107,5	102,8	98,2	93,6	88,9	84,3	79,6
127	122,4	117,8	113,3	108,7	104,1	99,5	95,0	90,4	85,8	81,2
128	123,5	119,0	114,5	109,9	105,4	100,9	96,4	91,9	87,4	82,9
129	124,5	120,1	115,6	111,2	106,7	102,3	97,8	93,4	88,9	84.5
130	125,6	121,2	116,8	112,4	108,1	103,7	99,3	94,9	90,5	86,1
131	126,7	122,4	118,0	113,7	109,4	105,1	100,7	96.4	92,1	87,8
132	127,7	123,5	119,2	115,0	110,7	106,5	102,2	97,9	93,7	89,4
133	128,8	124,6	120,4	116,2	112,0	107,9	103,7	99,5	95,3	91,1
134	129,9	125,8	121.6	117,5	113,4	109,3	105,1	101,0	96,9	92,8
135	130,9	126,9	122,8	118,8	114,7	110,7	106,6	102,6	98.5	94,5
136	132,0	128,0	124,1	120,1	116,1	112,1	108,1	104,2	100.2	96,2
137	133,1	129,2	125,3	121,4	117,5	113,6	109,6	105,7	101,8	97,9
138	134,2	130,3	126,5	122,7	118,8	115,0	111,2	107,3	103,5	99,6
139	135,2	131,5	127,7	124,0	120,2	116.4	112,7	108,9	105,2	101,4
140	136,3	132,6	129,0	125,3	121,6	117,9	114,2	110,5	106,9	103,2
141	137,4	133,8	130,2	126,6	123,0	119,4	115,8	112,2	108,5	104,9
142	138,5	134,9	131,4	127,9	124,4	120,8	117.3	113,8	110,3	106,7
143	139,6	136,1	132,7	129,2	125,8	122,3	118,9	115,4	112,0	108,5
144	140,6	137,3	133,9	130,5	127,2	123,8	120,4	117,1	113,7	110,3

Tafel XXXII (Fortsetzung).

E	*e*									
	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
144°	140,6	137,3	133,9	130,5	127,2	123,8	120,4	117,1	113,7	110,3
145	141,7	138,4	135,1	131,9	128,6	125,3	122,0	118,7	115,4	112,1
146	142,8	139,6	136,4	133,2	130,0	126,8	123,6	120,4	117,2	114,0
147	143,9	140,8	137,6	134,5	131,4	128,3	125,2	122,0	118,9	115,8
148	145,0	141,9	138,9	135,9	132,8	129,8	126,7	123,7	120,7	117,6
149	146,0	143,1	140,1	137,2	134,2	131,3	128,3	125,4	122,4	119,5
150	147,1	144,3	141,4	138,5	135,7	132,8	129,9	127,1	124,2	121,4
151	148,2	145,4	142,7	139,9	137,1	134,3	131,6	128,8	126,0	123,2
152	149,3	146,6	143,9	141,2	138,6	135,9	133,2	130,5	127,8	125,1
153	150,4	147,8	145,2	142,6	140,0	137,4	134,8	132,2	129,6	127,0
154	151,5	149,0	146,5	144,0	141,4	138,9	136,4	133,9	131,4	128,9
155	152,6	150,2	147,7	145,3	142,9	140,5	138,0	135,6	133,2	130,8
156	153,7	151,3	149,0	146,7	144,3	142,0	139,7	137,4	135,0	132,7
157	154,8	152,5	150,3	148,0	145,8	143,6	141,3	139,1	136,9	134,6
158	155,9	153,7	151,6	149,4	147,3	145,1	143,0	140,8	138,7	136,5
159	156,9	154,9	152,8	150,8	148,7	146,7	144,6	142,6	140,5	138,5
160	158,0	156,1	154,1	152,2	150,2	148,2	146,3	144,3	142,4	140,4
161	159,1	157,3	155,4	153,5	151,7	149,8	147,9	146,1	144,2	142,3
162	160,2	158,5	156,7	154,9	153,1	151,4	149,6	147,8	146,1	144,3
163	161,3	159,6	158,0	156,3	154,6	152,9	151,3	149,6	147,9	146,2
164	162,4	160,8	159,3	157,7	156,1	154,5	152,9	151,4	149,8	148,2
165	163,5	162,0	160,6	159,1	157,6	156,1	154,6	153,1	151,7	150,2
166	164,6	163,2	161,8	160,5	159,1	157,7	156,3	154,9	153,5	152,1
167	165,7	164,4	163,1	161,8	160,6	159,3	158,0	156,7	155,4	154,1
168	166,8	165,6	164,4	163,2	162,0	160,9	159,7	158,5	157,3	156,1
169	167,9	166,8	165,7	164,6	163,5	162,4	161,3	160,3	159,2	158,1
170	169,0	168,0	167,0	166,0	165,0	164,0	163,0	162,0	161,0	160,1
171	170,1	169,2	168,3	167,4	166,5	165,6	164,7	163,8	162,9	162,0
172	171,2	170,4	169,6	168,8	168,0	167,2	166,4	165,6	164,8	164,0
173	172,3	171,6	170,9	170,2	169,5	168,8	168,1	167,4	166,7	166,0
174	173,4	172,8	172,2	171,6	171,0	170,4	169,8	169,2	168,6	168,0
175	174,5	174,0	173,5	173,0	172,5	172,0	171,5	171,0	170,5	170,0
176	175,6	175,2	174,8	174,4	174,0	173,6	173,2	172,8	172,4	172,0
177	176,7	176,4	176,1	175,8	175,5	175,2	174,9	174,6	174,3	174,0
178	177,8	177,6	177,4	177,2	177,0	176,8	176,6	176,4	176,2	176,0
179	178,9	178,8	178,7	178,6	178,5	178,4	178,3	178,2	178,1	178,0
180	180,0	180,0	180,0	180,0	180,0	180,0	180,0	180,0	180,0	180,0

XXXIII. Tafel der Grössen $E_2^v E_4^v E_0^r E_4^r$.

θ	$\log E_2^v$	$\log E_4^v$	E_0^r	$\log E_4^r$
— 0,40	9n,81869	9n,93107	+ 1,56086	9,38847
39	82463	93027	57302	38588
38	83056	92949	58510	38331
37	83633	92871	59710	38077
36	84201	92793	60904	37826
35	84760	92716	62090	37577
34	85309	92639	63269	37331
33	85850	92563	64442	37086
32	86382	92488	65608	36845
31	86905	92413	66768	36605
— 0,30	9n,87420	9n,92339	+ 1,67921	9,36368
29	87928	92265	69067	36133
28	88427	92191	70208	35900
27	88920	92118	71343	35670
26	89405	92046	72471	35441
25	89883	91974	73594	35214
24	90354	91903	74711	34989
23	90818	91831	75822	34767
22	91276	91761	76928	34546
21	91728	91691	78028	34327
— 0,20	9n,92173	9n,91621	+ 1,79123	9,34110
19	92613	91552	80212	33894
18	93047	91483	81296	33681
17	93475	91414	82375	33469
16	93897	91346	83449	33259
15	94314	91279	84518	33050
14	94726	91211	85582	32843
13	95133	91145	86642	32638
12	95534	91078	87696	32434
11	95931	91012	88746	32232
— 0,10	9n,96323	9n,90946	+ 1,89791	9,32031
9	96710	90881	90831	31832
8	97093	90816	91867	31634
7	97471	90751	92899	31438
6	97845	90687	93926	31243
5	98214	90623	94949	31050
4	98579	90560	95967	30858
3	98940	90497	96982	30667
2	99297	90434	97992	30478
1	99651	90371	98998	30290
— 0,00	0n,00000	9n,90309	+ 2,00000	9,30103

Tafel XXXIII (Fortsetzung).

θ	$\log E_3^v$	$\log E_4^v$	E_0^r	$\log E_4^r$
+ 0,00	0_n,00000	9_n,90309	+ 2,00000	9,30103
1	00346	90247	00998	29918
2	00687	90186	01992	29733
3	01026	90124	02982	29550
4	01360	90063	03969	29368
5	01692	90003	04951	29188
6	02019	89942	05930	29008
7	02344	89882	06905	28830
8	02665	89823	07876	28653
9	02983	89763	08844	28477
+ 0,10	0_n,03298	9_n,89704	+ 2,09808	9,28302
11	03610	89645	10769	28128
12	03918	89587	11726	27956
13	04224	89528	12680	27784
14	04527	89470	13630	27613
15	04827	89413	14577	27444
16	05124	89355	15520	27275
17	05418	89298	16461	27108
18	05710	89241	17398	26941
19	05999	89185	18331	26776
+ 0,20	0_n,06285	9_n,89128	+ 2,19262	9,26611
21	06569	89072	20189	26447
22	06850	89016	21113	26285
23	07128	88961	22035	26123
24	07405	88905	22953	25962
25	07678	88850	23868	25802
26	07950	88795	24780	25643
27	08219	88740	25689	25485
28	08486	88686	26595	25328
29	08750	88632	27499	25171
+ 0,30	0_n,09012	9_n,88578	+ 2,28399	9,25016
31	09273	88524	29297	24861
32	09531	88471	30191	24707
33	09786	88417	31083	24554
34	10040	88364	31972	24402
35	10292	88312	32859	24250
36	10542	88259	33743	24100
37	10789	88207	34624	23950
38	11035	88155	35502	23801
39	11279	88103	36378	23652
+ 0,40	0_n,11521	9_n,88051	+ 2,37251	9,23505

XXXIV. Tafel für ξ mit dem Argumente W.

W	ξ	$\Delta\xi$	$\Delta^2\xi$	W	ξ	$\Delta\xi$	$\Delta^2\xi$	W	ξ	$\Delta\xi$	$\Delta^2\xi$
0,000	0,0000000	14		0,100	0,0006066	643		0,200	0,0025877	1401	
05	14	43	27	5	6709	677	34	5	27278	1444	43
10	57	73	30	10	7386	714	37	10	28722	1485	42
15	130	101	28	15	8098	747	33	15	30207	1529	44
20	231	131	30	20	8845	783	36	20	31736	1572	43
25	362	161	30	25	9628	819	36	25	33308	1616	44
30	523	191	30	30	10447	854	35	30	34924	1660	44
35	714	222	31	35	11301	892	38	35	36584	1705	45
40	936	252	30	40	12193	928	36	40	38289	1750	45
45	1188	283	31	45	12121	966	38	45	40039	1796	46
50	1471	314	31	50	14087	1003	37	50	41835	1842	46
55	1785	346	32	55	15090	1041	38	55	43677	1889	47
60	2131	378	32	60	16131	1080	39	60	45566	1936	47
65	2509	409	31	65	17211	1119	39	65	47502	1983	47
70	2918	442	33	70	18330	1157	38	70	49485	2032	49
75	3360	475	33	75	19487	1198	41	75	51517	2081	49
80	3835	508	33	80	20685	1237	39	80	53598	2130	49
85	4343	541	33	85	21922	1277	40	85	55728	2180	50
90	4884	574	33	90	23199	1319	42	90	57908	2231	51
95	5458			95	24518			95	60139		

XXXV. Tafel für $\log \eta^2$ mit dem Argumente h.

h	$\log \eta^2$	h	$\log \eta^2$
0,000	0,0000000	0,05	0,0444607
1	9634	6	525626
2	19243	7	604398
3	28800	8	681057
4	38332	9	755725
5	47832	10	828513
6	57298	11	899523
7	66732	12	968849
8	76133	13	1036576
9	85502	14	1102783
0,010	0,0094838	0,15	0,1167544
11	104144	16	1230927
12	113417	17	1292994
13	122660	18	1353804
14	131871	19	1413412
15	141052	20	1471869
16	150202	21	1529222
17	159322	22	1585516
18	168412	23	1640793
19	177471	24	1695092
0,020	0,0186501	0,25	0,1748451
21	195502	26	1800903
22	204474	27	1852483
23	213416	28	1903220
24	222330	29	1953145
25	231215	30	2002285
26	240071	31	2050667
27	248900	32	2098315
28	257700	33	2145253
29	266473	34	2191505
0,030	0,0275218	0,35	0,2237090
31	283936	36	2282031
32	292626	37	2326346
33	301290	38	2370053
34	309926	39	2413171
35	318536	40	2455716
36	327120	41	2497705
37	335677	42	2539153
38	344208	43	2580075
39	352713	44	2620486
0,040	0,0369646	0,45	0,2660397
41	378075	46	2699821
42	386478	47	2738778
43	394856	48	2777272
44	403209	49	2815316
45	411537	50	2852923
46	419841	51	2890102
47	428121	52	2926864
48	436376	53	2963220
49		54	2999178

Tafeln zur Auflösung des Kepler'schen Problems.

Schreibt man die aufzulösende Gleichung

$$E - e \sin E = M$$

wie folgt:

$$E - M = e \cos M \,.\, \sin (E - M) + e \sin M \,.\, \cos (E - M)$$

und setzt der Kürze wegen

$$E - M = \varphi$$
$$e \cos M = a$$
$$e \sin M = b$$

und benutzt die von Lambert (Beiträge II, §. 76) gegebene Gleichung

$$\varphi = \frac{28 \sin \varphi + \sin 2\varphi}{18 + 12 \cos \varphi} + \frac{\varphi^7}{2100} + \cdots,$$

so folgt mit Weglassung der Glieder

$$\frac{\varphi^7}{2100} + \cdots$$

$$tg\, \varphi = \frac{b}{f - a},$$

wobei

$$f = \frac{14 + \cos \varphi}{9 + 6 \cos \varphi}.$$

Die nachstehende Tafel giebt diese Grösse mit dem Argumente $\cos \delta_0$ für alle Fälle, in welchen $E - M < 11^\circ$.

Man hat also folgende Operationen auszuführen:

$$a = e \cos M$$
$$b = e \sin M$$
$$tg\, \varphi_0 = \frac{b}{1 - a}$$

aus der Tafel

$$f_0 = \frac{14 + \cos \varphi_0}{9 + 6 \cos \varphi_0}$$

mit dem Argument $\cos \varphi_0$

$$tg\, \varphi_1 = \frac{b}{f_0 - a}.$$

Eventuell kann diese Rechnung wiederholt werden. Beispiel (Oppolzer I, S. 56):

$$\log e = 9{,}389726$$

$$M = 332^0\,28'\,55''.$$

Man findet

$$tg\,\varphi_0 = 9^n{,}160946.$$

Aus der Tafel

$$f_0 = 1{,}003457$$

damit

$$E - M = -\,8^0\,12'\,23''$$

also

$$E = 324^0\,16'\,32'',$$

während Oppolzer bei siebenstelliger Rechnung

$$E = 324^0\,16'\,29'',$$

findet. f kann man auch direct berechnen. Setzt man nämlich

$$\cos\varphi = 1 - \delta,$$

so wird

$$f = 1 + \frac{\delta}{3} + \frac{2\,\delta^2}{15} + \frac{4\,\delta^3}{75} + \frac{8\,\delta^4}{375} + \cdots + \frac{2^{k-1}}{3\,.\,5^{k-1}}\,\delta^k + \cdots$$

Mit Hülfe dieser Reihe ist auch die nachstehende Tafel berechnet. Noch schneller kommt man zum Ziele, wenn man der Tafel XXXII einen Näherungswerth für φ_0 entnimmt. Dann fällt der erste Theil der Rechnung hinweg.

Für die logarithmische Berechnung kann man der Reihe f noch die Gestalt geben

$$f = 1 + \frac{\delta}{3}\left\{1 + \frac{2}{5}\,\delta\left\{1 + \frac{2}{5}\,\delta\left\{1 + \frac{2}{5}\,\delta\left\{1 + \cdots\right.\right.\right.\right.$$

Man braucht also zur Berechnung von f nur die Logarithmen

$$\frac{\delta}{3} \quad \text{und} \quad \frac{2\,\delta}{5}.$$

Nach dieser Formel hat die directe Berechnung von f gar keine Schwierigkeit.

cos φ	*f*	*cos φ*	*f*	*cos φ*	*f*
1,000000	1,000000	0,99960	1,000133	0,99920	1,000267
0,99999	3	0,99959	137	0,99919	270
8	7	8	140	8	273
7	10	7	143	7	277
6	13	6	147	6	280
5	17	5	150	5	283
4	20	4	153	4	287
3	23	3	157	3	290
2	27	2	160	2	293
1	30	1	163	1	297
0,99990	1,000033	0,99950	1,000167	0,99910	1,000300
0,99989	37	0,99949	170	0,99909	303
8	40	8	173	8	307
7	43	7	177	7	310
6	47	6	180	6	313
5	50	5	183	5	317
4	53	4	187	4	320
3	57	3	190	3	323
2	60	2	193	2	327
1	63	1	197	1	330
0,99980	1,000067	0,99940	1,000200	0,99900	1,000333
0,99979	70	0,99939	203	0,99899	337
8	73	8	207	8	340
7	77	7	210	7	343
6	80	6	213	6	347
5	83	5	217	5	350
4	87	4	220	4	353
3	90	3	223	3	357
2	93	2	227	2	360
1	97	1	230	1	363
0,99970	1,000100	0,99930	1,000233	0,99890	1,000367
0,99969	103	0,99929	237	0,99889	370
8	107	8	240	8	373
7	110	7	243	7	377
6	113	6	247	6	380
5	117	5	250	5	383
4	120	4	253	4	387
3	123	3	257	3	390
2	127	2	260	2	393
1	130	1	263	1	397

cos φ	f	cos φ	f	cos φ	f
0,99880	1,000400	0,99840	1,000533	0,99800	1,000668
0,99879	403	0,99839	537	0,99799	671
8	407	8	540	8	675
7	410	7	543	7	678
6	413	6	547	6	681
5	417	5	550	5	685
4	420	4	553	4	688
3	423	3	557	3	691
2	427	2	560	2	695
1	430	1	563	1	698
0,99870	1,000433	0,99830	1,000567	0,99790	1,000701
0,99869	437	0,99829	570	0,99789	705
8	440	8	573	8	708
7	443	7	577	7	711
6	447	6	580	6	715
5	450	5	583	5	718
4	453	4	587	4	721
3	457	3	590	3	725
2	460	2	593	2	728
1	463	1	597	1	731
0,99860	1,000467	0,99820	1,000600	0,99780	1,000735
0,99859	470	0,99819	603	0,99779	738
8	473	8	607	8	741
7	477	7	610	7	745
6	480	6	613	6	748
5	483	5	617	5	751
4	487	4	620	4	755
3	490	3	623	3	758
2	493	2	627	2	761
1	497	1	630	1	765
0,99850	1,000500	0,99810	1,000633	0,99770	1,000768
0,99849	503	0,99809	637	0,99769	771
8	507	8	640	8	775
7	510	7	643	7	778
6	513	6	647	6	781
5	517	5	650	5	785
4	520	4	653	4	788
3	523	3	657	3	791
2	527	2	660	2	795
1	530	1	664	1	798

cos φ	*f*	*cos φ*	*f*	*cos φ*	*f*
0,99760	1,000801	0,99720	1,000934	0,99680	1,001067
0,99759	805	0,99719	937	0,99679	1071
8	808	8	941	8	1074
7	811	7	944	7	1077
6	815	6	947	6	1081
5	818	5	951	5	1084
4	821	4	954	4	1087
3	825	3	957	3	1091
2	828	2	961	2	1094
1	831	1	964	1	1098
0,99750	1,000834	0,99710	1,000967	0.99670	1,001101
0,99749	837	0,99709	971	0,99669	1104
8	841	8	974	8	1107
7	844	7	977	7	1111
6	847	6	981	6	1114
5	851	5	984	5	1117
4	854	4	987	4	1121
3	857	3	991	3	1124
2	861	2	994	2	1127
1	864	1	998	1	1131
0,99740	1,000867	0,99700	1,001001	0,99660	1,001134
0,99739	871	0,99699	1004	0,99659	1137
8	874	8	1007	8	1141
7	877	7	1011	7	1144
6	881	6	1014	6	1147
5	884	5	1017	5	1151
4	887	4	1021	4	1154
3	891	3	1024	3	1157
2	894	2	1027	2	1161
1	897	1	1031	1	1164
0,99730	1,000901	0,99690	1,001034	0,99650	1,001168
0,99729	904	0,99689	1037	0,99649	1171
8	907	8	1041	8	1174
7	911	7	1044	7	1178
6	914	6	1047	6	1181
5	917	5	1051	5	1184
4	921	4	1054	4	1188
3	924	3	1057	3	1191
2	927	2	1061	2	1194
1	931	1	1064	1	1198

cos φ	*f*	*cos φ*	*f*	*cos φ*	*f*
0,99640	1,001201	0,99600	1,001335	0,99560	1,001469
0,99639	1204	0,99599	1338	0,99559	1473
8	1208	8	1342	8	1476
7	1211	7	1345	7	1479
6	1214	6	1348	6	1483
5	1218	5	1352	5	1486
4	1221	4	1355	4	1489
3	1224	3	1358	3	1493
2	1228	2	1362	2	1496
1	1231	1	1365	1	1499
0,99630	1,001235	0,99590	1,001369	0,99550	1,001503
0,99629	1238	0,99589	1372	0,99549	1506
8	1241	8	1375	8	1510
7	1245	7	1379	7	1513
6	1248	6	1382	6	1516
5	1251	5	1385	5	1520
4	1255	4	1389	4	1523
3	1258	3	1392	3	1526
2	1261	2	1395	2	1530
1	1265	1	1399	1	1533
0,99620	1,001268	0,99580	1,001402	0,99540	1,001536
0,99619	1271	0,99579	1405	0,99539	1540
8	1275	8	1409	8	1543
7	1278	7	1412	7	1546
6	1281	6	1415	6	1550
5	1285	5	1419	5	1553
4	1288	4	1422	4	1556
3	1291	3	1425	3	1560
2	1295	2	1429	2	1563
1	1298	1	1432	1	1566
0,99610	1,001302	0,99570	1,001436	0,99530	1,001570
0,99609	1305	0,99569	1439	0,99529	1573
8	1308	8	1443	8	1576
7	1312	7	1446	7	1580
6	1315	6	1449	6	1583
5	1318	5	1453	5	1586
4	1322	4	1456	4	1590
3	1325	3	1459	3	1593
2	1328	2	1463	2	1596
1	1332	1	1466	1	1600

cos φ	*f*	*cos φ*	*f*	*cos φ*	*f*
0,99520	1,001603	0,99480	1,001737	0,99440	1,001871
0,99519	1606	0,99479	1740	0,99439	1874
8	1610	8	1743	8	1877
7	1613	7	1747	7	1881
6	1616	6	1750	6	1884
5	1620	5	1753	5	1887
4	1623	4	1757	4	1891
3	1626	3	1760	3	1894
2	1630	2	1763	2	1897
1	1633	1	1767	1	1901
0,99510	1,001636	0,99470	1,001770	0,99430	1,001904
0,99509	1640	0,99469	1773	0,99429	1907
8	1643	8	1777	8	1911
7	1646	7	1780	7	1914
6	1650	6	1783	6	1917
5	1653	5	1787	5	1921
4	1656	4	1790	4	1924
3	1660	3	1793	3	1927
2	1663	2	1797	2	1931
1	1666	1	1800	1	1934
0,99500	1,001670	0,99460	1,001804	0,99420	1,001937
0,99499	1673	0,99459	1807	0,99419	1941
8	1676	8	1810	8	1944
7	1680	7	1814	7	1947
6	1683	6	1817	6	1951
5	1686	5	1820	5	1954
4	1690	4	1824	4	1957
3	1693	3	1827	3	1961
2	1696	2	1830	2	1964
1	1700	1	1834	1	1967
0,99490	1,001703	0,99450	1,001837	0,99410	1,001971
0,99489	1706	0,99449	1840	0,99409	1974
8	1710	8	1844	8	1977
7	1713	7	1847	7	1981
6	1716	6	1850	6	1984
5	1720	5	1854	5	1987
4	1723	4	1857	4	1991
3	1726	3	1860	3	1994
2	1730	2	1864	2	1997
1	1733	1	1867	1	2001

cos φ	f	cos φ	f	cos φ	f
0,99400	1,002005	0,99360	1,002139	0,99320	1,002273
0,99399	2008	0,99359	2142	0,99319	2276
8	2011	8	2145	8	2279
7	2015	7	2149	7	2283
6	2018	6	2152	6	2286
5	2021	5	2155	5	2289
4	2025	4	2159	4	2293
3	2028	3	2162	3	2296
2	2031	2	2165	2	2299
1	2035	1	2169	1	2303
0,99390	1,002038	0,99350	1,002172	0,99310	1,002306
0,99389	2041	0,99349	2175	0,99309	2309
8	2045	8	2179	8	2313
7	2048	7	2182	7	2316
6	2051	6	2185	6	2319
5	2055	5	2189	5	2323
4	2058	4	2192	4	2326
3	2061	3	2195	3	2329
2	2065	2	2199	2	2333
1	2068	1	2202	1	2336
0,99380	1,002072	0,99340	1,002206	0,99300	1,002340
0,99379	2075	0,99339	2209	0,99299	2343
8	2078	8	2212	8	2346
7	2082	7	2216	7	2350
6	2085	6	2219	6	2353
5	2088	5	2222	5	2356
4	2092	4	2226	4	2360
3	2095	3	2229	3	2363
2	2098	2	2232	2	2366
1	2102	1	2236	1	2370
0,99370	1,002105	0,99330	1,002239	0,99290	1,002373
0,99369	2108	0,99329	2242	0,99289	2376
8	2112	8	2246	8	2380
7	2115	7	2249	7	2383
6	2118	6	2252	6	2386
5	2122	5	2256	5	2390
4	2125	4	2259	4	2393
3	2128	3	2262	3	2396
2	2132	2	2266	2	2400
1	2135	1	2269	1	2403

cos φ	*f*	*cos φ*	*f*	*cos φ*	*f*
0,99280	1,002407	0,99240	1,002541	0,99200	1,002675
0,99279	2410	0,99239	2544	0,99199	2678
8	2413	8	2548	8	2682
7	2417	7	2551	7	2685
6	2420	6	2554	6	2688
5	2423	5	2558	5	2692
4	2427	4	2561	4	2695
3	2430	3	2564	3	2698
2	2433	2	2568	2	2702
1	2437	1	2571	1	2705
0,99270	1,002440	0,99230	1,002574	0,99190	1,002708
0,99269	2443	0,99229	2578	0,99189	2712
8	2447	8	2581	8	2715
7	2450	7	2584	7	2718
6	2453	6	2588	6	2722
5	2457	5	2591	5	2725
4	2460	4	2594	4	2728
3	2463	3	2598	3	2732
2	2467	2	2601	2	2735
1	2470	1	2604	1	2738
0,99260	1,002474	0,99220	1,002608	0,99180	1,002742
0,99259	2477	0,99219	2611	0,99179	2745
8	2480	8	2614	8	2748
7	2484	7	2618	7	2752
6	2487	6	2621	6	2755
5	2490	5	2624	5	2758
4	2494	4	2628	4	2762
3	2497	3	2631	3	2765
2	2500	2	2634	2	2768
1	2504	1	2638	1	2772
0,99250	1,002507	0,99210	1,002642	0,99170	1,002776
0,99249	2510	0,99209	2645	0,99169	2779
8	2513	8	2648	8	2783
7	2517	7	2652	7	2786
6	2520	6	2655	6	2789
5	2523	5	2658	5	2793
4	2527	4	2662	4	2796
3	2530	3	2665	3	2799
2	2533	2	2668	2	2803
1	2537	1	2672	1	2806

cos φ	*f*	*cos φ*	*f*	*cos φ*	*f*
0,99160	1,002809	0,99120	1,002944	0,99080	1,003078
0,99159	2813	0,99119	2947	0,99079	3081
8	2816	8	2950	8	3084
7	2819	7	2954	7	3088
6	2823	6	2957	6	3091
5	2826	5	2960	5	3094
4	2829	4	2964	4	3098
3	2833	3	2967	3	3101
2	2836	2	2970	2	3104
1	2839	1	2974	1	3108
0,99150	1,002843	0,99110	1,002978	0,99070	1,003112
0,99149	2846	0,99109	2981	0,99069	3115
8	2850	8	2984	8	3119
7	2853	7	2988	7	3122
6	2856	6	2991	6	3125
5	2860	5	2994	5	3129
4	2863	4	2998	4	3132
3	2866	3	3001	3	3135
2	2870	2	3004	2	3139
1	2873	1	3008	1	3142
0,99140	1,002876	0,99100	1,003011	0,99060	1,003145
0,99139	2880	0,99099	3014	0,99059	3149
8	2883	8	3018	8	3152
7	2886	7	3021	7	3155
6	2890	6	3024	6	3159
5	2893	5	3028	5	3162
4	2896	4	3031	4	3165
3	2900	3	3034	3	3169
2	2903	2	3038	2	3172
1	2906	1	3041	1	3175
0,99130	1,002910	0,99090	1,003044	0,99050	1,003179
0,99129	2913	0,99089	3048	0,99049	3182
8	2916	8	3051	8	3185
7	2920	7	3054	7	3189
6	2923	6	3058	6	3192
5	2926	5	3061	5	3195
4	2930	4	3064	4	3199
3	2933	3	3068	3	3202
2	2936	2	3071	2	3205
1	2940	1	3074	1	3209

cos φ	*f*	*cos φ*	*f*	*cos φ*	*f*
0,99040	1,003212	0,99000	1,003347	0,98960	1,003481
0,99039	3215	0,98999	3350	0,98959	3484
8	3219	8	3353	8	3487
7	3222	7	3357	7	3491
6	3225	6	3360	6	3494
5	3229	5	3363	5	3497
4	3232	4	3367	4	3501
3	3235	3	3370	3	3504
2	3239	2	3373	2	3507
1	3242	1	3377	1	3511
0,99030	1,003246	0,98990	1,003380	0,98950	1,003515
0,99029	3249	0,98989	3383	0,98949	3518
8	3253	8	3387	8	3522
7	3256	7	3390	7	3525
6	3259	6	3393	6	3528
5	3263	5	3397	5	3532
4	3266	4	3400	4	3535
3	3269	3	3403	3	3538
2	3273	2	3407	2	3542
1	3276	1	3410	1	3545
0,99020	1,003280	0,98980	1,003414	0,98940	1,003548
0,99019	3283	0,98979	3417	0,98939	3552
8	3287	8	3421	8	3555
7	3290	7	3424	7	3558
6	3293	6	3427	6	3562
5	3297	5	3431	5	3565
4	3300	4	3434	4	3568
3	3303	3	3437	3	3572
2	3307	2	3441	2	3575
1	3310	1	3444	1	3578
0,99010	1,003313	0,98970	1,003447	0,98930	1,003582
0,99009	3317	0,98969	3451	0,98929	3585
8	3320	8	3454	8	3588
7	3323	7	3457	7	3592
6	3327	6	3461	6	3595
5	3330	5	3464	5	3598
4	3333	4	3467	4	3602
3	3337	3	3471	3	3605
2	3340	2	3474	2	3608
1	3343	1	3477	1	3612

cos φ	f	cos φ	f	cos φ	f
0,98920	1,003616	0,98880	1,003750	0,98840	1,003885
0,98919	3619	0,98879	3753	0,98839	3888
8	3623	8	3757	8	3892
7	3626	7	3760	7	3895
6	3629	6	3763	6	3898
5	3633	5	3767	5	3902
4	3636	4	3770	4	3905
3	3639	3	3773	3	3908
2	3643	2	3777	2	3912
1	3646	1	3780	1	3915
0,98910	1,003649	0,98870	1,003784	0,98830	1,003919
0,98909	3653	0,98869	3787	0,98829	3922
8	3656	8	3791	8	3926
7	3659	7	3794	7	3929
6	3663	6	3797	6	3932
5	3666	5	3801	5	3936
4	3669	4	3804	4	3939
3	3673	3	3807	3	3942
2	3676	2	3811	2	3946
1	3679	1	3814	1	3949
0,98900	1,003683	0,98860	1,003818	0,98820	1,003952
0,98899	3686	0,98859	3821	0,98819	3956
8	3689	8	3825	8	3959
7	3693	7	3828	7	3962
6	3696	6	3831	6	3966
5	3699	5	3835	5	3969
4	3703	4	3838	4	3972
3	3706	3	3841	3	3976
2	3709	2	3845	2	3979
1	3713	1	3848	1	3982
0,98890	1,003716	0,98850	1,003851	0,98810	1,003986
0,98889	3719	0,98849	3854	0,98809	3989
8	3723	8	3858	8	3992
7	3726	7	3861	7	3996
6	3729	6	3864	6	3999
5	3733	5	3868	5	4002
4	3736	4	3871	4	4006
3	3739	3	3874	3	4009
2	3743	2	3878	2	4012
1	3746	1	3881	1	4016

cos φ	f	cos φ	f	cos φ	f
0,98800	1,004019	0,98760	1,004153	0,98720	1,004288
0,98799	4022	0,98759	4156	0,98719	4291
8	4026	8	4160	8	4295
7	4029	7	4163	7	4298
6	4032	6	4166	6	4301
5	4036	5	4170	5	4305
4	4039	4	4173	4	4308
3	4042	3	4176	3	4311
2	4046	2	4180	2	4315
1	4049	1	4183	1	4318
0,98790	1,004053	0,98750	1,004187	0,98710	1,004322
0,98789	4056	0,98749	4190	0,98709	4325
8	4060	8	4194	8	4329
7	4063	7	4197	7	4332
6	4066	6	4200	6	4335
5	4070	5	4204	5	4339
4	4073	4	4207	4	4342
3	4076	3	4210	3	4345
2	4080	2	4214	2	4349
1	4083	1	4217	1	4352
0,98780	1,004086	0,98740	1,004221	0,98700	1,004356
0,98779	4090	0,98739	4224	0,98699	4359
8	4093	8	4228	8	4363
7	4096	7	4231	7	4366
6	4100	6	4234	6	4369
5	4103	5	4238	5	4373
4	4106	4	4241	4	4376
3	4110	3	4244	3	4379
2	4113	2	4248	2	4383
1	4116	1	4251	1	4386
0,98770	1,004120	0,98730	1,004254	0,98690	1,004389
0,98769	4123	0,98729	4258	0,98689	4393
8	4126	8	4261	8	4396
7	4130	7	4264	7	4399
6	4133	6	4268	6	4403
5	4136	5	4271	5	4406
4	4140	4	4274	4	4409
3	4143	3	4278	3	4413
2	4146	2	4281	2	4416
1	4150	1	4284	1	4419

cos φ	f	cos φ	f	cos φ	f
0,98680	1,004423	0,98640	1,004558	0,98600	1,004693
0,98679	4426	0,98639	4561	0,98599	4696
8	4429	8	4565	8	4700
7	4433	7	4568	7	4703
6	4436	6	4571	6	4706
5	4439	5	4575	5	4710
4	4443	4	4578	4	4713
3	4446	3	4581	3	4716
2	4449	2	4585	2	4720
1	4453	1	4588	1	4723
0,98670	1,004457	0,98630	1,004592	0,98590	1,004727
0,98669	4460	0,98629	4595	0,98589	4730
8	4464	8	4599	8	4734
7	4467	7	4602	7	4737
6	4470	6	4605	6	4740
5	4474	5	4609	5	4744
4	4477	4	4612	4	4747
3	4480	3	4615	3	4750
2	4484	2	4619	2	4754
1	4487	1	4622	1	4757
0,98660	1,004490	0,98620	1,004626	0,98580	1,004760
0,98659	4494	0,98619	4629	0,98579	4763
8	4497	8	4633	8	4767
7	4500	7	4636	7	4770
6	4504	6	4639	6	4773
5	4507	5	4643	5	4777
4	4510	4	4646	4	4780
3	4514	3	4649	3	4783
2	4517	2	4653	2	4787
1	4520	1	4656	1	4790
0,98650	1,004524	0,98610	1,004658	0,98570	1,004794
0,98649	4527	0,98609	4661	0,98569	4797
8	4531	8	4665	8	4801
7	4534	7	4668	7	4804
6	4537	6	4671	6	4807
5	4541	5	4675	5	4811
4	4544	4	4679	4	4814
3	4547	3	4682	3	4817
2	4551	2	4686	2	4821
1	4554	1	4689	1	4824

cos φ	*f*	*cos φ*	*f*	*cos φ*	*f*
0,98560	1,004827	0,98520	1,004962	0,98480	1,005097
0,98559	4831	0,98519	4965	0,98479	5100
8	4834	8	4969	8	5104
7	4837	7	4972	7	5107
6	4841	6	4975	6	5110
5	4844	5	4979	5	5114
4	4847	4	4982	4	5117
3	4851	3	4985	3	5120
2	4854	2	4989	2	5124
1	4857	1	4992	1	5127
0,98550	1,004861	0,98510	1,004996	0,98470	1,005131
0,98549	4864	0,98509	4999	0,98469	5134
8	4868	8	5003	8	5138
7	4871	7	5006	7	5141
6	4874	6	5009	6	5144
5	4878	5	5013	5	5148
4	4881	4	5016	4	5151
3	4884	3	5019	3	5154
2	4888	2	5023	2	5158
1	4891	1	5026	1	5161
0,98540	1,004895	0,98500	1,005030	0,98460	1,005165
0,98539	4898	0,98499	5033	0,98459	5168
8	4902	8	5037	8	5172
7	4905	7	5040	7	5175
6	4908	6	5043	6	5178
5	4912	5	5047	5	5182
4	4915	4	5050	4	5185
3	4918	3	5053	3	5188
2	4922	2	5057	2	5192
1	4925	1	5060	1	5195
0,98530	1,004929	0,98490	1,005064	0,98450	1,005199
0,98529	4932	0,98489	5067	0,98449	5202
8	4936	8	5071	8	5206
7	4939	7	5074	7	5209
6	4942	6	5077	6	5212
5	4946	5	5081	5	5216
4	4949	4	5084	4	5219
3	4952	3	5087	3	5222
2	4956	2	5091	2	5226
1	4959	1	5094	1	5229

cos φ	f	cos φ	f	cos φ	f
0,98440	1,005233	0,98400	1,005367	0,98360	1,005504
0,98439	5236	0,98399	5370	0,98359	5507
8	5240	8	5374	8	5511
7	5243	7	5377	7	5514
6	5246	6	5380	6	5517
5	5250	5	5384	5	5521
4	5253	4	5387	4	5524
3	5256	3	5390	3	5527
2	5260	2	5394	2	5531
1	5263	1	5397	1	5534
0,98430	1,005267	0,98390	1,005401	0,98350	1,005537
0,98429	5270	0,98389	5404	0,98349	5540
8	5274	8	5408	8	5544
7	5277	7	5411	7	5547
6	5280	6	5414	6	5550
5	5284	5	5418	5	5554
4	5287	4	5421	4	5557
3	5290	3	5424	3	5560
2	5294	2	5428	2	5563
1	5297	1	5431	1	5566
0,98420	1,005300	0,98380	1,005435	0,98340	1,005569
0,98419	5303	0,98379	5438	0,98339	5572
8	5307	8	5442	8	5576
7	5310	7	5445	7	5579
6	5313	6	5448	6	5582
5	5317	5	5452	5	5586
4	5320	4	5455	4	5589
3	5323	3	5458	3	5592
2	5327	2	5462	2	5596
1	5330	1	5465	1	5600
0,98410	1,005334	0,98370	1,005469	0,98330	1,005604
0,98409	5337	0,98369	5472	0,98329	5607
8	5341	8	5474	8	5611
7	5344	7	5479	7	5614
6	5347	6	5482	6	5617
5	5351	5	5484	5	5621
4	5354	4	5489	4	5624
3	5357	3	5492	3	5627
2	5361	2	5494	2	5631
1	5364	1	5500	1	5634

cos φ	*f*	*cos φ*	*f*	*cos φ*	*f*
0,98320	1,005638	0,98290	1,005739	0,98260	1,005840
0,98319	5641	0,98289	5742	0,98259	5843
8	5645	8	5746	8	5847
7	5648	7	5749	7	5850
6	5651	6	5752	6	5853
5	5655	5	5756	5	5857
4	5658	4	5759	4	5860
3	5661	3	5762	3	5863
2	5665	2	5766	2	5867
1	5668	1	5769	1	5870
0,98310	1,005671	0,98280	1,005772	0,98250	1,005874
0,98309	5674	0,98279	5775	0,98249	5877
8	5678	8	5779	8	5881
7	5681	7	5782	7	5884
6	5684	6	5785	6	5887
5	5688	5	5789	5	5891
4	5691	4	5792	4	5894
3	5694	3	5795	3	5897
2	5698	2	5799	2	5901
1	5701	1	5803	1	5904
0,98300	1,005705	0,98270	1,005807	0,98240	1,005907
0,98299	5708	0,98269	5810	0,98239	5910
8	5712	8	5814	8	5914
7	5715	7	5817	7	5917
6	5718	6	5820	6	5920
5	5722	5	5824	5	5924
4	5725	4	5827	4	5927
3	5728	3	5830	3	5930
2	5732	2	5834	2	5934
1	5735	1	5837	1	5937

Verzeichniss bemerkter Fehler und Nachträge.

Das nachstehende Verzeichniss enthält diejenigen Fehler, die vom Autor in dem nunmehr abgeschlossenen Werke gefunden worden sind; ausserdem bringt es hier und da einige wichtige Ergänzungen. Dass es nicht erschöpfend sein und sämmtliche Fehler oder alle etwa vorhandenen Lücken ausfüllen kann, dürfte einleuchten. Die Kraft des Einzelnen reicht wohl kaum aus, um ein so gewaltiges Material von Formeln, Tabellen u. s. w., wie das vorliegende, in wünschenswerth correcter Weise auszugestalten. Von den vielen Tausend Formeln, die das Buch bringt, dürfte daher vielleicht mitunter die eine oder andere eine, wenn auch oft nur kleine Unrichtigkeit enthalten; es war dem Autor trotz des besten Willens eben nicht möglich, eine jede Formel auf ihren genauen Werth zu prüfen und — wenn nöthig — richtig zu stellen; er muss sich in dieser Hinsicht auf die von ihm benutzten und überall angegebenen Quellen beziehen. Nur durch das Zusammenwirken Aller, die das Buch benutzen und ihm Interesse entgegenbringen und im vorkommenden Falle dem Autor oder der Verlagshandlung Mittheilung von etwa bemerkten Irrthümern oder Druckfehlern machen würden, dürfte es gelingen, die nächste Auflage so weit zu verbessern, dass sie, aussergewöhnliche Fälle ausgenommen, als ganz correct zu bezeichnen wäre.

Manche Formeln, von deren Richtigkeit ich mich nicht habe überzeugen können, waren so interessant, dass ich sie dem Leser nicht habe vorenthalten können. Es giebt jedoch gewisse Kriterien, an welchen man die Richtigkeit einer Formel erkennt. Diese sind:

Bei den unbestimmten Integralen die Differentiation. Ist

$$\int f(x)\,dx = \varphi(x),$$

so muss

$$f(x) = \frac{d\,\varphi(x)}{dx}$$

sein. Dadurch können alle in diesem Werke vorhandenen Integrale vor dem Gebrauche geprüft werden.

Bei den Dreiecksformeln ist es die cyklische Vertauschung nach dem Schema

$$\begin{matrix} & A & \\ b & & c \\ C & & B \\ & a & \end{matrix}$$

Eine jede allgemein geltende Dreiecksform muss eine cyklische Vertauschung gestatten.

Bei unendlichen Reihen ist endlich auf die Convergenz zu achten.

Es folgen nun die bemerkten Fehler und einige Ergänzungen.

Seite 2, Formel 8 ist $arctg\,\frac{x \pm y}{1 \mp y}$ del.

Bemerkung. del. ist Abkürzung für delendum, d. h. zu streichen.

Dafür zu ergänzen:

$$arctg\,{}^1/_2 + arctg\,{}^1/_5 + arctg\,{}^1/_8 = \frac{\pi}{4}$$

$$arctg\,{}^1/_3 + arctg\,{}^1/_5 + arctg\,{}^1/_7 + arctg\,{}^1/_8 = \frac{\pi}{4}$$

$$arctg\,{}^1/_7 + 2\,arctg\,{}^1/_3 = \frac{\pi}{4}$$

$$4\,arctg\,{}^1/_5 - arctg\,{}^1/_{239} = \frac{\pi}{4}$$

$$4\,arctg\,{}^1/_5 - arctg\,{}^1/_{70} + arctg\,{}^1/_{99} = \frac{\pi}{4}.$$

Seite 3 unten, §. 1, Zusatz. Aus

$$arcsin\sqrt{\frac{1-x}{2}} = p, \quad {}^1/_2\,arcsin\,x = q$$

kommt

$$2\,sin^2 p = 1 - x$$
$$sin\,2\,q = x,$$

daraus

$$2\,sin^2 p + sin\,2\,q = 1.$$

Es ist auch weiter (Seite 4) für $sin\,(\pi - 2\,q)$ gesetzt $cos\,2\,q$, was unrichtig ist. Es muss in der zu beweisenden Gleichung statt $\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{4}$ gesetzt werden, dann

$$p + q = \frac{\pi}{4}$$

$$1 = 2\,sin^2 p + sin\,2q = 2\,sin^2 p + sin\left(\frac{\pi}{2} - 2p\right),$$

woraus

$$1 - cos\,2p = 2\,sin^2 p.$$

Seite 4.

$$\frac{sin\,\alpha}{\alpha} = cos\,\frac{\alpha}{\sqrt{3}} \text{ falsch.}$$

Dafür zu ergänzen:

$$\varphi = \frac{3\,sin\,\varphi}{2 + cos\,\varphi} + {}^1/_{180}\,\varphi^5 \ldots$$

Kästner, Gesch. I, S. 415. Formel von Snellius (1621).

$$\varphi = \frac{tg\,\varphi + 2\,sin\,\varphi}{3} - \frac{1}{20}\,\varphi^5 \ldots$$

Girard, Tables (1626).

$$\varphi = \frac{4\,tg\,\varphi + 32\,sin\,\varphi - 3\,sin\,2\,\varphi}{30} - {}^1/_{105}\,\varphi^7 \ldots$$

Lambert, Beiträge II, §. 76.

$$\varphi = \frac{tg\,\varphi}{sec^{2/3}\,\varphi} - {}^1/_{45}\,\varphi^5 \ldots$$

Seite 6 zu ergänzen:

$$lim\,\frac{a^\omega}{\omega} = \infty \quad a > 1 \qquad lim\,\omega^{\frac{1}{\omega}} = 1$$

$$lim\,\frac{log\,\omega}{\omega} = 0 \qquad lim\,\delta^\delta = 1$$

$$lim\,\omega\,e^{\frac{1}{\omega}} = \infty \qquad lim\,\delta^{log(1+\delta)} = 1$$

Seite 8. Statt

$$-{}^1/_3 + {}^1/_2\,i\sqrt{3}, \; -{}^1/_3 - {}^1/_2\,i\sqrt{3}$$

lies

$$-{}^1/_2 + {}^1/_2\,i\sqrt{3}, \; -{}^1/_2 - {}^1/_2\,i\sqrt{3}.$$

Seite 10. del. Formel 16:

$$\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2i}\,log\,\frac{-x-1}{+x+1}.$$

Seite 11. Functionentheorie statt Funkentheorie; ferner

$$e^{(1+2n\pi i)^2} = e^{1-4n^2\pi^2+4n\pi i}.$$

Seite 12, Formel 8 lies

$$sin\,hyp\,\varphi = {}^1/_2(e^\varphi - e^{-\varphi})$$
$$cos\,hyp\,\varphi = {}^1/_2(e^\varphi + e^{-\varphi}).$$

Seite 20, Zeile 11 lies s statt ϱ.

Seite 31 lies

$$\log \frac{1+x}{1-x} = 2\{x + \tfrac{1}{3}x^3 + \tfrac{1}{5}x^5 + \cdots$$

Zu ergänzen:

$$\log x = \tfrac{1}{2}[\log(x+1) + \log(x-1)]$$
$$+ \tfrac{1}{4}x[\log(x+1) - \log(x-1)] + \frac{1}{3.4.x^4} + \frac{2}{5.6.x^6} + \frac{3}{7.8.x^8}.$$

Thomson's Reihe.

Seite 32. Zu ergänzen:

$$\log \frac{\sin x}{x} = \frac{x^2}{6} + \frac{x^4}{180} + \frac{x^6}{2835} + \frac{x^8}{12600} + \cdots$$
$$= \frac{1}{6}\sin^2 x + \frac{11}{180}\sin^4 x + \frac{191}{5670}\sin^6 x + \cdots$$

$$\log \frac{tg\, x}{x} = \frac{x^2}{3} + \frac{7x^4}{90} + \frac{62x^6}{2835} + \frac{127x^8}{18900} + \cdots$$
$$= \frac{1}{3}tg^2 x - \frac{13}{90}tg^4 x + \frac{251}{2835}tg^6 x + \cdots \quad (tg\, x) < 1.$$

Seite 34. Zu ergänzen:

$$x = \sin x + \frac{1}{3!}\sin^3 x + \frac{1.3}{5!}\sin^5 x + \frac{1.3.5}{7!}\sin^7 x + \cdots$$

Seite 37. Zu ergänzen:

1) Ist

$$x = ay + by^2 + cy^3 + dy^4 + \cdots,$$

so ist

$$y = \frac{x}{a} - \frac{bx^2}{a^3} + \frac{2b^2 - ac}{a^5}x^3 + \frac{5abc - a^2d - 5b^3}{a^7}x^4 + \cdots$$

2) Ist

$$x = ay + by^3 + cy^5 + dy^7 + \cdots,$$

so ist

$$y = \frac{x}{a} - \frac{bx^3}{a^4} + \frac{3b^2 - ac}{a^7}x^5 + \frac{8abc - a^2d - 12b^3}{a^{10}}x^7 + \cdots$$

3) Ist

$$ay + by^2 + cy^3 + \cdots = \alpha x + \beta x^2 + \gamma x^3 + \cdots,$$

so wird

$$y = \frac{\alpha}{a}x - \frac{\alpha^2 b}{a^3}x^2 + \frac{2\alpha^3 b - \alpha^3 ac}{a^5}x^3 - \cdots$$

4) $$\frac{x + \alpha x^2}{1 + \beta x + \gamma x^2} = x + (\alpha - \beta)x^2 + (\beta^2 - \gamma - \alpha\beta)x^3$$
$$+ (\alpha\beta^2 + 2\beta\gamma - \alpha\gamma - \beta^3)x^4 + \cdots$$

Seite 38. Zu ergänzen:

$$(1+x)^n = 1 + \frac{n}{1} x(x+1) + \frac{n \,.\, n-3}{1 \,.\, 2} x^2 (1+x)^2$$
$$+ \frac{n(n-4)(n-5)}{1 \,.\, 2 \,.\, 3} x^3 (1+x)^3 + \cdots \quad {}^1/_2 \left(\sqrt{2} - 1\right) > x > 0.$$

Schlömilch, Mathem. Abhandl. 1850.

Seite 43. Zu ergänzen:

$$\frac{x+1}{x} \log(1+x) = 1 + \frac{1}{1 \,.\, 2} x - \frac{1}{2 \,.\, 3} x^2 + \frac{1}{3 \,.\, 4} x^3 - \cdots$$
$$\frac{x+1}{2\sqrt{x}} \operatorname{arctg} \sqrt{x} = \frac{1}{1 \,.\, 2} + \frac{1}{1 \,.\, 3} x - \frac{1}{3 \,.\, 5} x^2 + \frac{1}{5 \,.\, 7} x^3 - \cdots$$

Seite 44. Ueber Lambert's Reihe siehe Baltzer's Gesammelte Werke, IV. Bd., S. 595.

Seite 46, §. 31. Reihen 1) bis 6) del.

Seite 48. Zu ergänzen:

$$\Pi (1 + \alpha x^k) = 1 + \frac{1 + \alpha x^2}{1 - x} x\alpha + \frac{(1+\alpha x)(1+\alpha x^4)}{(1-x)(1-x^2)} x^5 \alpha^2$$
$$+ \frac{(1+\alpha x)(1+\alpha x^2)(1+\alpha x^6)}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)} x^{12} \alpha^3 + \cdots$$

Compt. rend. XCVI, p. 674 und 743. Cayley, Ellipt. Funct., S. 296.

$$\frac{1}{(1-a)^2 (1-b)^2 (1-c)^2 \ldots} = 1 + \frac{1-(1-a)^2}{(1-a)^2}$$
$$+ \frac{1-(1-b)^2}{(1-a)^2(1-b)^2} + \frac{1-(1-c)^2}{(1-a)^2(1-b)^2(1-c)^2} + \cdots$$

Mess. (2) II, S. 138.

Die Formel für $\cos x$ (§. 32, 8) soll heissen:

$$\cos x = \prod_0^\infty \left\{ 1 - \frac{x^2}{\left[\frac{2n+1}{2} \pi\right]^2} \right\} = \left(1 - \frac{4x^2}{\pi^2}\right)\left(1 - \frac{4x^2}{9\pi^2}\right) \cdots$$

Seite 49, Formel 13 lies:

$1 + x^8$ statt $1 - x^8$.

Seite 50. Zu ergänzen:

$$e = 2^{1/2}\, 3^{1/3}\, 5^{1/5}\, 6^{-1/6}\, 7^{1/7}\, 10^{-1/10}\, 11^{1/11} \ldots$$

Baltzer's Product.

Seite 57. Zeile 13 von oben lies:

$$(1 - {}^1/_2) \text{ statt } \left(1 - \frac{1}{c}\right).$$

Seite 91, letzte Zeile lies:

$$A q^n \pm R \frac{q^n - 1}{q - 1} - E = 0.$$

Seite 108, Formel 10 lies:

$$d\, cosec\, x = - ctg\, x\, cosec\, x\, dx.$$

Seite 121, Formel 5 lies:

$$\int dx \sqrt[3]{x} = {}^4/_3 \sqrt[3]{x^4}.$$

Seite 133. Soll sein:

$$\int \frac{x^2 dx}{a + b x^3} = \frac{1}{3b} \log (a + b x^3).$$

Seite 138. Soll sein:

$$\int \frac{x\, dx}{1 - x} = \log \frac{1}{1 - x} - x.$$

Seite 190. Zu ergänzen:

$$\int \frac{d\varphi}{(1 + e \cos\varphi)^n} = \frac{1}{(1 - e^2)^{n - 1/2}} \int d\varphi\, (1 - e \cos\varphi)^{n-1} \quad e < 1$$

$$\int \frac{d\varphi}{(e + \cos\varphi)^n} = \frac{1}{(1 - e^2)^{n - 1/2}} \int \frac{d\varphi}{\cos^n\varphi} (1 - \cos\varphi)^{n-1} \quad e < 1.$$

Crelle's Journ., Bd. 30.

$$\int \frac{d\varphi}{1 + e \sin^2\varphi} = \frac{1}{2\sqrt{e - 1}} \log \frac{1 + \sqrt{e - 1}\, tg\,\varphi}{1 - \sqrt{e - 1}\, tg\,\varphi} \quad e > 1.$$

Seite 191. Zu ergänzen:

$$\int \frac{\alpha + \beta \cos x}{[a + b \cos x]^n} dx = \frac{C \sin x}{[a + b \cos x]^{n-1}} + \int \frac{A + B \cos x}{[a + b \cos x]^{n-1}} dx$$

$$A = \frac{a\alpha - b\beta}{a^2 - b^2}, \quad B = \frac{n - 2}{n - 1} \frac{a\beta - b\alpha}{a^2 - b^2}$$

$$C = \frac{a\beta - b\alpha}{(n - 1)(a^2 - b^2)}.$$

Seite 215. Zu ergänzen:

$$\int \frac{dx}{\log x} = \log (\pm \log x) + \frac{\log x}{1!} + {}^1/_2 \frac{\log x^2}{2!} + {}^1/_3 \frac{\log x^3}{3!} + \cdots$$

$$\int \frac{x^m dx}{\log x} = \log \log x + \frac{1}{1} \frac{m + 1}{1!} \log x + {}^1/_2 \frac{(m + 1)^2}{2!} \log x^2 + \cdots$$

Seite 233. In Folge der Benutzung einer falschen Quelle sind hier viele Fehler entstanden. Verbessert nach Berliner Jahrb. Seite 311, 1863.

Im 2. bis 8. Integral fehlt rechts bei jedem Gliede h. Ausserdem lies:

beim 2. Integral $\frac{7}{90}$ statt $\frac{7}{80}$,

„ 3. „ $\frac{25}{96}$ „ $\frac{95}{96}$,

„ 5. „ $\frac{2989}{17280}$ statt $\frac{2089}{17280}$,

„ 7. „ $\frac{1209}{5900}$ statt $\frac{1209}{5600}$,

„ 8. „ $-\frac{16175}{199884}$ statt $-\frac{16175}{199584}$.

Seite 241, Formel 52 lies:

$$-\frac{\pi^2}{6p} \text{ statt } -\frac{\pi^2}{6\pi}.$$

Seite 407, Formel 6 del.

Seite 526, §. 165, Formel 1 lies:

$$\sin^2\omega = \begin{vmatrix} \cos\beta & \cos\gamma \\ \cos\beta' & \cos\gamma' \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} \cos\gamma & \cos\alpha \\ \cos\gamma' & \cos\alpha' \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} \cos\alpha & \cos\beta \\ \cos\alpha' & \cos\beta' \end{vmatrix}^2$$

Bei dieser Berichtigung sei noch auf ein Kriterium der Richtigkeit hingewiesen: die Symmetrie, welche sofort erkennen lässt, dass diese Formel falsch hingeschrieben wurde.

In Bezug auf die Tafeln sei bemerkt, dass die Tafel VI zum §. 224 gehört.

Einige Eigennamen wurden fast ständig falsch geschrieben, so Balzer statt Baltzer. Da es aber bekannte Namen sind, so dürften diese Versehen leicht zu bemerken sein.

GENERALREGISTER.

A.

D.

E.

F.

G.

H.

I.

J.

K.

N.

O.

P.

